ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΔΥΤΙΚΗΣ ΕΛΛΑΔΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ο ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΑΙ Η ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

ΣΠΟΥΔΑΣΤΡΙΑ: Πετρή Μαριάννα - Μπαρλή Παρασκευή
ΕΙΣΗΓΗΤΡΙΑ : Βάσιου Γεωργία

ΠΑΤΡΑ 2015

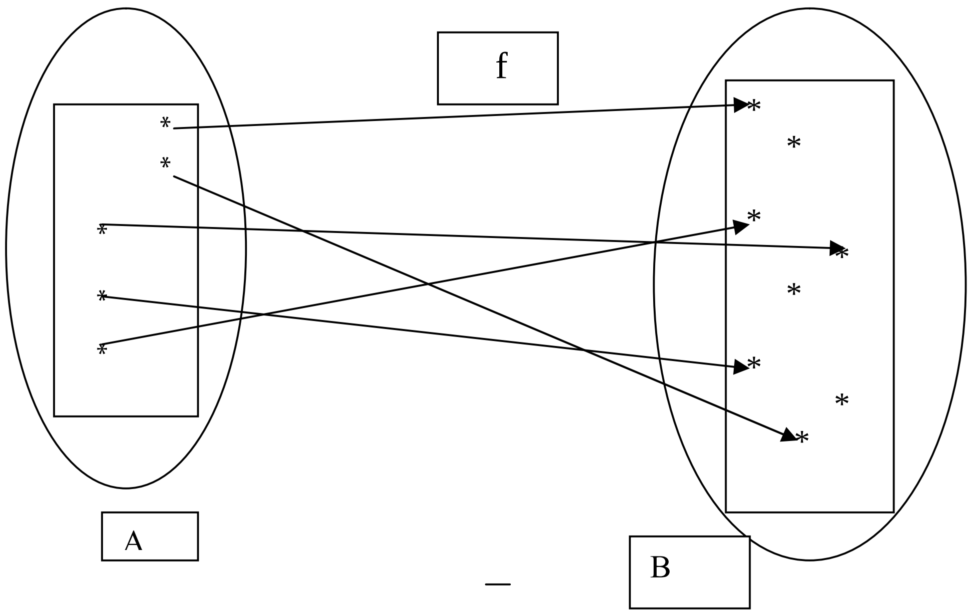
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή

Στην παρακάτω εργασία θα μελετήσουμε τον Διαφορικό λογισμό και την εφαρμογή του σε προβλήματα διοίκησης και οικονομίας. Θα προσπαθήσουμε να αναλύσουμε αυτόν τον τεράστιο τομέα των μαθηματικών όσο πιο αναλυτικά γίνεται. Στο πρώτο και δεύτερο σκέλος θα αναφερθούμε στην ιστορική αναδρομή του διαφορικού λογισμού και στην εξέλιξη του, στο θεωρητικό κομμάτι και στις βασικές του έννοιες καθώς και στα βασικά θεωρήματα του και στο τρόπο επίλυσής τους. Στο τρίτο σκέλος θα προσπαθήσουμε να δούμε την πρακτική του εφαρμογή σε προβλήματα διοίκησης και οικονομίας. Τα τελευταία χρόνια όλο και πιο πολλές επιχειρήσεις προσπαθούν να βρουν νέους τρόπους μεγιστοποίησης του κέρδους ελαχιστοποίησης των εξόδων και απωλειών. Σε αυτό το κομμάτι έχει αρχίσει να βοηθά η εφαρμογή των προβλέψεων μέσω του διαφορικού λογισμού. Ο λογισμός αντιμετωπίζεται σαν εξέλιξη μιας ιδέας και όχι σαν «συλλογή θεμάτων».

Κεφάλαιο 1 - Συναρτήσεις

Συνάρτηση είναι μια διαδικασία στην οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο κάποιου συνόλου Β, όπως βλέπουμε και στον παρακάτω πίνακα.



Οι συναρτήσεις στις οποίες το σύνολο Α, που λέγεται πεδίο ορισμού της συνάρτησης, είναι υποσύνολο του συνόλου R των πραγματικών αριθμών, ενώ το Β συμπίπτει με το R, λέγονται **πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής.**

Η συνάρτηση συμβολίζεται συνήθως με ένα από τα μικρά γράμματα f, g, h, φ, σ του λατινικού και ελληνικού αλφαβήτου.

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α. Αν με την συνάρτηση αυτή το xÎ A αντιστοιχίζεται στο y Î B, τότε γράφουμε:

$$Y = f(x)$$

Και διαβάζεται « y ίσον f του x». Το f(x) λέγεται τιμή της f στο x. Το γράμμα χ, που συμβολίζει οποιοδήποτε στοιχείο του Α, ονομάζεται ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ το y, που παριστάνει την τιμή της συνάρτησης στο χ και εξαρτάται από την τιμή του χ, λέγεται εξαρτημένη μεταβλητή.

1.1 Πράξεις με Συναρτήσεις

Αν δύο συναρτήσεις *f, g* ορίζονται και οι δύο σε ένα σύνολο *A*, τότε ορίζονται και οι συναρτήσεις:

1. το άθροισμα $S = f + g$ με $S(x) = f(x) + g(x), x \in A$
2. η διαφορά $D = f - g$ με $D(x) = f(x) - g(x), x \in A$
3. το γινόμενο $P = f \cdot g$ με $P(x) = f(x) \cdot g(x), x \in A$
4. το πηλίκο $R = \dfrac{f}{g}$ με $R(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}, x \in A$ και με $g(x) \neq 0$

Για παράδειγμα, αν $f(x)=x^2-1$ και $g(x)= x+1$ τότε

$$S(x) = x^2 - 1 + x + 1 = x(x+1)$$

$$D(x) = x^2 - 1 - x - 1 = x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$$

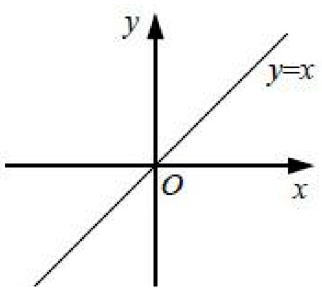
$$P(x) = (x^2 - 1)(x+1) = (x+1)^2(x-1)$$

$$R(x) = \frac{x^2 - 1}{x+1} = x - 1, x \neq -1$$

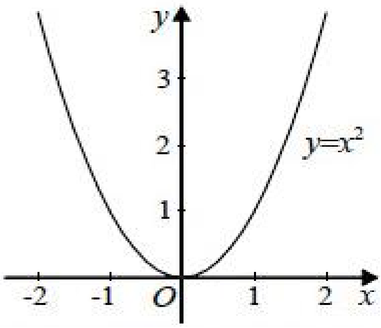
Πηγή: *http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-C105/492/3197,12972/*

1.2 Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

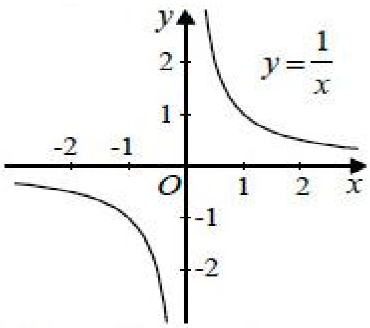
Έστω μια συνάρτηση *f* με πεδίο ορισμού ένα σύνολο *A*. **Γραφική παράσταση ή καμπύλη** της *f* σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων ***O x y*** λέγεται το σύνολο των σημείων *M(x,(f(x))* για όλα τα *x ϵ* A. Επομένως, ένα σημείο *M(x, y)* του επιπέδου των αξόνων ανήκει στην καμπύλη της *f*, μόνο όταν *y = f(x)*. Η εξίσωση λοιπόν *y = f(x)* επαληθεύεται μόνο από τα ζεύγη *(x, y)* που είναι συντεταγμένες σημείων της γραφικής παράστασης της *f* και λέγεται **εξίσωση της γραφικής παράστασης της *f***. Είναι πολύ χρήσιμο να σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης. Στα παρακάτω σχήματα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις ορισμένων συναρτήσεων.



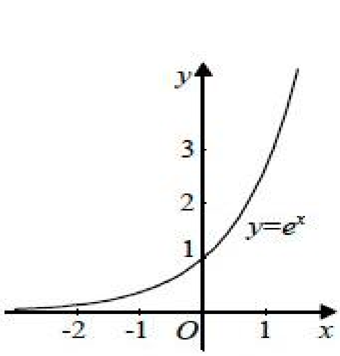
(α) Η καμπύλη της συνάρτησης $f(x)=x$ είναι η διχοτόμος της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων.



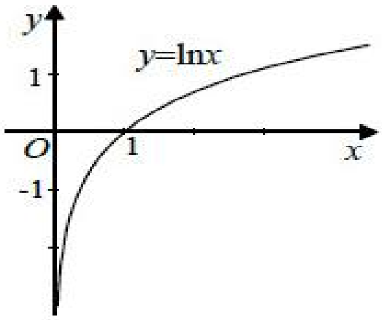
(β) Η καμπύλη της συνάρτησης $f(x)=x^2$ είναι μια *παραβολή*.



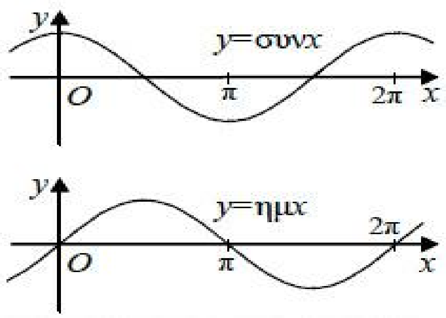
(γ) Η καμπύλη της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{x}$ είναι μια *υπερβολή*.



(δ) Η καμπύλη της εκθετικής συνάρτησης $f(x)=e^x$ είναι “πάνω” από τον άξονα $x'x$, αφού $e^x > 0$ για κάθε $x \in R$.



(ε) Η καμπύλη της λογαριθμικής συνάρτησης $f(x)=lnx$ είναι “δεξιά” του άξονα $y'y$, αφού ο λογάριθμος ορίζεται μόνο για $x > 0$.



(στ) Οι συναρτήσεις $f(x)=ημx$ και $g(x)=συνx$ είναι περιοδικές με περίοδο $2π$.

Πηγή:http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-C100/493/3202,13006/

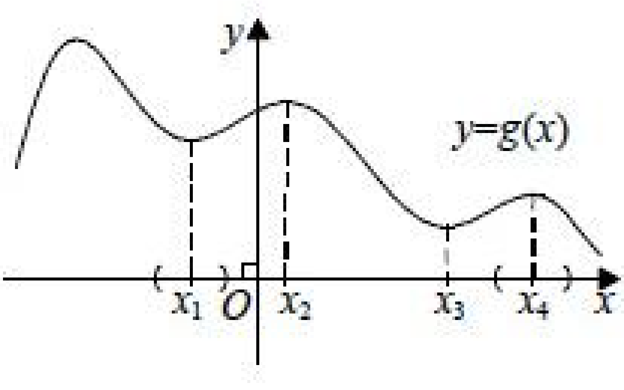
1.3 Μονοτονία - Ακρότατα Συνάρτησης

Γενικά:

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα $Δ$ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in Δ$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$ και **γνησίως**

φθίνουσα στο *Δ*, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in D$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$. Μια συνάρτηση που είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα λέγεται **γνησίως μονότονη**.

Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g του παρακάτω σχήματος προκύπτει ότι για $x=x_1$ η τιμή της g είναι μικρότερη από τις τιμές της g σε όλα τα x που ανήκουν σε ένα ανοικτό διάστημα το οποίο περιέχει το x_1, ή, όπως λέμε σε μια **περιοχή** του x_1. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση g έχει στο σημείο x_1 **τοπικό ελάχιστο**. Το ίδιο συμβαίνει και για $x=x_3$. Οι τιμές $g(x_1)$ και $g(x_3)$ λέγονται **τοπικά ελάχιστα *της συνάρτησης***. Επίσης, για $x=x_4$ η τιμή $g(x_4)$ είναι μεγαλύτερη από τις τιμές της g σε όλα τα x που ανήκουν σε μια περιοχή του x_4. Λέμε ότι η συνάρτηση g έχει στο σημείο x_4 **τοπικό μέγιστο.** Το ίδιο συμβαίνει και για $x=x_2$. Οι τιμές $g(x_2)$ και $g(x_4)$ λέγονται **τοπικά μέγιστα** της συνάρτησης. Παρατηρούμε ότι ένα τοπικό ελάχιστο μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο. Για παράδειγμα, το τοπικό ελάχιστο $g(x_1)$είναι μεγαλύτερο από το τοπικό μέγιστο $g(x_4)$.



Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το *A*, λέμε ότι παρουσιάζει:

Τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1, και **τοπικό ελάχιστο** στο $x_2 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_2)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_2.

Τα μέγιστα και τα ελάχιστα μιας συνάρτησης, τοπικά ή ολικά, λέγονται **ακρότατα** της συνάρτησης.

Πηγή:http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-C100/493/3202,13006/

1.4 Όριο Συνάρτησης

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$, η οποία δεν ορίζεται για *x*=1. Ας εξετάσουμε όμως τη συμπεριφορά της *f* για τιμές του *x* κοντά στο 1.

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τις τιμές του *f(x)* για τιμές του *x* κοντά στο 1

$x<1$	$f(x)$	$x>1$	$f(x)$
0,5	1,500000	1,5	2,500000
0,9	1,900000	1,1	2,100000
0,99	1,990000	1,01	2,010000
0,999	1,999000	1,001	2,001000
0,9999	1,999900	1,0001	2,000100

Από τον παραπάνω πίνακα βλέπουμε ότι όταν το *x* παίρνει τιμές πολύ κοντά στο 1 (και από τις δύο πλευρές του 1), το *f(x)* παίρνει τιμές πολύ κοντά στο 2. Στο ίδιο συμπέρασμα φτάνουμε, αν παρατηρήσουμε ότι για $x \neq 1$ είναι

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}=x+1,$$

οπότε όταν το *x* παίρνει τιμές που τείνουν στο 1 $(x \to 1)$ τότε το f(x)=x+1 παίρνει τιμές που τείνουν στο 2 $(x+1 \to 2)$. Λέμε λοιπόν ότι η f έχει στο σημείο 1 όριο (limit) 2 και γράφουμε $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$.

Με το προηγούμενο παράδειγμα παρουσιάσαμε με απλό τρόπο και χωρίς μαθηματική αυστηρότητα την έννοια του ορίου μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο x_0 που δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της, υπάρχουν όμως σημεία του πεδίου ορισμού της πολύ κοντά στο x_0. Τίποτα βέβαια δεν αποκλείει την αναζήτηση του ορίου μιας συνάρτησης και σε ένα σημείο x_0 που να ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν στο x_0 όρια πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = l_2$, όπου l_1 και l_2 πραγματικοί αριθμοί, τότε αποδεικνύεται ότι:

- $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = l_1 + l_2$
- $\lim_{x\to x_0}(kf(x)) = kl_1$
- $\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = l_1 l_2$
- $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{l_1}{l_2}$
- $\lim_{x\to x_0}(f(x))^n = l_1^n$
- $\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l_1}$
-

Γενικά μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Χαρακτηριστικό γνώρισμα μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα κλειστό διάστημα είναι ότι η γραφική της παράσταση είναι μια συνεχής καμπύλη, δηλαδή για το σχεδιασμό της δε χρειάζεται να σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί. Αποδεικνύεται ότι οι γνωστές μας συναρτήσεις, πολυωνυμικές, τριγωνομετρικές, εκθετικές, λογαριθμικές, αλλά και όσες προκύπτουν από πράξεις μεταξύ αυτών είναι συνεχείς συναρτήσεις. Έτσι ισχύει για παράδειγμα:

$\lim_{x\to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$, $\lim_{x\to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$ και $\lim_{x\to x_0} \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi x_0$ (όταν $\sigma\upsilon\nu x_0 \neq 0$)

Πηγή:http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-C100/493/3202,13006/

Κεφάλαιο 2 - Διαφορικός λογισμός

Λογισμός είναι η μαθηματική μελέτη της αλλαγής, κατά τον ίδιο τρόπο που η γεωμετρία είναι η μελέτη του σχήματος και η άλγεβρα είναι η μελέτη των πράξεων και η εφαρμογή του για την επίλυση των εξισώσεων. Έχει δύο κλάδους τον διαφορικό λογισμό, που είναι σχετικός με τα ποσοστά των αλλαγών και τις κλίσεις των καμπύλων και τον ολοκληρωτικό λογισμό που είναι σχετικός με τη σώρευση των ποσοτήτων και τις περιοχές κάτω από τις καμπύλες. Οι δύο κλάδοι συνδέονται μεταξύ τους με το θεμελιώδες θεώρημα του λογισμού. Και οι δύο κλάδοι κάνουν χρήση των θεμελιωδών εννοιών της σύγκλισης άπειρων ακολουθιών και άπειρων σειρών σε ένα καλά καθορισμένο όριο. Λογισμός έχει ευρέως διαδεδομένες χρήσεις στον τομέα της επιστήμης, της οικονομίας, και της μηχανικής και μπορεί να λύσει πολλά προβλήματα που η άλγεβρα μόνη της δεν μπορεί.

2.1 Ιστορική αναδρομή

Τα πρώτα βήματα μπορούμε να πούμε ότι έγιναν στην αρχαία Ελλάδα, τα σημαντικότερα βήματα όμως έγινα τον $17^{ο}$ αιώνα, από τον Ισαάκ Νεύτων ο οποίος άρχισε να μελετάει μια μαθηματική μέθοδο, η οποία θα διαχειρίζεται όχι μόνο συναρτήσεις αλλά και το ρυθμό μεταβολής τους, ταυτόχρονα άρχισε να εργάζεται πάνω στο ίδιο θέμα και ο γερμανός μαθηματικός Gottfried Leibniz αλλά με διαφορετικούς συμβολισμούς. Η πρώτη δημοσίευση σχετικά με τον διαφορικό λογισμό έγινε από τον Λάιμπνιτς το 1675 και αρκετά χρόνια αργότερα το 1704 ακολούθησε ο Νεύτωνας η οποία αναφερόταν στον απειροστικό λογισμό. Οι παραπάνω ερευνητές βέβαια στηρίχτηκαν σε προϋπάρχουσες γνώσεις των συναρτήσεων και της αναλυτικής γεωμετρίας. Ο Barrow, ο οποίος ήταν ο δάσκαλος του Νεύτωνα, γνώριζε τον προβληματισμό γύρω από τη σχέση εφαπτόμενης χορδής σε μια καμπύλη, καθώς και μεθόδους υπολογισμού επιφανειών. Ο Fermat είχε διατυπώσει λύσεις για το πρόβλημα ακραίων τιμών των συναρτήσεων. Ο Νεύτων και ο Λάιμπνιτς συνένωσαν τις γνώσεις και διατύπωσαν μια συστηματική και πρωτότυπη θεωρία. Για πρώτη φορά η επιστήμη των μαθηματικών ξεπέρασε τα πλαίσια που είχαν τεθεί από τους αρχαίους Έλληνες.

Στις αρχές του λογισμού η χρήση των απειροελάχιστων ποσοτήτων δε ήταν αυστηρή και επικρίθηκε έντονα από ορισμένους συγγραφείς κυρίως από τους Μισέλ Ρολ (Michel Rolle) και Bishop Berkeley. Ο Berkeley γράφει για τον απειροστικό λογισμό στο βιβλίο του The analyst το 1734. Μια πρόσφατη μελέτη υποστηρίζει ότι ο λογισμός του Λάιμπνιτς ήταν πιο καλά θεμελιωμένος από του Berkeley.

Αρκετοί μαθηματικοί, συμπεριλαμβανομένου του Colin Maclaurin προσπάθησαν να αποδείξουν την ορθότητα της χρήσης απειροελάχιστων, αλλά δεν μπόρεσαν να το αποδείξουν μέχρι 150 χρόνια αργότερα όταν χάρη στο έργο των Cauchy και Weierstrass ένας τρόπος βρέθηκε τελικά για να αποφευχθεί η απλή "έννοια" των απείρων μικρών ποσοτήτων. Τα θεμέλια του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού είχαν τεθεί. Στα έγγραφα του Cauchy θα βρείτε ένα ευρύ φάσμα της θεμελιακής προσεγγίσεις, συμπεριλαμβανομένου του ορισμού της συνέχειας όσον αφορά τα απειροελάχιστα, και ένα (κάπως ασαφές) πρωτότυπο ενός (ε, δ)-ορισμό του ορίου στον ορισμό της διαφοροποίησης. Στο έργο του ο Weierstrass διατύπωσε εκ νέου την έννοια του ορίου. Μετά το έργο του *Weierstrass* έγινε κοινό στο βασικό λογισμό σχετικά με τα όρια αντί για απειροελάχιστες ποσότητες. Μπέρναρντ Ριμαν (*Bernhard Riemann*) χρησιμοποίησε αυτές οι ιδέες να δώσει έναν ακριβή ορισμό του ολοκληρώματος. Επίσης κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου ότι οι ιδέες του λογισμού γενικεύονταν στον Ευκλείδειο χώρο και στο μιγαδικό επίπεδο.

Στα σύγχρονα μαθηματικά, τα θεμέλια του λογισμού που περιλαμβάνονται στο πεδίο της πραγματικής ανάλυσης το οποίο περιέχει πλήρεις ορισμούς και τις αποδείξεις από τα θεωρήματα του λογισμού. Η εμβέλεια του λογισμού έχει επίσης επεκταθεί σε μεγάλο βαθμό. Ο Henri Lebesgue εφηύρε τη θεωρία του μέτρου που χρησιμοποιείται για να ορίσει ολοκληρώματα. Ο Laurent Schwartz εισήγαγε τις Κατανομές, οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να πάρει την παράγωγο οποιασδήποτε συνάρτησης απολύτως.

Ενώ μερικές από τις ιδέες του λογισμού είχαν αναπτυχθεί νωρίτερα στην Αίγυπτο, την Ελλάδα, την Κίνα, την Ινδία, το Ιράκ, την Περσία, και την Ιαπωνία, η σύγχρονη χρήση του λογισμού ξεκίνησε στην Ευρώπη, κατά τη διάρκεια του 17ου αιώνα, όταν ο Ισαάκ Νεύτων και ο Γκότφριντ Βίλχελμ Λάιμπνιτς χτίσαν το έργο των προηγούμενων μαθηματικών και εισήγαγαν τις βασικές αρχές του λογισμού.

Εφαρμογές του διαφορικού λογισμού περιλαμβάνουν υπολογισμούς που αφορούν την ταχύτητα και την επιτάχυνση, την κλίση της καμπύλης, και βελτιστοποίηση. Εφαρμογές του ολοκληρωτικού λογισμού περιλαμβάνουν υπολογισμούς που αφορούν έκταση, τον όγκο, το μήκος του τόξου, το κέντρο της μάζας και την πίεση. Πιο προηγμένες εφαρμογές περιλαμβάνουν δυναμοσειρές και σειρές Fourier. Ο λογισμός χρησιμοποιείται επίσης για να αποκτήσουμε μια ακριβέστερη κατανόηση της φύσης του χώρου, του χρόνου, και της κίνησης.

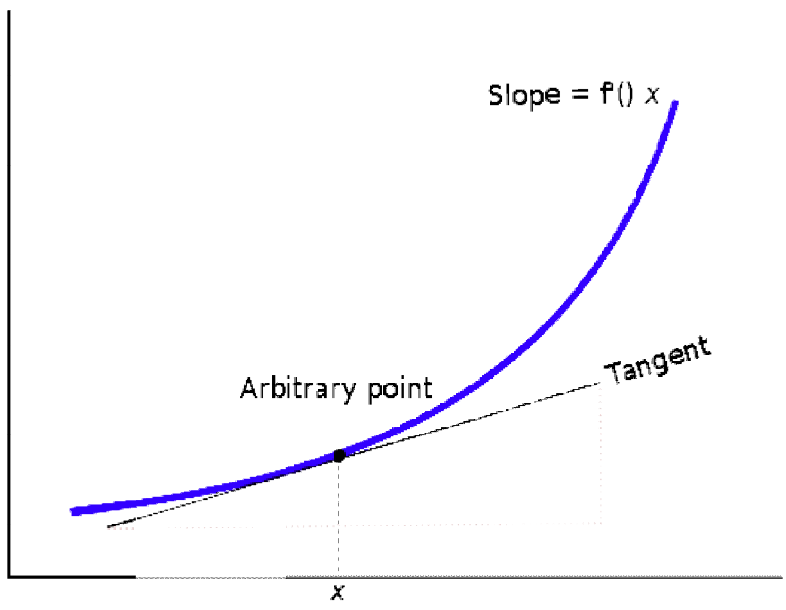
Πηγή: http://tmth.gr/component/content/article/61-mathematics/494-odiaforikos-logismos

2.2 Διαφορικός λογισμός

Ο διαφορικός λογισμός είναι η μελέτη του ορισμού, των ιδιοτήτων και των εφαρμογών της παραγώγου μιας συνάρτησης. Η ίδια η διαδικασία εύρεσης της παραγώγου ονομάζεται "διαφοροποίηση" ("differentiation").

Λαμβάνοντας υπόψη μια λειτουργία και ένα σημείο στο πεδίο ορισμού του, η παράγωγος στο σημείο αυτό είναι ένας τρόπος που κωδικοποιεί τη συμπεριφορά της συνάρτησης κοντά στο αυτό το σημείο. Με την εύρεση της παραγώγου συνάρτησης σε κάθε σημείο στο πεδίο ορισμού του, είναι δυνατόν να παραχθεί μια νέα συνάρτηση που ονομάζεται "παράγωγος συνάρτηση" ή απλά το "παράγωγος" της αρχικής συνάρτησης.

Στη μαθηματική ορολογία, η παράγωγος είναι μια διαδικασία η οποία παίρνει μια συνάρτηση και εξάγει μια δεύτερη συνάρτηση. Αυτή είναι η πιο αφηρημένη από πολλές από τις διεργασίες που μελετούνται σε στοιχειώδη άλγεβρα, όπου η συνάρτηση κατά κανόνα δέχεται έναν αριθμό και παραγάγει έναν άλλο αριθμό.



Η εφαπτομένη στο σημείο (x, $f(x)$). Η παράγωγος $f'(x)$ μιας καμπύλης σε ένα σημείο είναι η κλίση (αύξηση πάνω κίνηση) της εφαπτομένης στην εν λόγω καμπύλη σε εκείνο το σημείο.

Το πιο κοινό σύμβολο για μια παράγωγο είναι μια απόστροφος που ονομάζεται πρώτη παράγωγος. Έτσι η παράγωγος της συνάρτησης **f** συμβολίζεται ως **f′**, και προφέρεται " **πρώτη παράγωγος της f** ". Ως παράδειγμα μιας συνάρτησης και της παραγώγου της, εάν $f(x) = x^2$, τότε η συνάρτηση $f'(x) = 2x$ είναι η παράγωγός της (υπολογίζεται με τις μεθόδους παραγώγισης).

Εάν η μεταβλητή της συνάρτησης αντιπροσωπεύει το χρόνο, στη συνέχεια η παράγωγος αντιπροσωπεύει την αλλαγή της σε σχέση με το χρόνο. Για παράδειγμα, εάν η f είναι μια συνάρτηση που δέχεται το χρόνο ως μεταβλητή και δίνει την θέση της μπάλας τη στιγμή εκείνη ως τιμή, τότε η παράγωγος της f είναι το πόσο γρήγορα η θέση μεταβάλλεται στον χρόνο, δηλαδή, είναι η ταχύτητα της μπάλας.

Αν μια συνάρτηση είναι γραμμική (δηλαδή, εάν η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι μια ευθεία γραμμή), τότε η συνάρτηση μπορεί να γραφτεί ως $y = mx + b$, όπου x είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή, y είναι η εξαρτημένη μεταβλητή και b είναι το σημείο τομής της y:

$$m = \frac{rise}{run} = \frac{change\_in\_y}{change\_in\_x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Αυτό δίνει μια ακριβή τιμή για την κλίση μιας ευθείας γραμμής. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης δεν είναι μια ευθεία γραμμή, τότε η αλλαγή στο y διαιρούμενη με τη μεταβολή χ ποικίλλει. Συγκεκριμένα, αν f είναι μια συνάρτηση, ορίζουμε ένα σημείο στο πεδίο ορισμού της με συντεταγμένες (a, $f(a)$), το οποίο είναι ένα σημείο πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης. Αν h είναι ένας αριθμός κοντά στο μηδέν, τότε ο $a + h$ είναι ένας αριθμός κοντά στο a. Επομένως το σημείο ($a + h$, $f(a + h)$) τείνει στο σημείο (a, $f(a)$).

Η κλίση μεταξύ αυτών των δύο σημείων είναι:

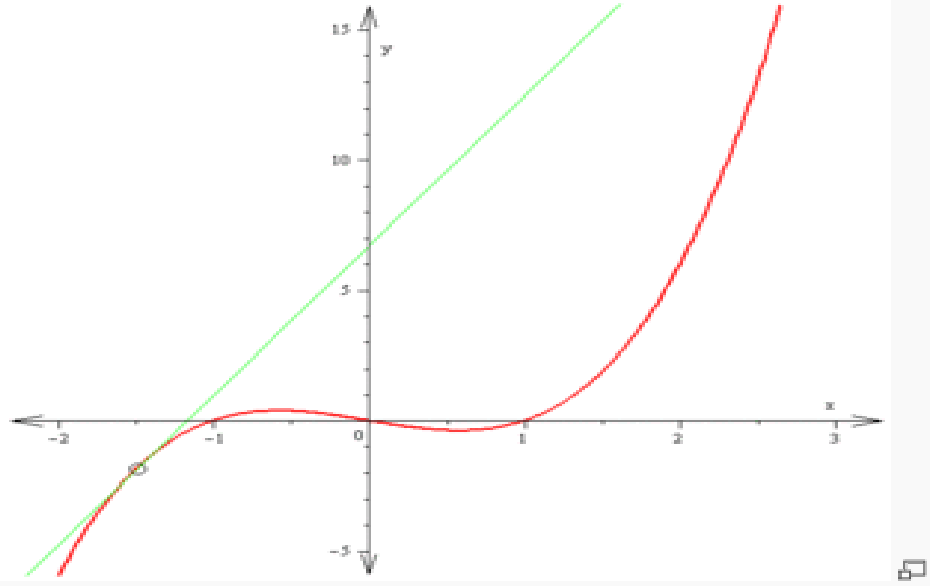
$$m = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Η έκφραση αυτή ονομάζεται πηλίκο διαφοράς. Μια γραμμή μέσω δύο σημείων σε μια καμπύλη ονομάζεται τέμνουσα γραμμή, και έτσι *m* είναι η κλίση της τέμνουσας γραμμής μεταξύ των $(a, f(a))$ και $(a + h, f(a + h))$. Η τέμνουσα γραμμή είναι μόνο μια προσέγγιση στη συμπεριφορά της συνάρτησης στο σημείο *a* διότι δεν λαμβάνει υπόψη για ό,τι συμβαίνει μεταξύ *a* και *a* + *h*. Δεν είναι δυνατόν να ανακαλύψει την συμπεριφορά στο *a* θέτοντας το *h* μηδέν επειδή αυτό θα απαιτούσε τη διαίρεση με το μηδέν, η οποία είναι αδύνατη. Η παράγωγος ορίζεται από τη λήψη του ορίου καθώς το *h* τείνει στο μηδέν, πράγμα που σημαίνει ότι θεωρεί την συμπεριφορά της *f* για όλες τις μικρές τιμές του *h* και εξάγει μια τιμή για την περίπτωση κατά την οποία το *h* ισούται με μηδέν:

$$\lim_{h \to 0} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Γεωμετρικά, η παράγωγος είναι η κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της *f* στο $(a, f(a))$. Η παράγωγος είναι ένα όριο των λόγων διαφοράς. Για το λόγο αυτό, η παράγωγος ονομάζεται μερικές φορές η κλίση της συνάρτησης *f*. Εδώ είναι ένα συγκεκριμένο παράδειγμα, όπου υπολογίζεται η κλίση της συνάρτησης $f(x) = x^2$ στη θέση 3.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$



Η παράγωγος της $f'(x)$ στο a είναι η κλίση της εφαπτομένης στην εν λόγω καμπύλη σε εκείνο το σημείο. Η κλίση αυτή καθορίζεται λαμβάνοντας υπόψη την οριακή τιμή των πλάγιων τεμνούμενων ευθειών. Εδώ η συνάρτηση (με το κόκκινο χρώμα) είναι η $f(x) = x^3 - x$. Η εφαπτομένη (με πράσινο χρώμα) η οποία περνάει από το σημείο (−3/2, −15/8) έχει κλίση 23/4. Σημειώστε ότι οι κατακόρυφες και οριζόντιες ευθείες σε αυτή την εικόνα είναι διαφορετικές.

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} = \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{6h + 6h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (6 + h) = 6$$

Ένας κοινός συμβολισμός, ο οποίος εισήχθη από τον Λάιμπνιτς, για την παράγωγο στο παραπάνω παράδειγμα είναι:

$$y = x^2 \quad , \quad \frac{dy}{dx} = 2x$$

Σε μια προσέγγιση που βασίζεται στα όρια, το σύμβολο *dy/dx* πρέπει να ερμηνευθεί όχι ως το πηλίκο των δύο αριθμών αλλά ως συντομογραφία για το όριο που υπολογίστηκε πάνω. Ο Λάιμπνιτς όμως είχε την πρόθεση να εκπροσωπεί το πηλίκο των δύο απειροελάχιστα μικρών αριθμών *dy* είναι η απειροελάχιστη αλλαγή του *y* που προκαλείται από μια απειροελάχιστη αλλαγή *dx* εφαρμοσμένη στο *x*. Μπορούμε επίσης να σκεφτούμε το *d/dx* διαφορετική πράξη που παίρνει μια συνάρτηση ως εισροή και δίνει μια άλλη συνάρτηση, την παράγωγο ως έξοδο. Για παράδειγμα:

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\right) = 2x$$

Σε αυτή τη χρήση το *dx* σε ένα ο παρονομαστής "διαβάζεται σε σχέση με το *x*".

Πηγή:http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%9B%CE%BF%CE%B3%CE%B9%CF%83%CE%BC%CF%8C%CF%82

2.3 Ρυθμός μεταβολής

Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού τη χρονική στιγμή t_0 ως το όριο

$$\lim_{(t \to t_0)} = (s(t) - S(t_0) / t - t_0) = S(t_0)$$

Το όριο αυτό το λέμε και ρυθμό μεταβολής της τετμημένης S του κινητού ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 .

Σαν ορισμό του παραπάνω δίνεται:

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x,y συνδέονται με τη σχέση y=f(x) όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f(x_0)$.

Για παράδειγμα ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας υ ως προς τον χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 είναι η παράγωγος $υ΄(t_0)$, της ταχύτητας υ ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0. Η παράγωγος $υ΄(t_0)$ λέγεται επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και συμβολίζεται με $α(t_0)$. Είναι δηλαδή :

$$a(t_0) = υ'(t_0) = S''(t_0)$$

Στην οικονομία το κόστος παραγωγής Κ ως προς την ποσότητα χ, όταν $χ=χ_0$ και λέγεται οριακό κόστος στο $χ_0$. Ανάλογα ορίζονται και οι έννοιες οριακή είσπραξη στο $χ_0$ και οριακό κέρδος στο $χ_0$.

Παράδειγμα 1

Αν το συνολικό κόστος παραγωγής χ μονάδων ενός βιομηχανικού προϊόντος είναι Κ(χ) και η συνολική είσπραξη από την πώληση τους είναι Ε(χ) , τότε Ρ(χ) =Ε(χ)-Κ(χ) είναι το συνολικό κέρδος και $K\mu(x) = \dfrac{(K(x))}{x}$ είναι το μέσο κόστος.

Α) να αποδειχτεί ότι ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους μηδενίζεται όταν ο ρυθμός μεταβολής του κόστους και ο ρυθμός μεταβολής της είσπραξης είναι ίσοι

Β) να αποδειχτεί ότι ο ρυθμός μεταβολής του μέσου κόστους μηδενίζεται όταν το μέσο κόστος είναι ίσο με το οριακό κόστος.

Λύση:

Α) ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους είναι

$$P'(x) = E'(x) - K'(x)$$

Επομένως ,

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow E'(x) - K'(x) = 0 \Leftrightarrow E'(x) = K'(x)$$

Β) ο ρυθμός μεταβολής του μέσου κόστους είναι

$$K'\mu(x) = \frac{(K'(x) \cdot x - K(x))}{x^2}$$

Επομένως ,

$$K'\mu(x) = 0 \Leftrightarrow K'(x) \cdot x - K(x) = 0 \Leftrightarrow K'(x) = \frac{(K(x))}{x} \Leftrightarrow K'(x) = K\mu(x)$$

Πηγή: http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-C105/492/3198,12985/

2.4 Παραγώγιση βασικών συναρτήσεων

Έως τώρα η παραγώγιση μιας συνάρτησης f γινόταν με τη βοήθεια του τύπου $f'(x)=\lim_{h\to 0} = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Στη συνέχεια θα γνωρίσουμε μερικούς κανόνες που διευκολύνουν τον υπολογισμό της παραγώγου πιο πολύπλοκων συναρτήσεων.

- Η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης **f(x)=c** είναι **(c)'=0.**
- Η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης **f(x) = x** είναι **(x)'=1.**
- Η παράγωγος της συνάρτησης $\mathbf{f(x) = x^{\rho}}$ είναι $\mathbf{(x^{\rho})' = \rho\, x^{\rho-1}}$**.**
- Η παράγωγος του **ημx** είναι **(ημx)′= συνx.**
- Η παράγωγος του **συνx** είναι **(συνx)'= -ημx.**
- Η παράγωγος του $\mathbf{e^{x}}$ είναι $\mathbf{(e^{x})' = e^{x}}$**.**
- Η παράγωγος του **lnx** είναι **(lnx)'=1/x.**

Πηγή: http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-C100/493/3202,13008/

2.5 Κανόνες παραγώγισης

1.Παράγωγος αθροίσματος

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση f + g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει :

$$(f + g)'(x_0) = f '(x_0) + g'(x_0)$$

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ, τότε για κάθε x ϵ Δ ισχύει :

$$\mathbf{(f + g)'(x) = f '(x) + g'(x).}$$

Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Δηλαδή, αν f_1 ,f_2 ,.......,f_k , είναι παραγωγίσιμες στο Δ, τότε

$$(f_1 + f_2 +.......+ f_k)'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) +......+ f_k'(x)$$

2.Παράγωγος γινομένου

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε και η συνάρτηση f • g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει :

$$(f \bullet g)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$$

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ, τότε για κάθε x ϵ Δ ισχύει :

$$\mathbf{(f \bullet g)'(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)}$$

Το παραπάνω θεώρημα επεκτείνεται και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Έτσι, για τρεις παραγωγίσιμες συναρτήσεις ισχύει :

$$\begin{aligned}(f(x)g(x)h(x))' &= \left[\left(f(x)g(x)\right)\cdot h(x)\right]' = \left(f(x)g(x)\right)'\cdot h(x) + \left(f(x)g(x)\right)\cdot h'(x)\\ &= [f'(x)g(x)+f(x)g'(x)]h(x)+f(x)g(x)h'(x)\\ &= f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)\,.\end{aligned}$$

3.Παράγωγος πηλίκου

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε x ϵ Δ ισχύει $g(x) \neq 0$, τότε για κάθε x ϵ Δ έχουμε :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}\,.$$

4.Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο g(x_0), τότε η συνάρτηση fog είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Γενικά, αν μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο g(Δ), τότε η συνάρτηση fog είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει:

$$\mathbf{(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

Δηλαδή, αν **u = g(x)**, τότε:

$$\mathbf{(f(u))' = f'(u) \cdot u'}$$

Με το συμβολισμό του Leibniz, αν $y = f(u)$ και $u = g(x)$, έχουμε τον τύπο:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

γνωστός ως κανόνας της αλυσίδας.

Πηγή: http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-C105/492/3198,12984/

2.6 Παραγωγισιμότητα και Συνέχεια

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε θα είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.
Προσοχή το αντίστροφο δεν ισχύει. Η συνάρτηση $f(x)=|x|$ είναι συνεχής σε κάθε περιοχή γύρω από το x=0, αλλά δεν έχει παράγωγο στο x=0.

Υπάρχουν συναρτήσεις παντού συνεχείς, αλλά δεν έχουν πουθενά παράγωγο!

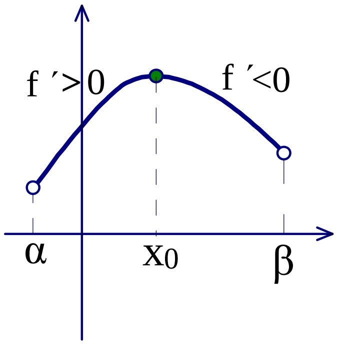
Αν μια συνάρτηση **δεν** είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε **δεν** είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

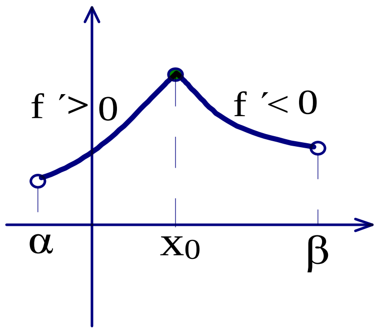
Πηγή: http://eisatopon.blogspot.gr/2011/09/blog-post_25.html

2.7 Κριτήριο πρώτης παραγώγου - Εύρεση τοπικών ακρότατων

Έστω συνάρτηση f **παραγωγίσιμη στο (α,β)** με **εξαίρεση ίσως** ένα σημείο $\mathbf{x_0}$ στο οποίο όμως είναι **συνεχής.**

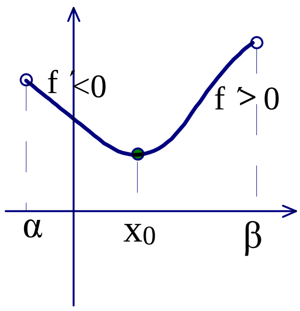
- Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

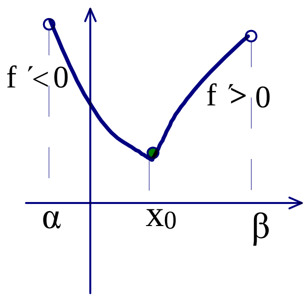




Δηλαδή, αν **f -** στο **(α , x$_0$)** και **f ¯** στο **(x$_0$, β)** τότε η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο **x$_0$**.

- Αν f ΄(x) < 0 στο (α , x$_0$) και f ΄(x) > 0 στο (x$_0$, β) τότε το f(x$_0$) είναι τοπικό ελάχιστο της f. Δηλαδή αν **f ¯** στο **(α , x$_0$)** και **f -** στο **(x$_0$, β)** τότε η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο **x$_0$**.



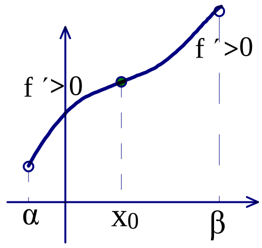


- Αν η f ΄ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x$_0$, τότε το f(x$_0$) είναι τοπικό ακρότατο.

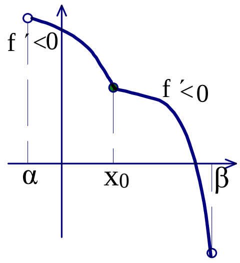
- Αν η f ΄ διατηρεί πρόσημο στο (α , x$_0$) È (x$_0$, β), τότε το f(x$_0$) δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α , β).

Ειδικά:

- Αν **f ΄(x) > 0** στο **(α , x$_0$)** È **(x$_0$, β)** τότε η **f** είναι **γνησίως αύξουσα** στο **(α , β).**
- Αν **f ΄(x) < 0** στο **(α , x$_0$)** È **(x$_0$, β)** τότε η **f** είναι **γνησίως φθίνουσα** στο **(α , β).**



f - (α , x_0) και f - (x_0 , β) τότε f - στο (α , β)



f ¯ (α , x_0) και f ¯ (x_0 , β) τότε f ¯ στο (α , β)

<u>Πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων</u>

Οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ είναι:

- **Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία μηδενίζεται η παράγωγος f ΄**
- **Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται**
- **Τα άκρα του Δ**

Τα εσωτερικά σημεία του Δ που δεν υπάρχει η παράγωγος και τα εσωτερικά σημεία του Δ που μηδενίζεται η παράγωγος, λέγονται **<u>κρίσιμα σημεία της f στο Δ.</u>**

Πηγή: http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-C105/492/3198,12988/

2.8 Το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου

Έστω μία συνάρτηση f , της οποίας η καμπύλη είναι μία παραβολή και η οποία για x= x_0 παρουσιάζει μέγιστο. Τότε για τιμές κοντά στο x_0 , η συνάρτηση είναι αύξουσα για $x \leq x_0$ και φθίνουσα για $x \geq x_0$. Αυτό σημαίνει ότι η f΄ από θετική γίνεται αρνητική , δηλαδή είναι φθίνουσα συνάρτηση . Αφού λοιπόν η f΄είναι φθίνουσα , η παράγωγος της , δηλαδή η f΄΄ θα είναι αρνητική . Επομένως , $f''(x_0)<0$.

Έστω τώρα η συνάρτηση f , της οποίας η καμπύλη είναι μια παραβολή και η οποία για x= x_0 παρουσιάζει ελάχιστο . Τότε , για τιμές του x κοντά στο x_0 , η συνάρτηση είναι φθίνουσα για $x \leq x_0$ και αύξουσα για $x \geq x_0$. Αυτό σημαίνει ότι η f΄ από αρνητική γίνεται θετική , δηλαδή είναι αύξουσα συνάρτηση . Άρα , η παράγωγος της f ΄, δηλαδή η f΄΄ θα είναι θετική . Επομένως , $f''(x_0) > 0$.

Γενικά :

Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) και x_0 ανήκει (α,β) .
Αποδεικνύεται ότι :

Αν ισχύουν $f'(x_0)=0$ και $f''(x_0)<0$, τότε η f παρουσιάζει (τοπικό) μέγιστο στο x= x_0.

Αν ισχύουν $f'(x_0)=0$ και $f''(x_0)>0$, τότε η f παρουσιάζει (τοπικό) ελάχιστο στο $x=x_0$.

Αν επιπλέον το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της f ΄, τότε το $f(x_0)$ είναι ολικό ακρότατο στο (α,β).

Αν για μια συνάρτηση *f* ισχύουν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) = 0$, τότε δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί το κριτήριο της 2ης παραγώγου για τον προσδιορισμό των ακροτάτων της *f*.

Πηγή: http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-C100/493/3202,13009/

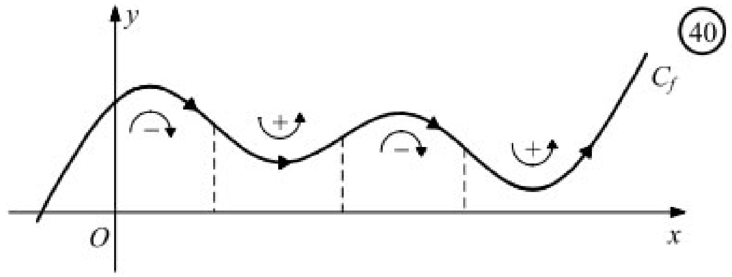
2.9 Κυρτότητα – Σημεία καμπής

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Θα λέμε ότι :

Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα άνω** ή είναι **κυρτή** στο Δ, αν η f ′ είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.

Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα κάτω** ή είναι **κοίλη** στο Δ, αν η f ′ είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.

Εποπτικά, μία συνάρτηση f είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σε ένα διάστημα Δ, όταν ένα κινητό, που κινείται πάνω στη C_f , για να διαγράψει το τόξο που αντιστοιχεί στο διάστημα Δ πρέπει να στραφεί κατά τη θετική (αντιστοίχως αρνητική) φορά.



Αποδεικνύεται ότι, αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σ' ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «κάτω» (αντιστοίχως «πάνω») από τη γραφική της παράσταση με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

Η μελέτη μιας συνάρτησης ως προς τα κοίλα και κυρτά διευκολύνεται με τη βοήθεια του επόμενου θεωρήματος, που είναι άμεση συνέπεια του προηγούμενου ορισμού και του θεωρήματος μονοτονίας.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.

Αν $f'' > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.

Αν $f'' < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κοίλη στο Δ.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 . Αν η f είναι κυρτή στο $(α,x_0)$ και κοίλη στο $(x_0,β)$, ή αντιστρόφως, και η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$, τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f.

Όταν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f , τότε λέμε ότι η **f παρουσιάζει στο x_0 καμπή** και το x_0 λέγεται **θέση σημείου καμπής**. Στα σημεία καμπής η εφαπτομένη της C_f «διαπερνά» την καμπύλη. Αποδεικνύεται, επιπλέον, ότι:

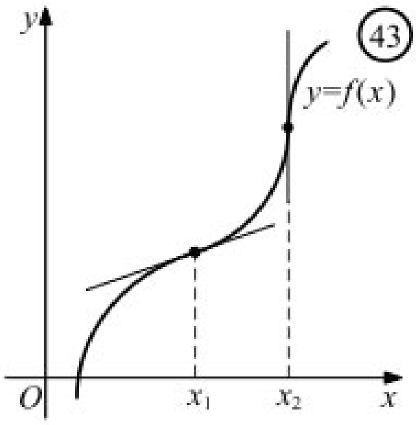
ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) = 0$.

Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, τα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος Δ στα οποία η f'' είναι διαφορετική από το μηδέν δεν είναι θέσεις σημείων καμπής. Επομένως, οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

α. τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται και

β. τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f'' (Σχ. 43).



Γενικά:

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα (α,β) και $x_0 \in (\alpha,\beta)$. Αν η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$, τότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής.

Πηγή: http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-C105/492/3198,12989/

2.10 Κανόνας DE L'HOSPITAL

Ο κανόνας De L' Hospital είναι μία απλή μέθοδος υπολογισμού ορίου της μορφής $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ ή $\frac{\infty}{\infty}$, όταν οι άλλοι γνωστοί τρόποι άρσης της απροσδιοριστίας δεν μπορούν να εφαρμοστούν. Ο κανόνας De L' Hospital αποδίδεται με τα παρακάτω θεωρήματα:

<u>Θεώρημα 1ο</u> (Μορφή $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$)

Αν $\lim\limits_{x\to x0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x0} g(x)=0$ με $\chi_0 \in \cup\{-\infty,+\infty\}$, τότε $\lim\limits_{x\to x0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$,

με την προϋπόθεση να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ - πεπερασμένο ή άπειρο.

<u>Θεώρημα 2ο</u> **(** Μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$)

Αν $\lim\limits_{x\to x0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x0} g(x)=+\infty$ με $\chi_0 \in \cup\{-\infty,+\infty\}$, τότε $\lim\limits_{x\to x0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, με την προϋπόθεση να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ - πεπερασμένο ή άπειρο.

Σχόλιο: Ο κανόνας ισχύει και για τις μορφές: $\frac{+\infty}{-\infty}, \frac{-\infty}{+\infty}, \frac{-\infty}{-\infty}$

Πηγή: http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-C105/492/3198,12990/

2.11 Ασύμπτωτες

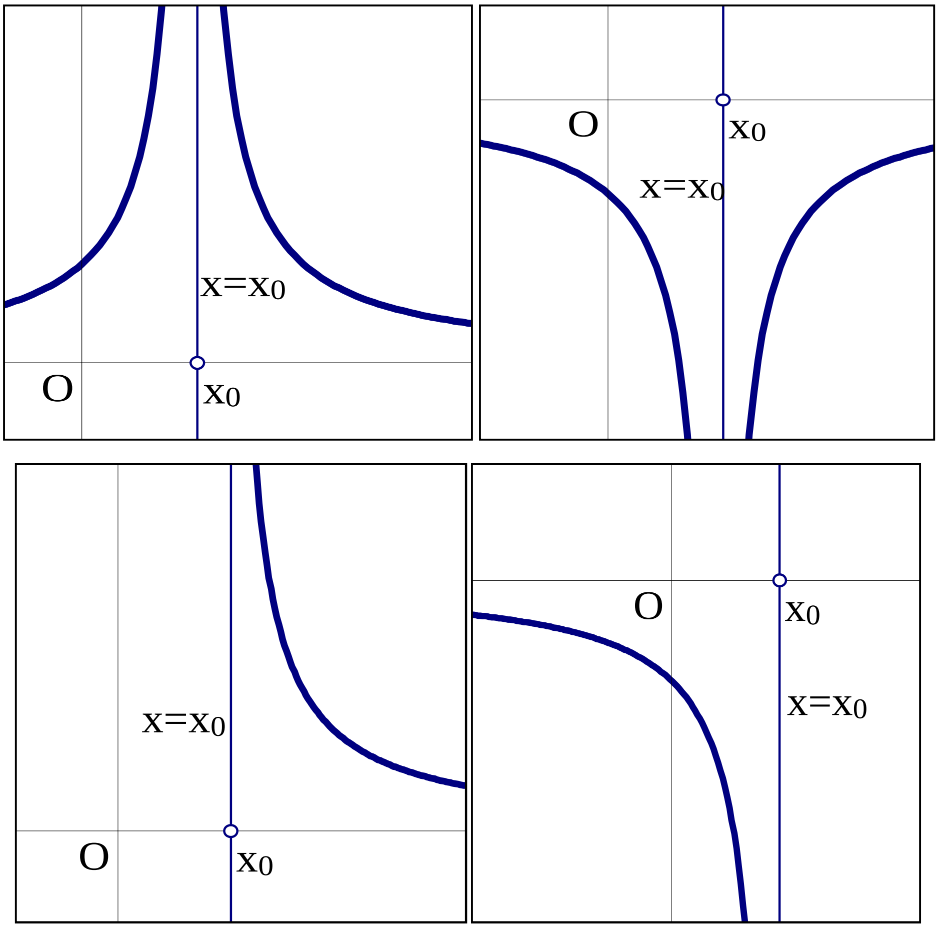
<u>1. Ορισμός κατακόρυφης ασύμπτωτης.</u>

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία **x = x0** λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f.

Η ευθεία **x=x0** λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f**, όταν, $\lim\limits_{x\to x0} f(x)=+\infty$ **ή** $\lim\limits_{x\to x0^+} f(x)=+\infty$ **ή** $\lim\limits_{x\to x0^-} f(x)=+\infty$

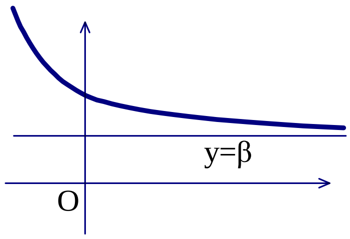
ή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ **ή** $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$ **ή** $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$, δηλαδή ένα από τα όρια της f στο x_0 απειρίζεται.

<u>Παρατήρηση:</u> Το σημείο x_0 πρέπει να είναι **άκρο ανοικτού διαστήματος** του πεδίου ορισμού ή **σημείο ασυνέχειας** του πεδίου ορισμού.

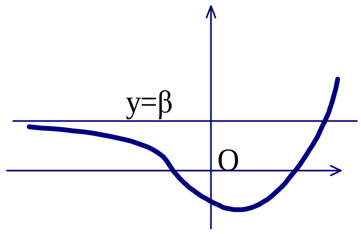


<u>2. Ορισμός οριζόντιας ασύμπτωτης</u>

Η ευθεία **y=β** λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο** $+\infty$, όταν $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \beta$.



Η ευθεία **y=β** λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο** $-\infty$, όταν $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \beta$.



Παρατήρηση: Μία συνάρτηση έχει το πολύ δύο οριζόντιες ασύμπτωτες, μία στο $+\infty$ και μία στο $-\infty$.

3. Ορισμός ασύμπτωτης

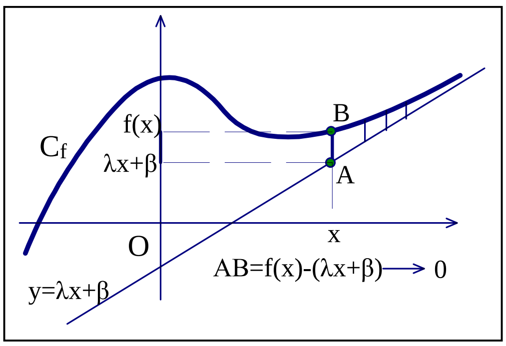
Η ευθεία **y=λx+β** λέγεται **ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο** $+\infty$ όταν, $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$

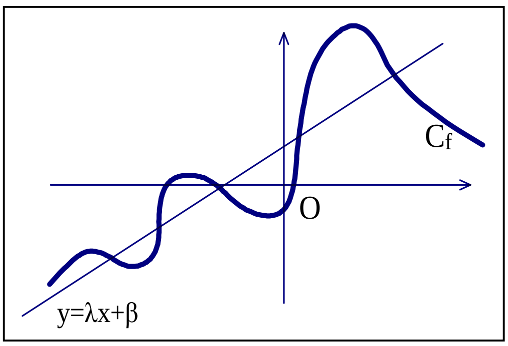
Η ευθεία **y=λx+β** λέγεται **ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο** $-\infty$ όταν, $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$

Ειδικές περιπτώσεις:

Αν **λ=0**, η ασύμπτωτη είναι **οριζόντια (y=β)**

Αν **λ** $\neq$ **0,** η ασύμπτωτη λέγεται **πλάγια ασύμπτωτη.**





Παρατηρήσεις:

Α. Πλάγια και οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ δεν συνυπάρχουν. Όμοια για το $-\infty$.

Β. Είναι δυνατόν η C_f να έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και οριζόντια στο $-\infty$ ή αντίστροφα.

Πηγή: http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-C105/492/3198,12990/

2.12 Το Θεώρημα του Rolle

Δύο από τα πλέον σημαντικά προβλήματα του κλάδου της Ανάλυσης διατυπώνονται στην ουσία τους με τα ερωτήματα:

1. Να βρεθούν οι ακρότατες τιμές, μέγιστα και ελάχιστα, μιας συνάρτησης.
2. Να εντοπιστούν οι ρίζες μιας εξίσωσης.

Οι πρώτες απαντήσεις σε τέτοιου τύπου ερωτήματα-αναζητήσεις δόθηκαν τον 17^{ο} αιώνα από τους μεγάλους Γάλλους μαθηματικούς Pierre Fermat (1601-1665) και Michel Rolle (1652-1719). O Rolle γράφει για πρώτη φορά το 1691 στην "Άλγεβρά" του μία πρόταση, που μας λέει:

«Έστω P(x) = 0 μια πολυωνυμική εξίσωση. Κατασκευάζουμε την εξίσωση P΄(x)= 0, όπου P΄(x) είναι η παράγωγος του P(x). Μεταξύ δύο ριζών της πρώτης εξίσωσης υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της δεύτερης εξίσωσης».

Αυτή είναι η πρώτη διατύπωση του γνωστού μας, σήμερα, ως θεωρήματος του Rolle.

Το θεώρημα του Rolle αναγνωρίστηκε στην ευρύτερη μαθηματική κοινότητα αργότερα, όταν ο J. Lagrange (1736-1813) δημοσίευσε, το 1797, το δικό του θεώρημα, που σήμερα μας είναι γνωστό ως θεώρημα της Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ.) του Διαφορικού Λογισμού (Το θεώρημα του Rolle προκύπτει ως ειδίκευση από το Θ.Μ.Τ. του Lagrange). Στη συνέχεια, το θεώρημα του Rolle αναγνωρίζεται ακόμη περισσότερο όταν ο Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) διατυπώνει και αποδεικνύει το δικό του Θ.Μ.Τ. (Το Θ.Μ.Τ. του Lagrange προκύπτει ως ειδίκευση από το Θ.Μ.Τ. του Cauchy). Κάπου 50 χρόνια νωρίτερα, ο Fermat έγραφε περίπου τα εξής:

«Αν θέλετε να βρείτε τις ακρότατες τιμές μιας πολυωνυμικής συνάρτησης, μην ψάχνετε οπουδήποτε. Ψάξτε μόνον εκεί όπου η παράγωγος του πολυωνύμου μηδενίζεται».

Στο σημείο τούτο αξίζει να υπογραμμίσουμε την ιστορική σύμπτωση των δύο σημαντικών προβλημάτων της Ανάλυσης:

(α) προσδιορισμός των ακροτάτων τιμών μιας συνάρτησης και

(β) εντοπισμός των ριζών μιας εξίσωσης.

Στην πορεία, οι προτάσεις αυτές διατυπώθηκαν με μεγαλύτερη αυστηρότητα και προσδιορίστηκαν οι υποθέσεις έτσι, ώστε να εφαρμόζονται και σε άλλες συναρτήσεις πέραν των πολυωνυμικών.

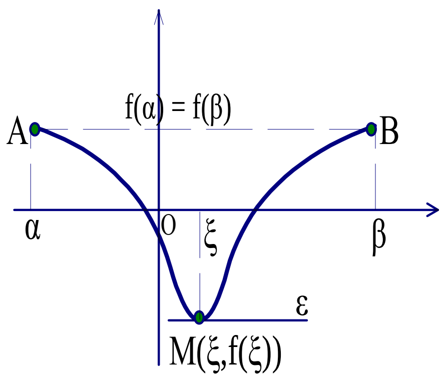
Το Θεώρημα Μέσης Τιμής

Στην Παράγραφο αύτη θα μιλήσουμε για το πλέον βασικό θεώρημα του Διαφορικού Λογισμού το Θεώρημα Μέσης Τιμής. Πριν όμως κάνουμε αυτό θα το διατυπώσουμε στην τελική μορφή του το Θεώρημα του Rolle, το οποίο και είναι μία ειδική περίπτωση του Θεωρήματος της Μέσης Τιμής.

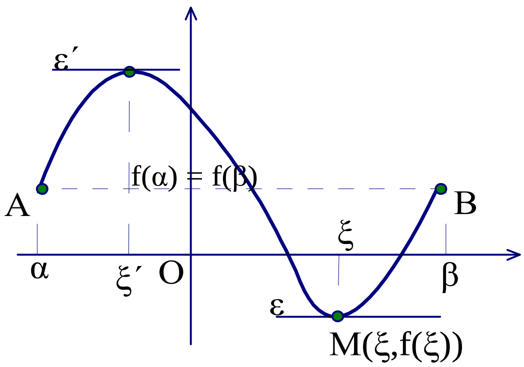
Το Θεώρημα του Rolle

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α, β) και f (α) =f (β), τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ Î (α, β), τέτοιο ώστε: f ′(ξ) = 0.

f ′(ξ) = 0 για κάποιο ξ, α < ξ< β

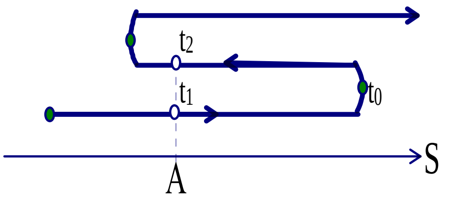


Γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο σημείο ξ Î (α, β) τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στο σημείο x = ξ είναι παράλληλη προς τον άξονα των x .



Φυσική ερμηνεία του θεωρήματος Rolle:

Αν ένα σώμα κινούμενο σε άξονα διέρχεται από το σημείο Α την χρονική στιγμή t_1 και επιστρέφει πάλι στο Α την χρονική στιγμή t_2, τότε υπάρχει χρονική t_0 στιγμή μεταξύ των t_1 , t_2 κατά την οποία η ταχύτητά του μηδενίζεται.



Στην χρονική στιγμή t0 η ταχύτητα μηδενίζεται

Οι υποθέσεις που αναφέρονται στη διατύπωση του Θεωρήματος του Rolle αποτελούν τις ικανές συνθήκες, όχι όμως και τις αναγκαίες για να υπάρχει ξÎ (α, β), με $f\,'(\xi) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι, αν μία ή περισσότερες από τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle δεν ικανοποιούνται, τότε ενδέχεται να υπάρχει ή και να μην υπάρχει ξ, με $f\,'(\xi)= 0$.

Σε καθεμιά από τις τέσσερις παρακάτω περιπτώσεις δίνουμε τη γραφική παράσταση δυο συναρτήσεων για τις οποίες δεν ικανοποιείται κάποια από τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle και, στη μια από τις συναρτήσεις αυτές ικανοποιείται το συμπέρασμα του θεωρήματος του Rolle, ενώ στην άλλη όχι.

Β. Κάποιες (αλγεβρικές) συνέπειες του θεωρήματος του Rolle

1. Μεταξύ δυο ριζών μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης βρίσκεται μια τουλάχιστον ρίζα της παραγώγου.

2. Αν η εξίσωση f’(x)=0 έχει k ακριβώς διαφορετικές ρίζες, τότε η εξίσωση f(x)=0 έχει το πολύ k+1.

3. Ανάμεσα σε δυο διαδοχικές πραγματικές ρίζες της f', η f έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα.

4. Αν ένα πολυώνυμο έχει όλες τις ρίζες του πραγματικές, τότε η παράγωγός του έχει μόνο πραγματικές ρίζες και μάλιστα, αν το πολυώνυμο έχει k διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τότε η παράγωγός του έχει k −1 διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

Το Θ.Μ.Τ. του Lagrange

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο[α, β] και παραγωγίσιμη στο (α,β) , τότε f(β) – f(α) υπάρχει ένα, τουλάχιστον, ξÎ (α, β) τέτοιο, ώστε:

$$f'(x) = \frac{(f(b) - f(a))}{(b - a)}$$

Παρατήρηση: Είναι φανερό ότι με f (α) = f(β) από το Θ.Μ.Τ. του Lagrange προ-κύπτει το θεώρημα του Rolle.

Συνέπειες του Θ.Μ.Τ. του Lagrange

1. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ισχύει, f ′(x) = 0 τότε η f είναι σταθερή σε όλο το Δ. Δηλαδή, τότε, υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε f (x) = c για κάθε xÎ Δ .

2. Αν δυο συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς σε ένα διάστημα Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ισχύει f ′(x) = g’ (x), τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε:
f (x)=g(x) + c για κάθε xÎ Δ .

3. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει f’(x)= f (x) για κάθε x Î R , τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε f (x) =cxe* για κάθε xÎ R .

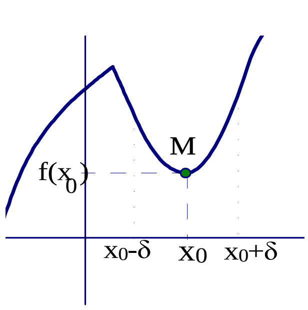
4. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ισχύει f ′(x) > 0, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

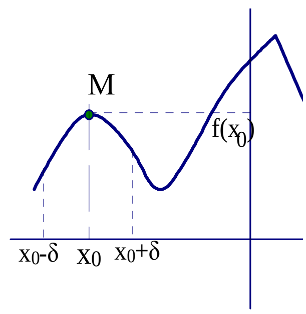
5. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ισχύει , f ′(x) < 0 τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

Πηγή: http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-C105/492/3198,12986/

Το Θεώρημα του Fermat

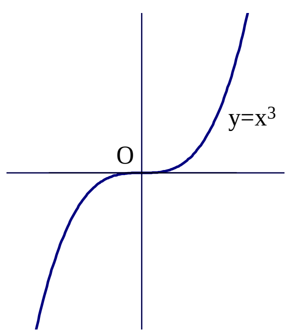
Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ’ ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0) = 0$

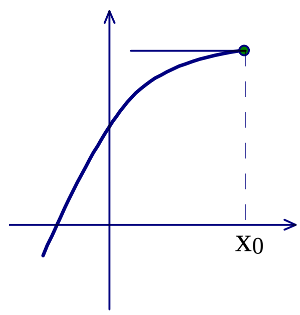




<u>Το αντίστροφο του θεωρήματος Fermat γενικά δεν ισχύει.</u>

Δηλαδή μπορεί να είναι $f\,'(x_0)=0$, αλλά η f να μην έχει ακρότατο στο x_0, π.χ. για την $f(x)=x^3$, είναι $f\,'(0)=0$, αλλά δεν παρουσιάζει ακρότατο στην θέση $x=0$
ή το x_0 να μην είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος Δ.





<u>Πηγή: ΤΑ ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ:</u>
<u>ΤΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ROLLE, ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΚΑΙ ΤΟΥ FERMAT.</u>
<u>ΟΙ ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ του Δημητρίου Α. Ντρίζου</u>

Κεφάλαιο 3 - Εφαρμογές στον τομέα Διοίκησης και Οικονομίας

Αν και η μεταβολή οποιουδήποτε μεγέθους ενός οικονομικού αγαθού Α εξαρτάται από πολλούς μεταβλητούς παράγοντες, συνήθως περιοριζόμαστε στην εξάρτηση του μεγέθους από ένα μόνο παράγοντα, υποθέτοντας ότι όλοι οι άλλοι έχουν γνωστές και σταθερές τιμές. Έτσι π.χ. ενώ η ζητούμενη από τους καταναλωτές ποσότητα ενός αγαθού Α εξαρτάται από την τιμή του, τον αριθμό καταναλωτών, το εισόδημα των καταναλωτών, τις τιμές των ομοειδών προϊόντων κ.λπ., συνήθως περιοριζόμαστε στην εξάρτηση της ζητούμενης ποσότητας του αγαθού μόνο από την τιμή του Α.

Η εξάρτηση ενός μεγέθους από ένα παράγοντα περιγράφεται με πραγματική συνάρτηση μιας μεταβλητής. Επειδή οι τιμές των μεγεθών των οικονομικών αγαθών είναι συνήθως θετικές, μια τέτοια συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο του R^+ και γραφική παράσταση μέσα στη γωνία των θετικών ημιαξόνων του συστήματος αναφοράς μας.

Για να αναγνωρίζουμε εύκολα και γρήγορα τα διάφορα μεγέθη ενός οικονομικού αγαθού Α, χρησιμοποιούμε για καθένα απ’ αυτά ορισμένο γράμμα. Έτσι, σε όλα τα επόμενα, θα σημειώνουμε:

-με p την τιμή του

-με q την ποσότητα του

-με C το κόστος του

-με R την πρόσοδό του

-με K το κέρδος του

<u>*Πηγή: Μαθηματικά-Θέματα για την Οικονομία και τη Διοίκηση Επιχειρήσεων, Παπαμιχαήλ Δημήτριος, Εκδόσεις Α. Σταμούλης Αθήνα-Πειραιάς 1995, Κεφάλαιο 5ο, σελ.135*</u>

3.1 Συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς

Οι καμπύλες ζήτησης και προσφοράς είναι αναγκαίες για να προσδιορίσουν την τιμή στην αγορά. Η εξομοίωσή τους καθορίζει την τιμή και τη ποσότητα ισορροπίας, δηλαδή την τιμή όπου οι αγοραστές και οι πουλητές του προϊόντος ή της υπηρεσίας αγοράζουν και πουλούν την ποσότητα που μεγιστοποιεί την χρησιμότητα μεν των καταναλωτών, τα κέρδη δ των παραγωγών. Άπαξ και βρεθεί το σημείο ισορροπίας δεν υπάρχει λόγος να μετατοπιστούμε από αυτό εκτός εάν επέλθουν σημαντικές αλλαγές σε μια από τις μεταβλητές που επηρεάζουν είτε τη ζήτηση είτε τη προσφορά.

Θεωρούμε πάντα ένα οικονομικό μέγεθος Α και υποθέτουμε ότι τόσο η ζητούμενη από τους καταναλωτές ποσότητά του όσο και η προσφερόμενη από τους παραγωγούς ποσότητά του εξαρτώνται μόνο από την τιμή του p. Με την προϋπόθεση αυτή μπορούμε να ορίσουμε δύο βασικές συναρτήσεις:

Α. τη συνάρτηση ζήτησης, που δίνει τη ζητούμενη από τους καταναλωτές ποσότητα q για κάθε τιμή p. Αυτή θα σημειώνεται με D, δηλαδή ο τύπος της θα έχει τη μορφή $q = D(p)$ και είναι γενικά φθίνουσα, αφού όταν αυξάνει η τιμή του αγαθού μειώνεται η ζήτησή του. Το πεδίο ορισμού της D είναι το διάστημα μέσα στο οποίο πρέπει να κινείται η τιμή του αγαθού για να υπάρχει ζήτηση του αγαθού αυτού.
Β. τη συνάρτηση προσφοράς, που δίνει την προσφερόμενη από τους παραγωγούς ποσότητα q για κάθε τιμή p. Αυτή θα σημειώνεται με S, δηλαδή ο τύπος της θα έχει τη μορφή $q = S(p)$ και είναι γενικά αύξουσα, αφού όταν αυξάνει η τιμή του αγαθού αυξάνει και η προσφορά του. Το πεδίο ορισμού της S είναι το διάστημα μέσα στο οποίο πρέπει να κινείται η τιμή του αγαθού για να υπάρχει προσφορά του αγαθού αυτού.
Οι συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς βρίσκονται συνήθως πειραματικά. Δηλαδή, για καθεμιά από τις συναρτήσεις αυτές ξέρουμε (από παρατηρήσεις ή μετρήσεις) ν ζεύγη αντίστοιχων τιμών $(p_i, q_i) = 1,2,....,\nu$ με $\nu \geq 3$ και βρίσκουμε (με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων) την εξίσωση μιας καμπύλης που διέρχεται πολύ κοντά από τα ν σημεία $M_i(p_i, q_i)$ ενός επιπέδου.
Πηγή: Μαθηματικά-Θέματα για την Οικονομία και τη Διοίκηση Επιχειρήσεων, Παπαμιχαήλ Δημήτριος, Εκδόσεις Α. Σταμούλης Αθήνα-Πειραιάς 1995, Κεφάλαιο 5ο, σελ.135-136

Καμπύλες ζήτησης και προσφοράς

Ο Νόμος της Ζήτησης μας λέει ότι η καμπύλη ζήτησης έχει αρνητική κλίση. Ο νόμος της ζήτησης ισχύει για 2 λόγους:
α) Επίδραση ή αποτέλεσμα υποκατάστασης και

β) Επίδραση ή αποτέλεσμα εισοδήματος

Το οριζόντιο άθροισμα των ατομικών καμπυλών ζήτησης μας δίνει την συνολική καμπύλη ζήτησης.

Παράγοντες που μετακινούν την καμπύλη ζήτησης:

- Εισόδημα καταναλωτών
- Τιμές σχετικών προϊόντων
- Διαφήμιση
- Καταναλωτικές προτιμήσεις
- Πληθυσμός
- Προσδοκίες καταναλωτών

Ο Νόμος της Προσφοράς μας λέει ότι η καμπύλη προσφοράς έχει θετική κλίση. Η συνολική ή αγοραία προσφορά για ένα αγαθό προκύπτει ως το οριζόντιο άθροισμα όλων των ατομικών καμπυλών προσφοράς για αυτό το αγαθό.

Παράγοντες που μετακινούν την καμπύλη προσφοράς:

- Τιμές εισροών
- Τεχνολογία και κυβερνητικές πολιτικές
- Αριθμός επιχειρήσεων
- Υποκατάστατα στην παραγωγή
- Φορολογία, επιδοτήσεις
- Φυσικοί παράγοντες

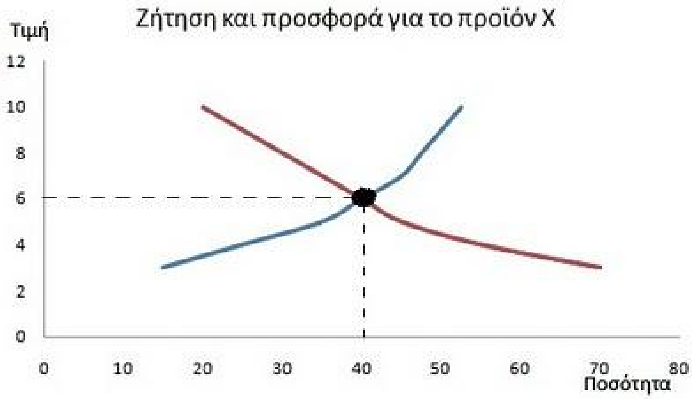
3.2 Σημείο ισορροπίας

Μπορούμε να ζητήσουμε την τιμή p_0 ενός αγαθού Χ για την οποία οι αντίστοιχες ποσότητες ζήτησης και προσφοράς του είναι ίσες. Η τιμή αυτή λέγεται τιμή ισορροπίας του αγαθού και θα είναι ρίζα της εξίσωσης ισορροπίας.

$$D(p) = S(p)$$

Αν p_0 είναι η τιμή ισορροπίας, θα έχουμε $D(p_0) = S(p_0)$ και η κοινή ποσότητα προσφοράς και ζήτησης $q_0 = D(p_0)$ λέγεται ποσότητα ισορροπίας, ενώ το σημείο $I(p_0, q_0)$, που είναι τομή των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων D και S, λέγεται σημείο ισορροπίας του αγαθού. Ευνόητο είναι ότι σημείο ισορροπίας του αγαθού υπάρχει μόνο όταν υπάρχει τιμή ισορροπίας, δηλαδή όταν η εξίσωση $D(p) = S(p)$ όχι μόνο έχει ρίζα, αλλά η ρίζα αυτή είναι κοινό σημείο των πεδίων ορισμού των δύο συναρτήσεων D και S.

Πηγή: Μαθηματικά-Θέματα για την Οικονομία και τη Διοίκηση Επιχειρήσεων, Παπαμιχαήλ Δημήτριος, Εκδόσεις Α. Σταμούλης Αθήνα-Πειραιάς 1995, Κεφάλαιο 5^o, σελ.137



Σε πολλές περιπτώσεις τα συστήματα αξόνων, που περιέχουν γραφικές παραστάσεις οικονομικών συναρτήσεων ενός αγαθού, έχουν στον άξονα τετμημένων την ποσότητα q του αγαθού. Σε μια τέτοια περίπτωση οι συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς δίνονται με τύπους της μορφής:

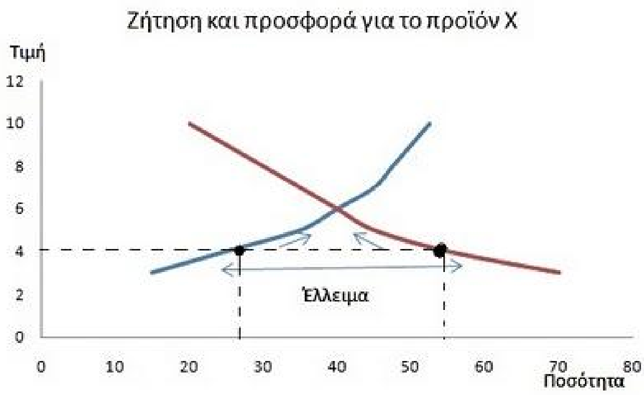
$$p = D^*(q), \quad p = S^*(q)$$

Τύπους στους οποίους η τιμή p του αγαθού φαίνεται σαν εξαρτημένη μεταβλητή από την ποσότητα q. Οι τύποι αυτοί ορίζουν τις αντίστροφες συναρτήσεις των D και S και προκύπτουν συνήθως από τη λύση ως προς p των τύπων $q = D(p)$ και $q = S(p)$ αντιστοίχως. Υπενθυμίζεται ότι οι συναρτήσεις D^* και S^* έχουν πεδία ορισμού τα σύνολα τιμών των D και S.

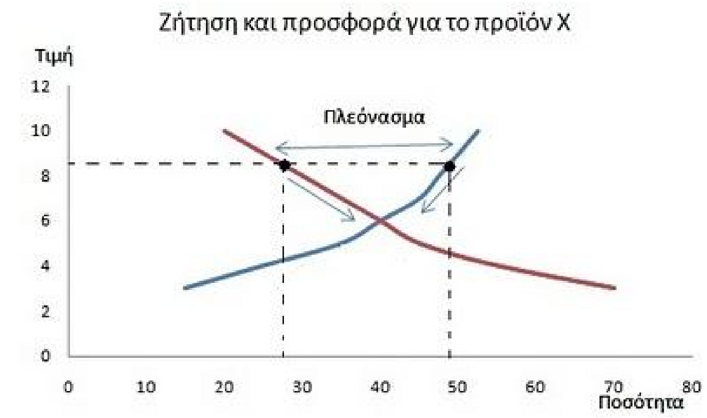
Έλλειμα και Πλεόνασμα

Αν όμως η τιμή p του προϊόντος στην αγορά είναι τέτοια ώστε η ποσότητα q που οι αγοραστές επιθυμούν να αγοράσουν είναι μεγαλύτερη από εκείνην που προσφέρουν οι πωλητές στην τιμή αυτή, τότε ορισμένοι αγοραστές θα μείνουν ανικανοποίητοι, δηλαδή δε θα βρουν να αγοράσουν τις ποσότητες που επιθυμούν, θα υπάρξει έλλειμα στην αγορά.

Η ύπαρξη ανικανοποίητων αγοραστών θα δημιουργήσει αυξητικές πιέσεις στην τιμή καθώς αυτοί θα προσφέρουν περισσότερο προκειμένου να αποκτήσουν τις ποσότητες που επιθυμούν.



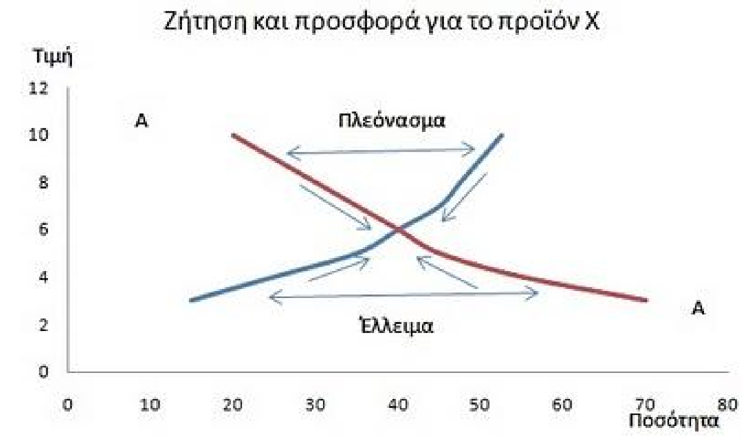
Αντίθετα, αν η ποσότητα που οι πωλητές προσφέρουν σε ορισμένη τιμή είναι μεγαλύτερη από εκείνη που οι αγοραστές επιθυμούν να αποκτήσουν στην τιμή αυτή, ορισμένοι πωλητές που θα μένουν με ανεπιθύμητα αποθέματα θα αρχίσουν να μειώνουν την τιμή προκειμένου να τα διαθέσουν. Έτσι θα υπάρξει μειωτική πίεση στην τιμή.



Ο προσδιορισμός της τιμής ενός προϊόντος Χ φαίνεται καλύτερα με ένα υποθετικό αριθμητικό παράδειγμα για τη ζήτηση και την προσφορά:

Όπως φαίνεται, όταν η τιμή είναι 10€ η ζητούμενη ποσότητα είναι 20 χιλιάδες τόνοι και η προσφερόμενη 52,5 χιλιάδες τόνοι. Υπάρχει επομένως πλεόνασμα 32,5 χιλιάδων τόνων, το οποίο οι πωλητές θα προσπαθήσουν να διαθέσουν μειώνοντας την τιμή. Αν μειωθεί η τιμή στα 9 ευρώ θα υπάρξει και πάλι πλεόνασμα και τάση περαιτέρω πτώσης της.

Η πτώση αυτή θα συνεχισθεί μέχρι να πέσει η τιμή στα 6€ τον τόνο, οπότε ζητούμενη και προσφερόμενη ποσότητα εξισώνονται και δε θα υπάρξει άλλη τάση για αλλαγή της τιμής. Για το λόγο αυτό η τιμή αυτή θεωρείται ως τιμή ισορροπίας (equilibrium price) διότι εξασφαλίζει ισορροπία στην αγορά, δηλαδή ισορροπία μεταξύ της προσφοράς και της ζήτησης.



Το σημείο ισορροπίας μπορεί να μεταβληθεί από αλλαγές στην τεχνολογία ή στο κόστος των επιχειρήσεων. Η εξέλιξη της τεχνολογίας ή η μείωση του κόστους θα έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση της προσφοράς σε κάθε επίπεδο τιμών, μειώνοντας έτσι την τιμή ισορροπίας. Από την άλλη πλευρά, η μείωση της χρήσης τεχνολογίας ή η αύξηση του κόστους παραγωγής των επιχειρήσεων θα μειώσει την ποσότητα που παρέχεται σε κάθε επίπεδο τιμών, αυξάνοντας έτσι την τιμή ισορροπίας.

Πηγή: http://www.euretirio.com/2011/04/simeio-isorropias.html

3.3 Ελαστικότητες ζήτησης και προσφοράς

Η **ελαστικότητα της ζήτησης** ως προς την τιμή μετρά το βαθμό στον οποίο η ζητούμενη ποσότητα ανταποκρίθηκε στη μεταβολή της τιμής. Ο βαθμός αυτός εξαρτάται από διάφορους προσδιοριστικούς παράγοντες.
Σύμφωνα με το νόμο της ζήτησης, όταν αυξάνεται ή μειώνεται η τιμή ενός προϊόντος μειώνεται ή αυξάνεται αντίστοιχα η ποσότητα που ζητείται.
Η ελαστικότητα της συνάρτησης ζήτησης $q = D(p)$ είναι:

$$e = \frac{p}{q} \cdot D'(p)$$

Επειδή τα p, q είναι πάντα θετικοί αριθμοί και η παράγωγος $D'(p)$ είναι πάντα αρνητικός αριθμός (αφού η συνάρτηση D είναι φθίνουσα), συμπεραίνουμε ότι η ελαστικότητα της ζήτησης είναι πάντα αρνητικός αριθμός. Αυτό σημαίνει ότι και σε σχετική αύξηση της τιμής p του αγαθού έχουμε πάντα και σχετική μείωση της ζητούμενης ποσότητας q.

Η συνάρτηση ζήτησης ενός αγαθού X μπορεί να θεωρηθεί συνάρτηση δύο (ανεξάρτητων) μεταβλητών p_1 και p_2, δηλαδή συνάρτηση με τύπο της μορφής $q = D(p_1, p_2)$

Όπου το p_1 παριστάνει την τιμή του ίδιου του αγαθού X (και άρα η συνάρτηση D είναι φθίνουσα ως προς p_1) και το p_2 παριστάνει την τιμή ενός άλλου συγγενικού αγαθού B. Σε μια τέτοια περίπτωση έχουμε μερικές παραγώγους της συνάρτησης D ως προς p_1 και ως προς p_2 και με αυτές ορίζουμε μερικές ελαστικότητες της συνάρτησης ζήτησης D ως προς p_1 και ως προς p_2. Ειδικότερα, ονομάζουμε:

- Μερική ελαστικότητα της συνάρτησης D ως προς p_1 τον αριθμό $e_1 = \frac{p_1}{q} \cdot D'_{p_1}(p_1, p_2)$
- Μερική ελαστικότητα της συνάρτησης D ως προς p_2 τον αριθμό $e_2 = \frac{p_2}{q} \cdot D'_{p_2}(p_1, p_2)$

Πηγή: Μαθηματικά-Θέματα για την Οικονομία και τη Διοίκηση Επιχειρήσεων, Παπαμιχαήλ Δημήτριος, Εκδόσεις Α. Σταμούλης Αθήνα-Πειραιάς 1995, Κεφάλαιο 5^o, σελ.140-142

Η **ελαστικότητα της προσφοράς** ενός προϊόντος δείχνει το βαθμό ανταπόκρισης της προσφερόμενης ποσότητας στις μεταβολές της τιμής του.

Η προσφορά ενός αγαθού λέγεται ότι είναι:

- ελαστική, αν η προσφερόμενη ποσότητα ανταποκρίνεται έντονα στις μεταβολές της τιμής
- ανελαστική, αν η ανταπόκριση της προσφερόμενης ποσότητας στις μεταβολές της τιμής είναι ελάχιστη

Η ελαστικότητα της προσφοράς ως προς την τιμή εξαρτάται από την ευκολία με την οποία οι πωλητές μπορούν να μεταβάλουν την προσφορά τους.

Η ελαστικότητα της συνάρτησης προσφοράς $q = S(p)$ είναι:

$$e = \frac{p}{q} \cdot S'(p)$$

Επειδή τα p και q είναι πάντα θετικοί αριθμοί και η παράγωγος $S'(p)$ είναι πάντα θετικός αριθμός (αφού η συνάρτηση S είναι αύξουσα), συμπεραίνουμε ότι η ελαστικότητα της προσφοράς είναι πάντα θετικός αριθμός. Αυτό σημαίνει ότι σε σχετική αύξηση της τιμής p του αγαθού έχουμε πάντα και σχετική αύξηση της προσφερόμενης ποσότητας του q.

Πηγή: Μαθηματικά-Θέματα για την Οικονομία και τη Διοίκηση Επιχειρήσεων, Παπαμιχαήλ Δημήτριος, Εκδόσεις Α. Σταμούλης Αθήνα-Πειραιάς 1995, Κεφάλαιο 5^o, σελ.142

Ανάλογα με την ποσοστιαία μεταβολή της ποσότητας και της τιμής, η προσφορά μπορεί να είναι:

1) Ελαστική, αν η ποσοστιαία μεταβολή της ποσότητας είναι μεγαλύτερη από την ποσοστιαία μεταβολή της τιμής, οπότε και η απόλυτη τιμή του συντελεστή ελαστικότητας είναι μεγαλύτερη από τη μονάδα.

2) Ανελαστική αν, αντίθετα, η ποσοστιαία μεταβολή της ποσότητας είναι μικρότερη από την ποσοστιαία μεταβολή της τιμής, οπότε η απόλυτη τιμή του συντελεστή είναι μικρότερη από τη μονάδα.

3) Μοναδιαίας ελαστικότητας αν η απόλυτη τιμή του συντελεστή είναι ίση με τη μονάδα, που σημαίνει ότι ποσότητα και τιμή μεταβάλλονται κατά το ίδιο ποσοστό.

4) Πλήρως ανελαστική αν ο συντελεστής ελαστικότητας ισούται με μηδέν, οπότε μια ορισμένη μεταβολή της τιμής δεν επιφέρει καμία μεταβολή στη προσφερόμενη ποσότητα. Τότε η καμπύλη προσφοράς θα είναι κατακόρυφη προς τον οριζόντιο άξονα.

5) Απείρως ελαστική αν η απόλυτη τιμή του συντελεστή ελαστικότητας τείνει προς το άπειρο και η καμπύλη προσφοράς είναι παράλληλη προς τον οριζόντιο άξονα.

Πηγή: http://www.euretirio.com/2010/06/elastikotita-prosforas.html

3.4 Συνάρτηση προσόδου

Αν p είναι η τιμή της μονάδας ενός αγαθού, το γινόμενο $p \rangle q$ παριστάνει τη συνολική αξία ποσότητας q μονάδων του αγαθού και λέγεται **ολική πρόσοδος** του αγαθού. Η ολική πρόσοδος σημειώνεται με το γράμμα R, δηλαδή είναι:

$$R = p \rangle q$$

και παριστάνει το συνολικό ποσό που εισπράττουν οι παραγωγοί (ή το συνολικό ποσό που πληρώνουν οι καταναλωτές) για ποσότητα q μονάδων του αγαθού. Επειδή η ποσότητα q του αγαθού, που έχει διατεθεί στην τιμή p, δίνεται από τη συνάρτηση ζήτησης $q = D(p)$, καταλαβαίνουμε ότι η ολική πρόσοδος μπορεί να θεωρηθεί ή συνάρτηση μόνο της τιμής p (αν αντικαταστήσουμε στην $R = p \rangle q$ το q από τον τύπο $q = D(p)$), ή συνάρτηση μόνο της ποσότητας q (αν αντικαταστήσουμε το p από τον τύπο $p = D^{*}(q)$ της αντίστροφης συνάρτησης της D). Πάντως, σε κάθε περίπτωση η συνάρτηση αυτή λέγεται και **συνάρτηση ολικών εσόδων**.

Σημειώνεται ότι η ολική πρόσοδος, όταν θεωρείται συνάρτηση ή της τιμής p ή της ποσότητας q, δεν είναι γενικά μονότονη συνάρτηση (αφού όταν αυξάνεται η τιμή p του αγαθού μειώνεται η ποσότητα ζήτησης q).

Παράδειγμα:

Αν η συνάρτηση ζήτησης ενός αγαθού είναι $q = -2p + 8$, να βρεθεί η τιμή του για την οποία έχομε την πιο μεγάλη πρόσοδο.

Διακρίνουμε εύκολα ότι η συνάρτηση ζήτησης έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[0,4]$, το οποίο θα έχει και η ολική πρόσοδος $R = p \times q = -2p^2 + 8p$

Επειδή είναι $R' = -4p + 8$ και $R'' = -4$, καταλαβαίνουμε ότι η ολική πρόσοδος παίρνει την πιο μεγάλη τιμή της για p=2 και η πιο μεγάλη αυτή τιμή της είναι R=8.

Η ολική πρόσοδος R ενός αγαθού θεωρείται συνήθως συνάρτηση της ποσότητας q του αγαθού. Για να βρούμε τον τύπο $R = F(q)$ της συνάρτησης αυτής, αντικαθιστούμε στην ισότητα $R = p \cdot q$ την τιμή p από τον τύπο $p = D^*(q)$, της αντίστροφης συνάρτησης της συνάρτησης ζήτησης D, οπότε είναι:

$$R = q \times D^*(q)$$

Ειδικότερα ονομάζουμε **μέση πρόσοδο**, τον λόγο R : q ο οποίος θα σημειώνεται με $\bar{R}$, δηλαδή είναι:

$$\bar{R} = \frac{R}{q} = \frac{F(q)}{q}$$

Είναι φανερό ότι η μέση πρόσοδος είναι επίσης συνάρτηση της ποσότητας q και μάλιστα παριστάνει την τιμή μονάδας του αγαθού για ποσότητα q (αφού είναι $R = p \times q = \bar{R} \times q$).

Ειδικότερα ονομάζουμε **οριακή πρόσοδο**, την παράγωγο της συνάρτησης $R = F(q)$ η οποία θα σημειώνεται με R_0, δηλαδή είναι:

$$R_0 = F'(q)$$

Καταλαβαίνουμε ότι η οριακή πρόσοδος, που είναι επίσης συνάρτηση της ποσότητας q, εκφράζει την τάση μεταβολής της ολικής προσόδου στην ποσότητα q. Επειδή είναι

$$R_0 = F^{'}(q) \approx \frac{\Delta R}{\Delta q},$$

η οριακή πρόσοδος λαμβάνεται πολλές φορές στην πράξη ίση με τη μεταβολή της ολικής προσόδου, όταν η ποσότητα q αυξάνει κατά 1 μονάδα.

Πηγή: Μαθηματικά-Θέματα για την Οικονομία και τη Διοίκηση Επιχειρήσεων, Παπαμιχαήλ Δημήτριος, Εκδόσεις Α. Σταμούλης Αθήνα-Πειραιάς 1995, Κεφάλαιο 5^{o}, σελ.147-149

3.5 Συνάρτηση κόστους

Συνολικό κόστος της επιχείρησης που παράγει ένα προϊόν είναι όλα τα έξοδα που κάνει η επιχείρηση για την παραγωγή του. Στο συνολικό κόστος συμπεριλαμβάνονται όλες οι δαπάνες για την πληρωμή των παραγωγικών συντελεστών που μετέχουν στην παραγωγή, ακόμη και εκείνων που ανήκουν στην επιχείρηση ή στον επιχειρηματία.

Η συνολική δαπάνη για την παραγωγή q μονάδων ενός αγαθού λέγεται **ολικό κόστος** και θα σημειώνεται με το γράμμα C. Έτσι, το ολικό κόστος είναι συνάρτηση της ποσότητας q και μάλιστα αύξουσα, αφού όταν αυξάνουν οι μονάδες παραγωγής αυξάνει και το ολικό κόστος τους. Στον τύπο

$$C = \Phi(q)$$

της συνάρτησης αυτής τα q και C παίρνουν μόνο θετικές τιμές.

Η τιμή της συνάρτησης Φ για q=0, δηλαδή η τιμή Φ(0), που είναι ίση με το σταθερό όρο του δεύτερου μέλους της $C = \Phi(q)$, παριστάνει το μέρος του ολικού κόστους που δεν εξαρτάται από την ποσότητα παραγωγής q. Το μέρος αυτό του ολικού κόστους λέγεται **σταθερό κόστος** και θα σημειώνεται με C_s , ενώ το υπόλοιπο μέρος του ολικού κόστους λέγεται **μεταβλητό κόστος** και θα σημειώνεται με C_m. Έχουμε λοιπόν πάντα:

$$C = C_s + C_m$$

Σημειώνεται ότι το μεταβλητό κόστος είναι γνωστό μόνο όταν ξέρουμε τη συνάρτηση ολικού κόστος, ενώ το σταθερό κόστος είναι συνήθως γνωστό από τα δεδομένα της παραγωγής.

Ο λόγος C : q λέγεται **μέσο κόστος** για την ποσότητα q και θα σημειώνεται με $\bar{C}$, δηλαδή είναι:

$$\bar{C} = \frac{C}{q} = \frac{F(q)}{q}$$

Είναι φανερό ότι το μέσο κόστος $\bar{C}$ είναι επίσης συνάρτηση της ποσότητας q, η οποία δεν είναι απαραίτητα μονότονη.

Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της $C = C_s + C_m$ με q και θέσουμε $\frac{C_m}{q} = \bar{C}_m$ και $\frac{C_s}{q} = \bar{C}_s$, βρίσκουμε:

$$\bar{C} = \bar{C}_m + \bar{C}_s$$

Ο αριθμός $\bar{C}_m = \frac{C_m}{q}$ λέγεται **μέσο μεταβλητό κόστος**, ενώ ο αριθμός $\bar{C}_s = \frac{C_s}{q}$ λέγεται **μέσο σταθερό κόστος** και η $\bar{C} = \bar{C}_m + \bar{C}_s$ εκφράζει ότι το μέσο κόστος είναι επίσης ίσο με το άθροισμα του μέσου μεταβλητού κόστους και του μέσου σταθερού κόστους. Επειδή το σταθερό κόστος είναι γνωστό (από τα δεδομένα της παραγωγής), το μέσο σταθερό κόστος για ποσότητα q θα είναι επίσης γνωστό, ενώ το μέσο μεταβλητό κόστος είναι γνωστό μόνο όταν ξέρουμε τη συνάρτηση του ολικού κόστους.

Η παράγωγος της συνάρτησης ολικού κόστους λέγεται **οριακό κόστος** και θα σημειώνεται με C_0, δηλαδή είναι:

$$C_0 = F'(q)$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι το οριακό κόστος, που είναι επίσης συνάρτηση της ποσότητας q, εκφράζει την τάση μεταβολής του ολικού κόστους στην ποσότητα q. Επειδή είναι

$C_0 = F'(q) \approx \dfrac{\Delta F}{\Delta q}$, το οριακό κόστος λαμβάνεται πολλές φορές στην πράξη ίσο με τη μεταβολή του ολικού κόστους, όταν η ποσότητα αυξάνει κατά 1 μονάδα.

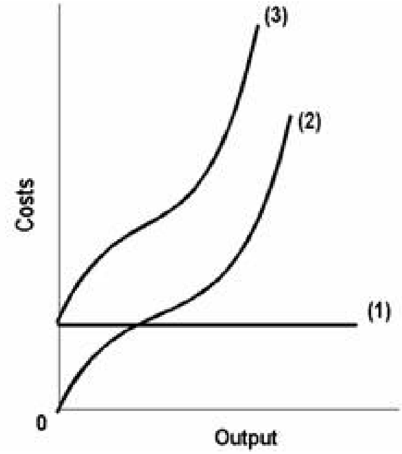
Πηγή: Μαθηματικά-Θέματα για την Οικονομία και τη Διοίκηση Επιχειρήσεων, Παπαμιχαήλ Δημήτριος, Εκδόσεις Α. Σταμούλης Αθήνα-Πειραιάς 1995, Κεφάλαιο 5^{ο}, σελ.149-151

Καμπύλες Κόστους στη Βραχυχρόνια Περίοδο

Καμπύλη Σταθερού Κόστος (1): Μία ευθεία γραμμή (μιας και δεν εξαρτάται από την παραγόμενη ποσότητα Q – Το σταθερό κόστος FC επιβαρύνει την επιχείρηση ακόμα και όταν Q=0).

Καμπύλη Μεταβλητού Κόστους (2): Ξεκινά από την αρχή των αξόνων και ανέρχεται, καθώς αυξάνεται η ποσότητα του προϊόντος.

Καμπύλη Συνολικού Κόστους (3): Το κάθετο άθροισμα (κοινώς προσθέτουμε το κόστος) των καμπυλών του Σταθερού και του Μεταβλητού κόστους.



Α. Μέσο Κόστος

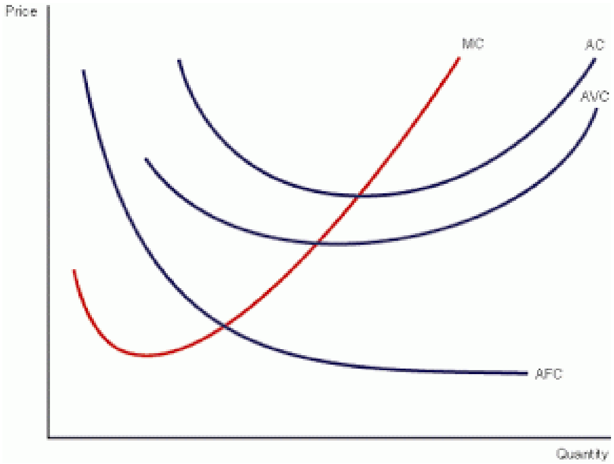
Αντίστοιχα λοιπόν έχουμε:

Μέσο Μεταβλητό Κόστος (Average Variable Cost): **AVC=VC/Q**
Μέσο Σταθερό Κόστος (Average Fixed Cost): **AFC=FC/Q**
Μέσο Συνολικό Κόστος (Average Cost): **ATC=TC/Q**

Προφανώς λοιπόν: **ATC=AFC+AVC**

Καμπύλη Μέσου Σταθερού Κόστους: Το Μέσο Σταθερό Κόστος μειώνεται συνεχώς όσο αυξάνεται η παραγωγή (αφού η ίδια δαπάνη επιμερίζεται σε περισσότερες μονάδες προϊόντος).
Καμπύλη Μέσου Μεταβλητού Κόστους: Στην αρχή μειώνεται και στη συνέχεια αυξάνεται. Αυτό οφείλεται στο Νόμο της Φθίνουσας ή μη ανάλογης απόδοσης.

Καμπύλη Μέσου Συνολικού Κόστους: Στην αρχή επηρεάζεται κυρίως από το μέσο σταθερό κόστος, όμως καθώς η παραγωγή αυξάνεται επηρεάζεται κυρίως από το μέσο μεταβλητό κόστος και ακολουθεί την ίδια ανοδική πορεία με αυτό.



Οι καμπύλες του AVC και ATC στη βραχυχρόνια περίοδο έχουν το σχήμα του λατινικού γράμματος U, ως συνέπεια του νόμου της φθίνουσας απόδοσης.

Β. Οριακό Κόστος

Το Οριακό Κόστος (Marginal Cost - MC) **δείχνει το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται το συνολικό κόστος (ή το μεταβλητό κόστος), όταν μεταβάλλεται η παραγωγή κατά μία μονάδα.**

$$MC=\Delta(TC)/\Delta Q$$

ή

$$MC=\Delta(VC)/\Delta Q$$

Καμπύλη Οριακού Κόστους: Αρχικά κατέρχεται, φτάνει σε ένα κατώτατο σημείο και στη συνέχεια ανέρχεται. (πάλι λόγω του Νόμου της Φθίνουσας Απόδοσης).

Το **MC είναι σημαντικό μέγεθος για μια επιχείρηση**, γιατί η απόφαση της επιχείρησης για αύξηση της παραγωγής της κατά μία μονάδα θα πρέπει να γίνει έπειτα από σύγκριση του κόστους αυτής της μονάδας (που είναι το Οριακό Κόστος), με το έσοδο από την πώληση αυτής της μονάδας.

Το **MC μεταβάλλεται ως μέγεθος πιο έντονα από το AVC** γιατί δεν επηρεάζεται από τις προηγούμενες μεταβολές του κόστους παραγωγής αλλά μόνο από την αύξηση του κόστους από την τελευταία μονάδα προϊόντος.

Πηγή: http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-C117/130/944,3458/

Ελαστικότητα κόστους

Η ελαστικότητα της συνάρτησης του κόστους $C = \Phi(q)$ είναι:

$$\varepsilon = \frac{q}{C}\Phi'(q)$$

Επειδή τα q, C είναι πάντα θετικοί αριθμοί και η παράγωγος $\Phi'(q)$ είναι πάντα θετικός αριθμός (αφού η συνάρτηση Φ είναι αύξουσα), συμπεραίνουμε ότι:
Η ελαστικότητα του ολικού κόστους είναι πάντα θετικός αριθμός. Αυτό σημαίνει ότι σε σχετική αύξηση της ποσότητας παραγωγής q έχουμε πάντα και σχετική αύξηση του ολικού κόστους.

Επειδή είναι $\Phi'(q) = C_0$ και $\frac{C}{q} = \bar{C}$, ο τύπος $\varepsilon = \frac{q}{C}\Phi'(q)$ γράφεται:

$$\varepsilon = \frac{C_0}{\bar{C}}$$

Δηλαδή, **η ελαστικότητα του ολικού κόστους είναι πάντα ίση με το λόγο του οριακού κόστους προς το μέσο κόστος.** Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι, αν για μια ορισμένη ποσότητα q έχουμε ε>1, ε=1 ή ε<1, το οριακό κόστος για την ποσότητα αυτή είναι αντίστοιχα μεγαλύτερο, ίσο ή μικρότερο από το μέσο κόστος.

Πηγή: Μαθηματικά-Θέματα για την Οικονομία και τη Διοίκηση Επιχειρήσεων, Παπαμιχαήλ Δημήτριος, Εκδόσεις Α. Σταμούλης Αθήνα-Πειραιάς 1995, Κεφάλαιο 5^{o}, σελ.152

3.6 Συνάρτηση ολικού κέρδους

Αν R και C είναι η ολική πρόσοδος και το ολικό κόστος για μια ποσότητα q ενός αγαθού Χ, η διαφορά R-C λέγεται **ολικό κέρδος** του αγαθού για την ποσότητα q και θα σημειώνεται με Κ, δηλαδή είναι:

$$K = R - C$$

Αν λοιπόν $R = F(q)$ και $C = \mathsf{F}(q)$ είναι οι τύποι των συναρτήσεων ολικής προσόδου και ολικού κόστους, η ισότητα $K = F(q) - \mathsf{F}(q)$ θα είναι ο τύπος της συνάρτησης που δίνει το ολικό κέρδος για κάθε ποσότητα q.
Η συνάρτηση αυτή λέγεται συνάρτηση ολικού κέρδους και μπορεί να πάρει θετικές ή αρνητικές τιμές, όταν είναι Κ<0, ο αριθμός |Κ| χαρακτηρίζεται και ως ζημία για την ποσότητα q.
Αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων ολικής προσόδου και ολικού κόστους τέμνονται σε σημείο Ν, η τετμημένη του Ν παριστάνει την ποσότητα του αγαθού για την οποία το ολικό κέρδος είναι μηδέν, ενώ η τεταγμένη του παριστάνει την κοινή τιμή ολικής προσόδου και ολικού κόστους. Ένα τέτοιο σημείο και ειδικότερα η τετμημένη του σημείου αυτού λέγεται νεκρό σημείο στη διάθεση του αγαθού και είναι η ρίζα της εξίσωσης Κ=0, δηλαδή της

$$F(q) = \mathsf{F}(q)$$

Νεκρό σημείο: είναι το ποσό εκείνο των πωλήσεων (κύκλου εργασιών), με το οποίο μια επιχείρηση καλύπτει ακριβώς τόσο τα σταθερά όσο και τα μεταβλητά της έξοδα, χωρίς να πραγματοποιεί ούτε κέρδος ούτε ζημιά. Η βασική αρχή, πάνω στην οποία στηρίζεται η ανάλυση του «νεκρού σημείου» (break even point), είναι η συμπεριφορά του κόστους. Αυτό συμβαίνει γιατί ένα μέρος του κόστους είναι μεταβλητό και ανάλογο των πωλήσεων, ενώ ένα άλλο είναι σταθερό, τουλάχιστον για ένα μεγάλο εύρος πωλήσεων.
Πηγή: Μαθηματικά-Θέματα για την Οικονομία και τη Διοίκηση Επιχειρήσεων, Παπαμιχαήλ Δημήτριος, Εκδόσεις Α. Σταμούλης Αθήνα-Πειραιάς 1995, Κεφάλαιο 5ο, σελ.153-154

3.7 Μεγιστοποίηση του Κέρδους

Συνήθως οι οικονομολόγοι αντιμετωπίζουν την εταιρεία ως μια ενιαία μονάδα που έχει ένα κέντρο λήψης αποφάσεων. Οι αποφάσεις λαμβάνονται από έναν διευθυντή που αποφασίζει και επιδιώκει με ορθολογικότητα κάποιο στόχο. Συνήθως τη μεγιστοποίηση του κέρδους.

Μια εταιρεία που μεγιστοποιεί τα κέρδη επιλέγει τις εισροές και τις εκροές (προϊόντα) με μοναδικό σκοπό να πετύχει μέγιστα κέρδη

- Επιδιώκει να μεγιστοποιήσει την διαφορά των συνολικών εσόδων και των συνολικών εξόδων.
- Αν οι εταιρείες μεγιστοποιούν τα κέρδη, αποφασίζουν με προσέγγιση ‘οριακή’.
- Εξετάζουν το οριακό κέρδος που προέρχεται από την παραγωγή μιας επιπλέον μονάδας προϊόντος που οφείλεται στην πρόσληψη μιας επιπλέον μονάδας εργασίας.

Επιλογή ποσότητας παραγωγής

Τα συνολικά έσοδα της επιχείρησης είναι:

$$R(q) = p(q) \cdot q$$

Η παραγωγή του q, συνεπάγεται κάποια έξοδα [C(q)].
Οικονομικά κέρδη (π) είναι η διαφορά συνολικών εσόδων και εξόδων:

$$\pi(q) = R(q) - C(q) = p(q) \cdot q - C(q)$$

Η αναγκαία συνθήκη για την επιλογή του q που μεγιστοποιεί τα κέρδη μπορεί να βρεθεί αν εξισώσουμε την παράγωγο του π ως προς q με μηδέν.

$$\frac{d\pi}{dq} = \pi'(q) = \frac{dR}{dq} - \frac{dC}{dq} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{dR}{dq} = \frac{dC}{dq}$$

Για μεγιστοποίηση των κερδών, η επιχείρηση πρέπει να επιλέξει εκείνη την ποσότητα του προϊόντος για την οποία το οριακό έσοδο είναι ίσο με το οριακό κόστος.

$$MR = \frac{dR}{dq} = \frac{dC}{dq} = MC$$

Συνθήκες δεύτερης τάξης

MR = MC είναι απλώς αναγκαία συνθήκη για την μεγιστοποίηση των κερδών.

- Για να είναι και ικανή, χρειάζεται και

$$\left.\frac{d^2\text{p}}{dq^2}\right|_{q=q^*} = \left.\frac{d\text{p}'(q)}{dq}\right|_{q=q^*} < 0$$

- Τα "οριακά" κέρδη πρέπει να φθίνουν στο σημείο βέλτιστου q.

Τα κέρδη μεγιστοποιούνται όταν η κλίση της συνάρτησης συνολικών εσόδων είναι ίδια με την κλίση της συνάρτησης συνολικών εξόδων.

Πηγή: https://books.google.gr/books?id=-5-WO_mZ67QC&pg=PA1022&lpg=PA1022&dq=d%CE%A0/dq%3D0&source=bl&ots=LWWJwoHft-&sig=CFj_JaejYANRpHIiX8U8K-zTtbY&hl=el&sa=X&ei=BXxrVcT5Gcn5UKaSgpgB&ved=0CD8Q6AEwBA#v=onepage&q=d%CE%A0%2Fdq%3D0&f=false

3.8 Ελαχιστοποίηση του Κόστους

Η ανάλυση του προβλήματος ελαχιστοποίησης του κόστους παρουσιάζει τα εξής πλεονεκτήματα σε σχέση με το πρόβλημα μεγιστοποίησης του κέρδους:

Α. Επιτρέπει τη διατύπωση μιας θεωρίας του κόστους που μπορεί να εφαρμοστεί και σε επιχειρήσεις που δε μεγιστοποιούν τα κέρδη τους.

Β. Αν η επιχείρηση δεν είναι αποδέκτης τιμών στην αγορά του προϊόντος, τότε η συνάρτηση κερδών δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση της συμπεριφοράς της επιχείρησης.

Αντίθετα, τα συμπεράσματα που εξάγονται από το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του κόστους διατηρούν την ισχύ τους και σε αυτή την περίπτωση (εφόσον οι αγορές των εισροών είναι ανταγωνιστικές).

Γ. Αν η συνάρτηση παραγωγής έχει σταθερές ή αύξουσες αποδόσεις κλίμακας, τότε η λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης του κόστους έχει καλύτερη συμπεριφορά από τη λύση του προβλήματος μεγιστοποίησης των κερδών.

Μαθηματική Διατύπωση του Προβλήματος Ελαχιστοποίησης του Κόστους (CMP)

Η επιχείρηση επιλέγει τις ποσότητες των εισροών (Κεφαλαίου, Εργασίας) = (K,L) κατά τρόπο ώστε να ελαχιστοποιεί το κόστος της, υπό τον περιορισμό ότι παράγεται ένα δεδομένο επίπεδο (στόχος) προϊόντος A, με συνάρτηση παραγωγής f(K,L):

Προβλήματος Ελαχιστοποίησης του Κόστους (CMP)

$$\min_{\{K,L\}} C(K,L) = wL + rK$$
$$s.t.\, f(K,L) \geq A$$
$$K,L \geq 0$$

Ισοδύναμα, το CMP γράφεται:

$$\max_{\{K,L\}} - C(K,L) = - wL - rK$$
$$s.t.\, f(K,L) \geq A$$
$$K,L \geq 0$$

Επομένως,

$$J = -wL - rK + \lambda\left[f(K,L) - A\right]$$

$$FOCs:$$

$$\frac{\partial J}{\partial K} = -r + \lambda\frac{\partial f}{\partial K} \leq 0, \frac{\partial J}{\partial K}K = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial L} = -w + \lambda\frac{\partial f}{\partial L} \leq 0, \frac{\partial J}{\partial L}L = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda} = f(K,L) - A \geq 0, \frac{\partial J}{\partial \lambda}\lambda = 0$$

Αναζητούμε την εσωτερική λύση των FOCs.

Υπόθεση: K , L > 0. Τότε:

$$K > 0 \Rightarrow \frac{\partial J}{\partial K} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{r}{\partial f/\partial K} > 0 \Rightarrow f(K,L) = A$$

Άρα: Ο συνδυασμός εισροών που ελαχιστοποιεί το κόστος πρέπει να παράγει ακριβώς το επίπεδο (στόχο) προϊόντος Α (δεν υπάρχει υπερβάλλουσα παραγωγή στη λύση του CMP).

$$L > 0 \Rightarrow \frac{\partial J}{\partial L} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{w}{\partial f/\partial L} \Leftrightarrow \lambda = \frac{w}{\partial f/\partial L} = \frac{r}{\partial f/\partial K} \Leftrightarrow$$

$$\frac{w}{r} = \frac{\partial f/\partial L}{\partial f/\partial K}$$

$$\boxed{\frac{w}{r} = \frac{\partial f/\partial L}{\partial f/\partial K} = MRTS}$$

Για να ελαχιστοποιείται το κόστος της επιχείρησης, ο MRTS (δηλαδή ο τεχνικός λόγος ανταλλαγής) μεταξύ των εισροών K, L πρέπει να είναι ίσος με το λόγο των τιμών (δηλαδή με τον αγοραίο λόγο ανταλλαγής) αυτών των δύο εισροών.

<u>Συνθήκες $2^{ης}$ Τάξης (Ικανές Συνθήκες Μεγιστοποίησης)</u>

Αν η συνάρτηση παραγωγής f(K,L) είναι οιονεί κοίλη (δηλαδή αν οι καμπύλες ίσου προϊόντος είναι κυρτές), τότε κάθε λύση των αναγκαίων συνθηκών (FOCs) αποτελεί ολικό μέγιστο.

Πηγή:https://www.google.gr/?gws_rd=ssl#q=%CE%B5%CE%BB%CE%B1%CF%87%CE%B9%CF%83%CF%84%CE%BF%CF%80%CE%BF%CE%B9%CE%B7%CF%83%CE%B7+%CE%BA%CE%BF%CF%83%CF%84%CE%BF%CF%85%CF%82&spell=1

3.9 Παραδείγματα χρήσης της παραγώγου στην Οικονομία

Α. Καμπύλες προσφοράς και ζήτησης

Η ζήτηση Q ενός προϊόντος σαν συνάρτηση της τιμής πώλησης P της μονάδας του προϊόντος εκφράζεται από τη σχέση $Q = Q(P) = P^2 - 4P + 3$. Να κατασκευασθεί η καμπύλη ζήτησης του προϊόντος.

Λύση:

Θα κατασκευάσουμε καταρχήν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $Q = Q(P) = P^2 - 4P + 3$ και στη συνέχεια θα αφαιρέσουμε τα τμήματά της εκείνα για τα οποία $Q < 0$ ή $P < 0$. Για την κατασκευή της γραφικής παράστασης ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία.

1. $D(Q) = IR$

Από τη σχέση $Q = P^2 - 4P + 3$προκύπτει $P^2 - 4P + (3 - Q) = 0$ και για να είναι το P πραγματικός αριθμός θα πρέπει $16 - 4(3 - Q) \geq 0 \Leftrightarrow Q \geq -1$. Άρα, $R(Q) = [-1, +\infty)$

2. Η συνάρτηση είναι συνεχής σε όλο το IR.

3. Για το P=0 είναι Q=3, ενώ για Q=0 η εξίσωση $P^2 - 4P + 3 = 0$ έχει ρίζες τα 1 και 3.

4. Η συνάρτηση δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή. Επίσης δεν είναι περιοδική. Πράγματι, $Q(0)=3$ και για να είναι $Q(P)=3$ θα πρέπει $P^2-4P=P(P-4)=0$, δηλ. P=0 ή P=4. Δηλαδή, ο T=4 είναι ο μόνος θετικός αριθμός για τον οποίο ισχύει $Q(0)=Q(4)=3$

Όμως, $Q(T+1)=Q(5)=8$, ενώ $Q(1)=0$, δηλαδή $Q(T+1)\neq Q(1)$

5. $Q^{'}(P)=2P-4>0 \Leftrightarrow P>2$, δηλαδή η συνάρτηση είναι φθίνουσα στο $(-\infty,2)$ και αύξουσα στο $(2,+\infty)$.

6. Για P=2 έχουμε ολικό ελάχιστο, $P(2)=-1$.

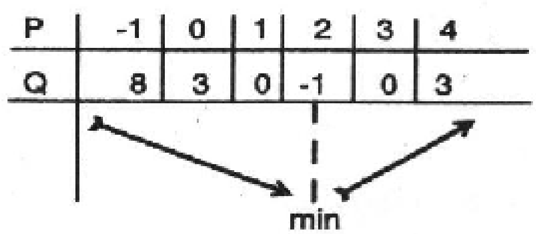
7. $Q^{''}(P)=2>0$, άρα η συνάρτηση είναι κυρτή σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της και δεν έχει σημεία καμπής.

8. $\lim\limits_{P\to P_0} Q(P)=Q(P_0)\in IR, \forall P_0\in IR$.

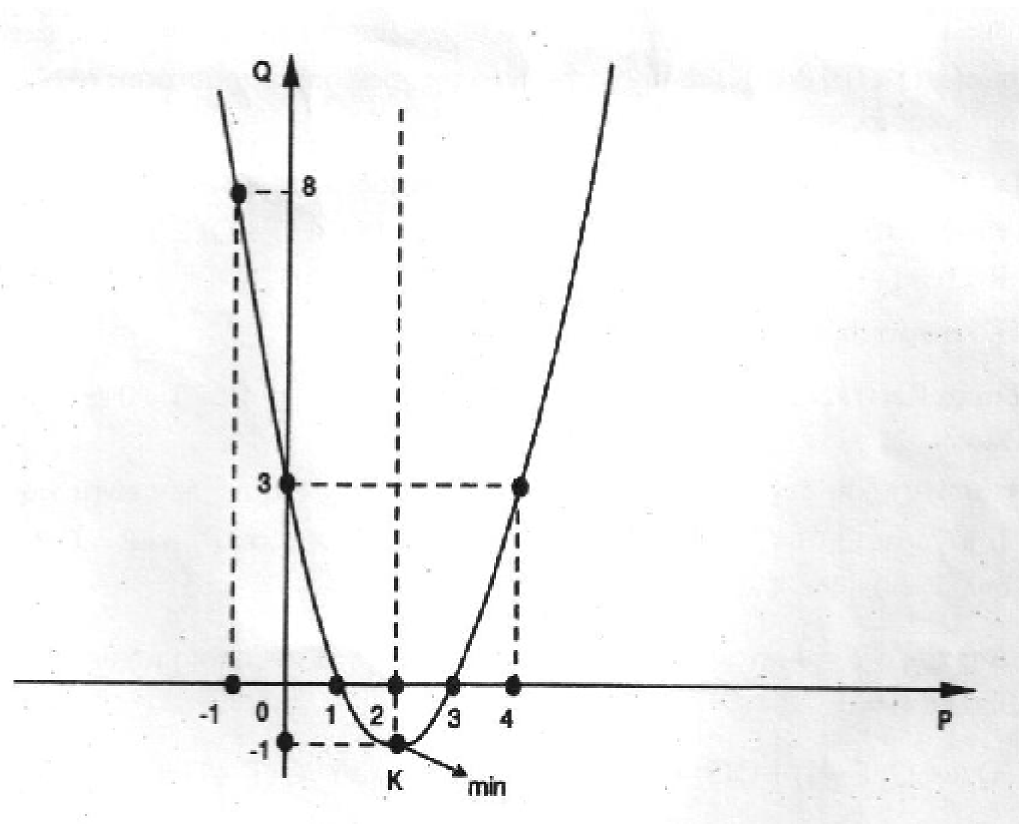
Επίσης, $\lim\limits_{P\to\infty} Q^{'}(P)=\lim\limits_{P\to\infty}(2P-4)=\infty$

Άρα, η C_Q δεν έχει ασύμπτωτους.

9. Πίνακας χαρακτηριστικών τιμών:



10. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι σχεδιασμένη (κατά προσέγγιση).



Για τον προσδιορισμό της καμπύλης ζήτησης πρέπει να αφαιρεθούν τα τμήματα της γραφικής παράστασης, που βρίσκονται στο 2^{o} και 4^{o} τεταρτημόριο, γιατί αντιστοιχούν σε αρνητικές τιμές των P και Q αντίστοιχα.

Σημείωση:

Η γραφική παράσταση κάθε συνάρτησης της μορφής $f(c)=ac^{2}+bc+g$, με a ¹ 0 (δευτεροβάθμιο τριώνυμο) είναι μια καμπύλη, που έχει σαν άξονα συμμετρίας την κατακόρυφη ευθεία, που διέρχεται από το σημείο K, όπου παρουσιάζεται άκρα τιμή και ονομάζεται παραβολή.

<u>Πηγή: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΤΟΜΕΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ, ΒΟΣΚΟΓΛΟΥ ΓΡ. ΜΙΧΑΛΗΣ, ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15: ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ - ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ, σελ.281-283</u>

Β. Μέσο κόστος και μέσο έσοδο

Η τιμή πώλησης P ενός αγαθού σαν συνάρτηση της ποσότητας του αγαθού δίδεται από τη σχέση : $P(Q) = 2Q - \dfrac{22}{Q} - 7$

Να κατασκευασθεί η καμπύλη του μέσου εσόδου από την πώληση της μονάδας του αγαθού.

Λύση:

Θα είναι $R(Q) = QP(Q) = 2Q^2 - 7Q - 22$

Κατά συνέπεια $AR(Q) = \dfrac{R(Q)}{Q} = \dfrac{2Q^2 - 7Q - 22}{Q}$

Για την κατασκευή της καμπύλης του μέσου εσόδου θα σχεδιάσουμε καταρχήν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\psi = AR(Q)$ και στη συνέχεια θα αφαιρέσουμε τα τμήματα της εκείνα, για τα οποία $Q < 0$ ή $AR < 0$.

Για την κατασκευή της γραφικής παράστασης θα ακολουθήσουμε τα γνωστά βήματα.

1. Είναι $D(AR) = IR - \{0\}$

Για τον προσδιορισμό του πεδίου τιμών, θέτοντας $\psi = \dfrac{2Q^2 - 7Q - 22}{Q}$ θα πρέπει να προσδιορίσουμε εκείνα τα ψ, για τα οποία η εξίσωση $2Q^2 - (7 + \psi)Q - 22 = 0$ έχει πραγματικές ρίζες ως προς Q. Επειδή, δεν είναι τελείως απαραίτητος ο προσδιορισμός του πεδίου τιμών, το αφήνουμε σαν άσκηση για τον αναγνώστη.

2. Η συνάρτηση $\psi = AR(Q)$ είναι ρητή και κατά συνέπεια συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της..

3. Για Q=0 δεν προκύπτει πραγματική τιμή για το ψ.

$\psi = 0 \Leftrightarrow 2Q^2 - 7Q - 22 = 0, Q \neq 0.$ Οι ρίζες της εξίσωσης αυτής είναι -2και 11/2.

4. Η συνάρτηση δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή. Επειδή $0 \notin D(AR)$ δεν μπορούμε να ελέγξουμε την περιοδικότητα με τη γνωστή μέθοδο. Αποδεικνύεται πάντως ότι η συνάρτηση δεν είναι περιοδική.

5. $y' = \frac{(2Q^2 - 7Q - 22)'Q - \left(2Q^2 - 7Q - 22\right)Q'}{Q^2} = \frac{2Q^2 + 22}{Q^2} > 0$

6. Επειδή δεν αλλάζει ο τύπος μονοτονίας της συνάρτησης, δεν υπάρχουν ακρότατα.

7. $y'' = \left(\frac{2Q^2 + 22}{Q^2}\right)' = -\frac{44}{Q^2} > 0 \Leftrightarrow Q^3 < 0 \Leftrightarrow Q < 0$

Δηλαδή, η $y = AR(Q)$ είναι κυρτή στο $(-\infty, 0)$ και κοίλη στο $(0, +\infty)$. Σημείο καμπής δεν υπάρχει, αφού $0 \notin D(AR)$

8. $\lim_{Q \to 0} \frac{2Q^2 - 7Q - 22}{Q} = \infty$ και κατά συνέπεια η ευθεία με εξίσωση Q=0 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης.

Επίσης, $\lim_{Q \to \infty} AR'(Q) = \lim_{Q \to \infty} \frac{\left(2Q^2 + 22\right)'}{\left(Q^2\right)'} = \frac{4Q}{2Q} - 2 = \alpha$

Και από τη σχέση $\lim_{Q \to \infty}[AR(Q) - (2Q + \beta)] = 0$ προκύπτει

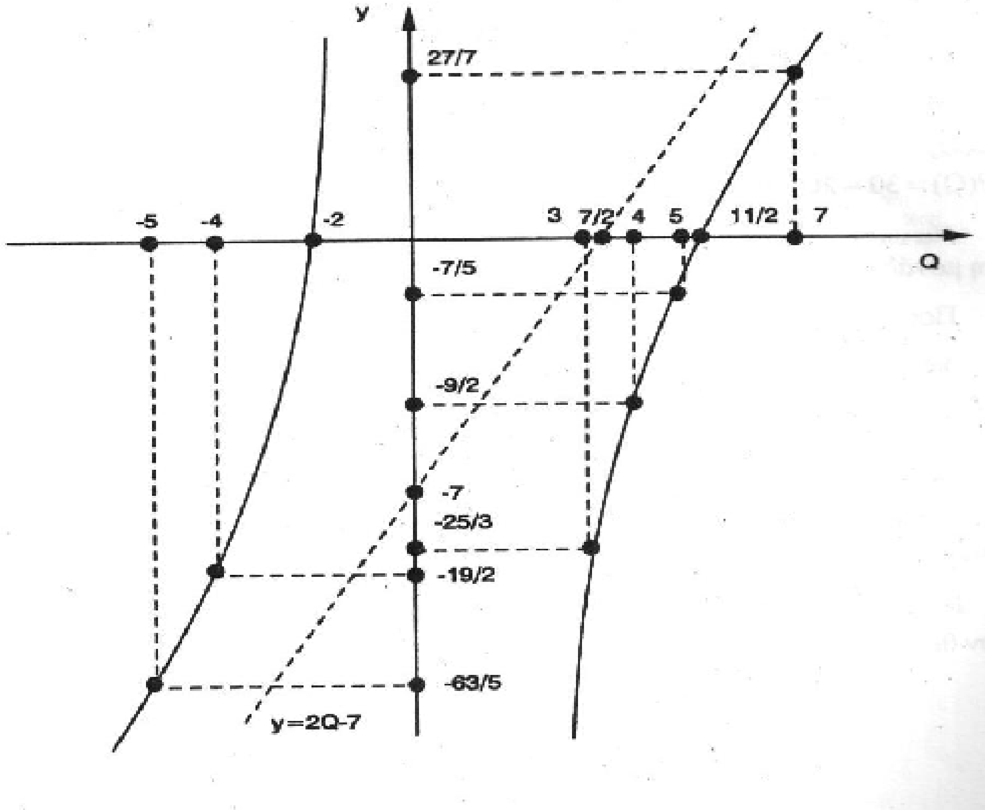
$$\beta = \lim_{Q \to \infty}[AR(Q) - 2Q = -\lim_{Q \to \infty} \frac{7Q + 22}{Q} = -\lim_{Q \to 0} \frac{(7Q + 22)'}{Q'} = -7$$

Κατά συνέπεια η ευθεία με εξίσωση $y = 2Q - 7$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης.

9. Πίνακας χαρακτηριστικών τιμών:

Q	-5	-4	-2	3	4	5	11/2	7
AR(Q)	-63/2	-19/2	0	-25/3	-9/2	-7/5	0	27/7

10. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = AR(Q)$ είναι σχεδιασμένη (κατά προσέγγιση).



Για τον προσδιορισμό της καμπύλης του μέσου εσόδου πρέπει να ληφθεί υπόψη μόνο το τμήμα της γραφικής παράστασης, που βρίσκεται στο α' τεταρτημόριο, όπου τα Q και AR(Q) είναι συγχρόνως θετικά.

Σημείωση: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = AR(Q)$ είναι μια καμπύλη, που ονομάζεται υπερβολή.

<u>Πηγή: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΤΟΜΕΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ, ΒΟΣΚΟΓΛΟΥ ΓΡ. ΜΙΧΑΛΗΣ, ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15: ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ - ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ, σελ.283-286</u>

Γ. Οριακό κόστος και οριακό έσοδο

Το κόστος παραγωγής ενός προϊόντος Π δίδεται από τη σχέση $C(Q)+Q^2+3Q+2$, ενώ η τιμή πώλησης της μονάδας του Π είναι $P(Q)=30-2Q$, όπου Q η ποσότητα του Π.

Να υπολογισθούν το οριακό κόστος παραγωγής, καθώς και το οριακό έσοδο για τη μονάδα του προϊόντος.

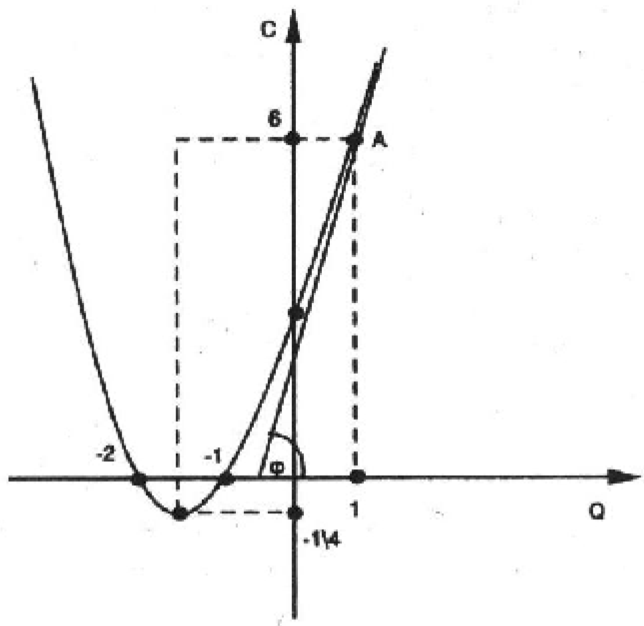
Ποια η γεωμετρική τους σημασία;

Λύση:

Θα είναι $MC(Q) = (Q^2 + 3Q + 2)^{'} = 2Q + 3$ και κατά συνέπεια $MC(1) = 5$ χρηματικές μονάδες.

Στο σχήμα φαίνεται (κατά προσέγγιση) η γραφική παράσταση της $C = C(Q)$. Η καμπύλη του κόστους παραγωγής περιορίζεται μόνο στο α’ τεταρτημόριο, όπου $C, Q \geq 0$.

Η εφαπτόμενη της καμπύλης στο σημείο Α(1,6), όπου C(1)=6, σχηματίζει με τον θετικό ημιάξονα των Q γωνία φ. Τότε $MC(1) = \varepsilon\varphi\,\varphi$.



Η συνάρτηση του συνολικού εσόδου είναι $R(Q) = P(Q)Q = 30Q - 2Q^2$ και κατά συνέπεια $MR(Q) = (30Q - 2Q^2)^{'} = 30 - 4Q$. Έτσι, $MR(1) = 28$ χ.μ.

Όμοια με την προηγούμενη περίπτωση βγάζουμε το συμπέρασμα ότι το $MR(1)$ είναι ίσο με την εφαπτομένη της γωνίας, που σχηματίζει η εφαπτομένη της καμπύλης του συνολικού εσόδου στο σημείο Α(1,28), όπου R(1)=28, με τον θετικό ημιάξονα.

<u>Πηγή: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΤΟΜΕΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ, ΒΟΣΚΟΓΛΟΥ ΓΡ. ΜΙΧΑΛΗΣ, ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15: ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ - ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ, σελ. 286-287</u>

Δ. Ελαστικότητα τιμής

Η ελαστικότητα ε της τιμής πώλησης P της μονάδας ενός αγαθού εκφράζει την ποσοστιαία αλλαγή $\frac{\Delta Q}{Q}$ της ποσότητας Q σε σχέση με την ποσοστιαία αλλαγή $\frac{\Delta P}{P}$ της τιμής του αγαθού.

Είναι δηλαδή $\varepsilon(P) = \dfrac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta P}{P}} = \dfrac{\Delta Q}{\Delta P}\dfrac{P}{Q}$ και για πολύ μικρά ΔP.

$$\varepsilon(P) = \left(\lim_{\Delta P \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta P}\right)\frac{P}{Q} = Q^{'}(P)\frac{P}{Q} \quad (1)$$

Η τιμή P θα λέγεται ελαστική, αν $|\varepsilon| > 1$ και ανελαστική αν $|\varepsilon| < 1$.

Παράδειγμα:

Η ποσότητα ζήτησης Q ενός αγαθού σαν συνάρτηση της τιμής ζήτησης P δίδεται από τη σχέση $Q(P) = P^2 - 4P + 230$. Να εξετασθεί η ελαστικότητα της τιμής P=7 χ.μ.

Λύση:

Είναι $Q(7) = 49 - 28 + 230 = 251\mu\mu$

Ακόμη, $Q^{'}(P) = 2P - 4$ και κατά συνέπεια $Q^{'}(7) = 10$

Κατά συνέπεια η σχέση (1) δίδει $\varepsilon(7) = 10\dfrac{7}{251} = \dfrac{70}{251}$

Επομένως, η τιμή P=7χ.μ. είναι ανελαστική.

<u>Πηγή: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΤΟΜΕΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ, ΒΟΣΚΟΓΛΟΥ ΓΡ. ΜΙΧΑΛΗΣ, ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15: ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ - ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ, σελ. 287-288</u>

Ε. Μεγιστοποίηση και ελαχιστοποίηση οικονομικών συναρτήσεων

1. Το κόστος παραγωγής της ποσότητας Q ενός προϊόντος είναι $C(Q) = 2Q^2 - 36Q + 25$ και η τιμή πώλησης της μονάδας του προϊόντος είναι $P(Q) = \frac{1}{2}Q - 15$.

Να υπολογισθούν οι ποσότητες του προϊόντος για τις οποίες:

i. Το κόστος παραγωγής γίνεται ελάχιστο.

ii. Το συνολικό έσοδο από την πώληση του προϊόντος γίνεται ελάχιστο.

iii. Το κέρδος από την πώληση του προϊόντος είναι μέγιστο.

Λύση:

i. $C'(Q) = 4Q - 36 = 0 \Leftrightarrow Q = 9$

Επειδή $C''(Q) = 4 > 0$, το κόστος παραγωγής γίνεται ελάχιστο για παραγωγή 9 μονάδων του προϊόντος.

ii. $R(Q) = P(Q)Q = \frac{1}{2}Q^2 - 15Q$, ενώ $R'(Q) = Q - 15 = 0 \Leftrightarrow Q = 15$.

Επειδή, $R''(Q) = 1 > 0$, το συνολικό έσοδο από την πώληση του προϊόντος γίνεται ελάχιστο για πώληση 15 μονάδων του προϊόντος.

iii. $K(Q) = E(Q) - C(Q) = -\frac{3}{2}Q^2 + 21Q - 25$

$K'(Q) = -3Q + 21 = 0 \Leftrightarrow Q = 7$

Όμως, $K''(Q) = -3 < 0$ και κατά συνέπεια το κέρδος γίνεται μέγιστο από την παραγωγή και πώληση 7 μ.μ. του προϊόντος.

Παρατήρηση: Η μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση οικονομικών συναρτήσεων γίνεται πάντοτε κάτω από τον περιορισμό ότι οι προκύπτουσες τιμές των μεταβλητών είναι θετικές.

Πηγή: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΤΟΜΕΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ, ΒΟΣΚΟΓΛΟΥ ΓΡ. ΜΙΧΑΛΗΣ, ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15: ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ - ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ, σελ. 288-289

2. Ας υποθέσουμε ότι τα συνολικά έσοδα μιας επιχείρησης εξαρτώνται από την ποσότητα που παράγει (q) σύμφωνα με τη συνάρτηση: $TR = 70q - q^2$. Τα συνολικά έξοδα επίσης εξαρτώνται από το q: $TC = q^2 + 30q + 100$.

α) Ποιο επίπεδο προϊόντος θα πρέπει να παράγει η επιχείρηση προκειμένου να μεγιστοποιήσει τα κέρδη (TR-TC); Ποια θα είναι τα κέρδη της;

β) Δείξτε ότι οι συνθήκες δεύτερης τάξης για μέγιστο ικανοποιούνται στο επίπεδο προϊόντος που βρήκαμε στο (α) ερώτημα;

γ) Η λύση που υπολογίσαμε εδώ υπακούει στον κανόνα ότι τα οριακά έσοδα θα πρέπει να είναι ίσα με τα οριακά κόστη; Εξηγείστε.

Λύση:

α) $\text{Κέρδη} = \pi = TR - TC = -2q^2 + 40q - 100$

$$\frac{d\pi}{dq} = -4q + 40 = 0 \Leftrightarrow q^* = 10$$

Για ποσότητα $q^* = 10$ τα κέρδη της επιχείρησης είναι

$$\pi^* = -2(10)^2 + 40(10) - 100 = 100$$

β) $\dfrac{d^2\pi}{dq^2} = -4 < 0,$ οπότε τα κέρδη μεγιστοποιούνται.

γ) $MR = \dfrac{dTR}{dq} = 70 - 2q$ και $MC = \dfrac{dTC}{dq} = 2q + 30.$ Άρα,

$70 - 2q = 2q + 30 \Leftrightarrow q^* = 10$, υπακούει στον κανόνα MR=MC.

Πηγή: http://www.arnos.gr/

3. Μία επιχείρηση είναι ο μοναδικός παραγωγός ενός τύπου λέιζερ. Η καμπύλη ζήτησης για το προϊόν της είναι: $Q = 8300 - 2P,$ όπου P είναι η τιμή (σε €) και Q είναι το μηνιαίο προϊόν. Η συνάρτηση συνολικού κόστους της είναι $TC = 2200 + 480Q + 20Q^2,$ όπου TC είναι το συνολικό κόστος (σε €).

α) Αν η επιχείρηση επιθυμεί να μεγιστοποιήσει τα κέρδη της, ποιο επίπεδο προϊόντος πρέπει να επιλέξει;

β) Ποια τιμή πρέπει να χρεώσει στο επιλεγμένο επίπεδο προϊόντος;

Λύση:

α) Προκειμένου να μεγιστοποιήσει τα κέρδη της, η μονοπωλιακή επιχείρηση πρέπει να επιλέξει το επίπεδο παραγωγής που ικανοποιεί τη συνθήκη MR=MC. Από την καμπύλη ζήτησης έχουμε: $Q = 8300 - 2P \Leftrightarrow P = 4150 - 0,5Q$

Άρα, τα συνολικά έσοδα TR είναι:

$$TR = PQ = 4150Q - 0,5Q^2$$

. $$MR = \frac{dTR}{dQ} = 4150 - Q$$

. $$MC = \frac{dTC}{dQ} = 480 + 40Q$$

Επομένως, η συνθήκη μεγιστοποίησης των κερδών της μονοπωλιακής επιχείρησης γίνεται:

$$MR = MC \Leftrightarrow 4150 - Q = 480 + 40Q \Leftrightarrow Q = 89,5 \Leftrightarrow Q \approx 90$$

Άρα, για να μεγιστοποιήσει τα κέρδη της η επιχείρηση πρέπει να παράγει 90 μονάδες λέιζερ.

β) Από την καμπύλη ζήτησης βρίσκουμε ότι οι καταναλωτές θα αγοράσουν 90 μονάδες λέιζερ όταν η τιμή είναι ίση με: $P = 4150 - 0,5(90) = 4150$ € ανά λέιζερ. Αυτή είναι η τιμή που πρέπει να χρεώσει η επιχείρηση.

4. Μία επιχείρηση παράγει δύο προϊόντα. Ημερησίως, έχει τη δυνατότητα να παράγει συνολικά $Q_T = 100$ μονάδες και από τα δύο προϊόντα. Το συνολικό κόστος παραγωγής Q_1 μονάδων από το πρώτο προϊόν είναι $TC_1(Q_1) = 1.5Q_1^2 + 30Q_1 + 1000$ και το συνολικό κόστος παραγωγής Q_2 μονάδων από το δεύτερο προϊόν είναι $TC_2(Q_2) = 2Q_2^2 + 50Q_2 + 800$.

Να βρεθούν τα επίπεδα παραγωγής των δύο προϊόντων έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος TC.

Λύση:

Θεωρούμε ότι η επιχείρηση παράγει 100 μονάδες. Αν παράγονται ημερησίως Q_1 μονάδες από το πρώτο προϊόν, τότε παράγονται 100 - Q_1 μονάδες από το δεύτερο. Συνεπώς, το συνολικό κόστος είναι:

$$TC(Q) = TC_1(Q_1) + TC_2(100 - Q_1) = 1.5Q_1^2 + 30Q_1 + 1000 +$$
$$2(100 - Q_1)^2 + 50(100 - Q_1) + 800 = 3.5Q_1^2 - 420Q_1 + 26800$$

Η παράγωγος της TC ως προς Q_1 είναι $7Q_1-420$ και μηδενίζεται για $Q_1=60$. Η δεύτερη παράγωγος είναι σταθερά 7>0, συνεπώς η τιμή $Q_1=60$ αντιστοιχεί σε ελάχιστο. Επομένως, το συνολικό κόστος ελαχιστοποιείται αν παράγονται ημερησίως 60 μονάδες από το πρώτο και 100-60=40 μονάδες από το δεύτερο προϊόν.

Πηγή: Ποσοτικές Μέθοδοι ΔΕΟ 13 Τόμος Α, Επιχειρησιακά Μαθηματικά

Στ. Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών – Μερικές παράγωγοι

Πολλές φορές σε διάφορα οικονομικά προβλήματα εμφανίζονται συναρτήσεις με περισσότερες από μία ανεξάρτητες μεταβλητές.

Για τη μελέτη προβλημάτων μεγιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης συναρτήσεων δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών (και όχι μόνο), είναι χρήσιμη η έννοια των μερικών παραγώγων της συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές αυτές. Ας θεωρήσουμε για απλότητα μια συνάρτηση δυο ανεξάρτητων μεταβλητών, $z = f(\chi, \psi)$

Όταν το χ μεταβάλλεται και το ψ παραμένει σταθερό, η μερική παράγωγος της φ ως προς χ, που θα τη συμβολίζουμε με $f_\chi = \frac{\partial f}{\partial \chi}$, ορίζεται από τη σχέση $f_\chi{}' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\chi + \Delta\chi, \psi) - f(\chi, \psi)}{\Delta\chi}$, όταν το όριο αυτό υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Ανάλογα ορίζεται και η $f_\psi = \frac{\partial f}{\partial \psi}$.

Από τον παραπάνω ορισμό γίνεται φανερό ότι για τον υπολογισμό της f_χ εφαρμόζουμε τους γνωστούς κανόνες παραγώγισης θεωρώντας την μεταβλητή ψ σαν σταθερή.

Έτσι, αν π.χ. $f(\chi,\psi)=3\chi\psi^2$, είναι $f_\chi=3\psi^2$ και $f_\psi=6\chi\psi$

Οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης ορίζονται από τις σχέσεις: $f_{\chi^2}=f_\chi\left(f_\chi\right)$, $f_{\psi^2}=f_\psi\left(f_\psi\right)$, $f_{\chi\psi}=f_\chi\left(f_\psi\right)$ και $f_{\psi\chi}=f_\psi\left(f_\chi\right)$. Επαγωγικά ορίζονται και οι μερικές παράγωγοι ν-τάξης, $\nu \geq 1$.

Αποδεικνύεται ότι, αν η $z=f(\chi,\psi)$ ***έχει μερικές παραγώγους*** f_χ ***και*** f_ψ ***συνεχείς τότε*** $f_{\chi\psi}=f_{\psi\chi}$ ***(Θεώρημα του Young)***

<u>Πηγή: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΤΟΜΕΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ, ΒΟΣΚΟΓΛΟΥ ΓΡ. ΜΙΧΑΛΗΣ, ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15: ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ - ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ, σελ. 289-290</u>

Ζ. Μεγιστοποίηση και ελαχιστοποίηση συναρτήσεων δύο μεταβλητών

Για να εξετάσουμε αν η $z=f(\chi,\psi)$ έχει τοπικά ακρότατα, χρησιμοποιούμε την ορίζουσα $H(\chi,\psi)=\begin{vmatrix} f_{\chi^2} & f_{\chi\psi} \\ f_{\psi\chi} & f_{\psi^2} \end{vmatrix}$, που είναι γνωστή σαν Hessian.

Πιο συγκεκριμένα ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1. Επιλύουμε το σύστημα των εξισώσεων $f_\chi=f_\psi=0$

2. Αν (χ_0,ψ_0) είναι μια λύση του παραπάνω συστήματος, εξετάζουμε το πρόσημο της $H(\chi_0,\psi_0)$.

3. Αν $H(\chi_0,\psi_0)>0$ τότε:

Αν $f_{\chi^2}>0$ έχω τοπικό ελάχιστο στο (χ_0,ψ_0), αν $f_{\chi^2}<0$ έχω τοπικό μέγιστο στο (χ_0,ψ_0).

Παρατήρηση:

Α) όταν $f_{\chi\psi}=f_{\psi\chi}$, είναι $H(\chi,\psi)=f_{\chi^2}f_{\psi^2}-(f_{\chi\psi})^2$

Έτσι, $H(\chi,\psi)>0 \Rightarrow \; f_{\chi^2} f_{\psi^2} > (f_{\chi\psi})^2 \geq 0 \Rightarrow \; f_{\chi^2} f_{\psi^2} > 0$

Κατά συνέπεια $f_{\chi^2} > 0 \Leftrightarrow \; f_{\psi^2} > 0$ και $f_{\chi^2} < 0 \Leftrightarrow \; f_{\psi^2} < 0$

Β) όταν $H(\chi_0,\psi_0)<0$ δεν υπάρχει ακρότατο στο (χ_0,ψ_0), ενώ όταν $H(\chi_0,\psi_0)=0$ είναι δυνατόν να έχω ή να μην έχω άκρα τιμή, η περίπτωση δηλαδή αυτή χρειάζεται παραπέρα διερεύνηση.

Πηγή: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΤΟΜΕΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ, ΒΟΣΚΟΓΛΟΥ ΓΡ. ΜΙΧΑΛΗΣ, ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15: ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ - ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ, σελ. 290

Παραδείγματα – Εφαρμογές:

1. Μία βιομηχανία παράγει δύο προϊόντα B_1 και B_2.

Αν η συνάρτηση του κέρδους είναι

$$f(\chi,\psi)=64\chi-2\chi^2+4\chi\psi-4\psi^2+32\psi-14,$$

όπου χ και ψ οι παραγόμενες ποσότητες των B_1 και B_2 αντίστοιχα, να βρεθεί πότε το κέρδος γίνεται μέγιστο.

Λύση:

$$f_\chi = 64-4\chi+4\psi \quad \text{και} \quad f_\psi = 4\chi-8\psi+32$$

Κατά συνέπεια η συνθήκη $f_\chi = f_\psi = 0$ οδηγεί στο σύστημα των εξισώσεων

$\begin{cases} -\chi+\psi=16 \\ \chi-2\psi=-8 \end{cases}$, το οποίο έχει τη μοναδική λύση $(\chi_0,\psi_0)=(40,24)$.

Για το σχηματισμό της ορίζουσας Η παρατηρώ ότι:

$$f_{\chi^2}=-4,\; f_{\psi^2}=-8 \;\text{και}\; f_{\chi\psi}=f_\chi(4\chi-8\psi+32)=4$$

Κατά συνέπεια $H(\chi,\psi)=\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -8 \end{vmatrix}=16$ και $f_{\chi^2}=-4<0$, για όλες τις τιμές των χ και ψ. Επομένως, το κέρδος γίνεται μέγιστο όταν η βιομηχανία παράγει 40 μ.μ του B_1 και 24 μ.μ. του B_2.

2. Να εξετασθεί, αν η συνάρτηση $f(\chi,\psi)=\chi^3+\psi^3+3\chi\psi$ παρουσιάζει άκρες τιμές.

Λύση:

Είναι $f_x = 3x^2 + 3y$ και $f_y = 3y^2 + 3x$, επομένως η συνθήκη $f_x = f_y = 0$ οδηγεί στο σύστημα:

$$\begin{cases} x^2 + y = 0 \\ y^2 + x = 0 \end{cases}$$

Θέτοντας στη 2η εξίσωση $y = -x^2$ προκύπτει: $x^4 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^3+1) = x(x+1)(x^2 - x + 1) = 0$, που έχει πραγματικές ρίζες $x = 0$ και $x = -1$.

Έτσι, από την $y = -x^2$ προκύπτουν για το σύστημα οι λύσεις $(0,0)$ και $(-1,-1)$.

Όμως, $H(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & 3 \\ 3 & 6y \end{vmatrix} = 36xy - 9$

Κατά συνέπεια επειδή $H(0,0) = -9$, στο $(0,0)$ δεν έχουμε άκρα τιμή. Ακόμη $H(-1,-1) = 36 > 0$, ενώ $f_{x^2}(-1,-1) = -6 < 0$, δηλαδή στο σημείο $(-1,-1)$ έχουμε μέγιστο, $f_{\max} = f(-1,-1) = 1$.

Πηγή: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΤΟΜΕΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ, ΒΟΣΚΟΓΛΟΥ ΓΡ. ΜΙΧΑΛΗΣ, ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15: ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ - ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ, σελ. 291-292

Η. Οριακή παραγωγικότητα

Η ποσότητα παραγωγής Q ενός αγαθού εξαρτάται από το κεφάλαιο Κ, που διατίθεται για το σκοπό αυτό και από το μέγεθος L της προσφερόμενης εργασίας.

Κατά συνέπεια μια συνάρτηση παραγωγής ενός αγαθού θα είναι μια συνάρτηση της μορφής $Q = Q(K, L)$.

Το οριακό φυσικό προϊόν u του κεφαλαίου ορίζεται σαν η μεταβολή στο αποτέλεσμα της παραγωγής, που επέρχεται από μια μικρή αύξηση του κεφαλαίου, όταν οι άλλοι παράγοντες παραμένουν σταθεροί.

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι u=Q_K. Ανάλογα ορίζεται και το οριακό φυσικό προϊόν v της εργασίας, που υπολογίζεται από τη σχέση v=Q_L.

Παράδειγμα:

Η συνάρτηση παραγωγής ενός αγαθού είναι $Q(K,L)=3K^2+3KL+2L^2$. Να προσδιορισθούν τα μεγέθη του κεφαλαίου και της εργασίας, για τα οποία τα οριακά φυσικά προϊόντα του κεφαλαίου και της εργασίας γίνονται ίσα με 20 μ.μ του παραγόμενου προϊόντος.

Λύση: u=Q_K=6K+3L και v=Q_L=3K+4L

Κατά συνέπεια προκύπτει το σύστημα:

$\left\{\begin{matrix} 6K+3L=20 \\ 3K+4L=20 \end{matrix}\right\}$, το οποίο έχει τη μοναδική λύση K=4/3 και L=4.

(Το K μετρείται σε χρηματικές μονάδες και το L σε μονάδες εργασίας, π.χ. ώρες, ημέρες κ.λπ.)

Πηγή: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΤΟΜΕΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ, ΒΟΣΚΟΓΛΟΥ ΓΡ. ΜΙΧΑΛΗΣ, ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15: ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ - ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ, σελ. 292

Βιβλιογραφία

Κεφάλαιο 1 - Συναρτήσεις

- *http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-C105/492/3197,12972/*
- *http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-C100/493/3202,13006/*

Κεφάλαιο 2 - Διαφορικός λογισμός

- *http://tmth.gr/component/content/article/61-mathematics/494-odiaforikos-logismos*
- *http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%9B%CE%BF%CE%B3%CE%B9%CF%83%CE%BC%CF%8C%CF%82*
- *http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-C105/492/3198,12985/*
- *http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-C100/493/3202,13008/*
- *http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-C105/492/3198,12984/*
- *http://eisatopon.blogspot.gr/2011/09/blog-post_25.html*
- *http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-C105/492/3198,12988/*
- *http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-C100/493/3202,13009/*
- *http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-C105/492/3198,12989/*
- *http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-C105/492/3198,12990/*
- http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-C105/492/3198,12986/
- ***ΤΑ ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ:*** *ΤΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΟΥ* ROLLE, *ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΚΑΙ ΤΟΥ* FERMAT. *ΟΙ ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ του Δημητρίου Α. Ντρίζου*

Κεφάλαιο 3 - Εφαρμογές στον τομέα Διοίκησης και Οικονομίας

- *Μαθηματικά-Θέματα για την Οικονομία και τη Διοίκηση Επιχειρήσεων, Παπαμιχαήλ Δημήτριος, Εκδόσεις Α. Σταμούλης Αθήνα-Πειραιάς 1995, Κεφάλαιο 5ο, σελ.135*
- *Πηγή: Μαθηματικά-Θέματα για την Οικονομία και τη Διοίκηση Επιχειρήσεων, Παπαμιχαήλ Δημήτριος, Εκδόσεις Α. Σταμούλης Αθήνα-Πειραιάς 1995, Κεφάλαιο 5ο, σελ.135-136*
- *Πηγή: Μαθηματικά-Θέματα για την Οικονομία και τη Διοίκηση Επιχειρήσεων, Παπαμιχαήλ Δημήτριος, Εκδόσεις Α. Σταμούλης Αθήνα-Πειραιάς 1995, Κεφάλαιο 5ο, σελ.137*
- *http://www.euretirio.com/2011/04/simeio-isorropias.html*
- *Μαθηματικά-Θέματα για την Οικονομία και τη Διοίκηση Επιχειρήσεων, Παπαμιχαήλ Δημήτριος, Εκδόσεις Α. Σταμούλης Αθήνα-Πειραιάς 1995, Κεφάλαιο 5ο, σελ.140-142*
- *http://www.euretirio.com/2010/06/elastikotita-prosforas.html*
- *Μαθηματικά-Θέματα για την Οικονομία και τη Διοίκηση Επιχειρήσεων, Παπαμιχαήλ Δημήτριος, Εκδόσεις Α. Σταμούλης Αθήνα-Πειραιάς 1995, Κεφάλαιο 5ο, σελ.147-149*
- *Μαθηματικά-Θέματα για την Οικονομία και τη Διοίκηση Επιχειρήσεων, Παπαμιχαήλ Δημήτριος, Εκδόσεις Α. Σταμούλης Αθήνα-Πειραιάς 1995, Κεφάλαιο 5ο, σελ.149-151*

- http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-C117/130/944,3458/
- *Μαθηματικά-Θέματα για την Οικονομία και τη Διοίκηση Επιχειρήσεων, Παπαμιχαήλ Δημήτριος, Εκδόσεις Α. Σταμούλης Αθήνα-Πειραιάς 1995, Κεφάλαιο 5ο, σελ.152*
- *Μαθηματικά-Θέματα για την Οικονομία και τη Διοίκηση Επιχειρήσεων, Παπαμιχαήλ Δημήτριος, Εκδόσεις Α. Σταμούλης Αθήνα-Πειραιάς 1995, Κεφάλαιο 5ο, σελ.153-154*
- *https://books.google.gr/books?id=-5-WO_mZ67QC&pg=PA1022&lpg=PA1022&dq=d%CE%A0/dq%3D0&source=bl&ots=LWWJwoHft-&sig=CFj_JaejYANRpHIiX8U8K-zTtbY&hl=el&sa=X&ei=BXxrVcT5Gcn5UKaSgpgB&ved=0CD8Q6AEwBA#v=onepage&q=d%CE%A0%2Fdq%3D0&f=false*
- *https://www.google.gr/?gws_rd=ssl#q=%CE%B5%CE%BB%CE%B1%CF%87%CE%B9%CF%83%CF%84%CE%BF%CF%80%CE%BF%CE%B9%CE%B7%CF%83%CE%B7+%CE%BA%CE%BF%CF%83%CF%84%CE%BF%CF%85%CF%82&spell=1*
- *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΤΟΜΕΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ, ΒΟΣΚΟΓΛΟΥ ΓΡ. ΜΙΧΑΛΗΣ, ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15: ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ - ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ, σελ.281-283*
- *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΤΟΜΕΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ, ΒΟΣΚΟΓΛΟΥ ΓΡ. ΜΙΧΑΛΗΣ, ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15: ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ - ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ, σελ.283-286*
- *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΤΟΜΕΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ, ΒΟΣΚΟΓΛΟΥ ΓΡ. ΜΙΧΑΛΗΣ, ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15: ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ - ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ, σελ. 287-288*
- *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΤΟΜΕΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ, ΒΟΣΚΟΓΛΟΥ ΓΡ. ΜΙΧΑΛΗΣ, ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15: ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ - ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ, σελ. 288-289*
- *http://www.arnos.gr/*
- *Ποσοτικές Μέθοδοι ΔΕΟ 13 Τόμος Α, Επιχειρησιακά Μαθηματικά*
- *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΤΟΜΕΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ, ΒΟΣΚΟΓΛΟΥ ΓΡ. ΜΙΧΑΛΗΣ, ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15: ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ - ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ, σελ. 290*
- *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΤΟΜΕΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ, ΒΟΣΚΟΓΛΟΥ ΓΡ. ΜΙΧΑΛΗΣ, ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15: ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ - ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ, σελ. 291-292*