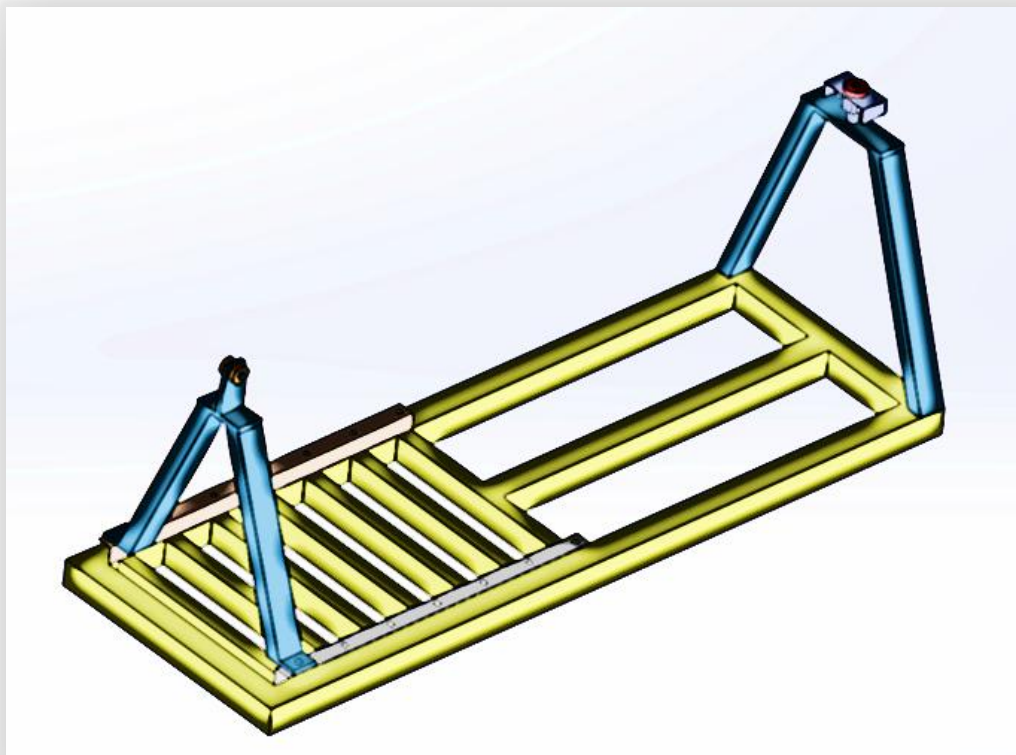


ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΔΥΤΙΚΗΣ ΕΛΛΑΔΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΤΕ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ ΚΑΜΨΗΣ ΑΜΦΙΕΡΕΙΣΤΩΝ ΔΟΚΩΝ ΤΡΙΩΝ ΚΑΙ ΤΕΣΣΑΡΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΦΟΡΤΙΣΗΣ



ΣΠΟΥΔΑΣΤΗΣ:
ΛΕΥΘΕΡΙΩΤΗΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ (Α.Μ. 6019)

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Δρ. ΤΣΙΝΟΠΟΥΛΟΣ ΣΤΕΦΑΝΟΣ

ΠΑΤΡΑ 2015

1.ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα πτυχιακή εργασία έχει τίτλο κατασκευή πειραματικής διάταξης κάμψης αμφιέριστην δοκών τριών και τεσσάρων σημείων φόρτισης και η εκπόνηση της έγινε στο Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Δυτικής Ελλάδας, στο τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών ΤΕ.

Η συγκεκριμένη πτυχιακή εργασία ήταν για εμένα μια πρόκληση ώστε να αναπτύξω τις γνώσεις μου ως προς τον τομέα της αντοχής υλικών, αλλά και στην μηχανολογία γενικότερα. Ακόμη η ενασχόληση μου με εξοπλισμό και μηχανήματα τα οποία χρησιμοποίησα για πρώτη φορά αύξησε το ενδιαφέρον μου ώστε να επιτύχω το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα.

Η πτυχιακή αποτελείται από τα ακόλουθα μέρη : θεωρία της κάμψης, σχεδίαση και κατασκευή της πειραματικής διάταξης κάμψης και πειραματική διαδικασία.

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι η κατασκευή της πειραματικής διάταξης κάμψης, η καλύτερη κατανόηση της θεωρίας αλλά ακόμα και η ανάγκη του εργαστηρίου αντοχής υλικών για μια νέα πειραματική διάταξη ώστε είναι λειτουργική αλλά και να γίνονται τα πειράματα πιο κατανοητά για τους σπουδαστές.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέπων καθηγητή της πτυχιακής εργασίας μου Δρ.Τσινόπουλο Στέφανο για την ψυχολογική κυρίως υποστήριξη καθώς και την οικογένεια μου. Τέλος να αναφέρω πως οι εργασίες έγιναν τόσο εντός του χώρου του ιδρύματος στα εργαστήρια του μηχανουργείου και του CAM/CNC, καθώς και στους χώρους του σιδηρουργείου και του ελασματοουργείου.

Υπεύθυνη Δήλωση Σπουδαστών: Ο κάτωθι υπογεγραμμένος σπουδαστής έχω επίγνωση των συνεπειών του Νόμου περί λογοκλοπής και δηλώνω υπεύθυνα ότι είμαι συγγραφέας αυτής της Πτυχιακής Εργασίας, έχω δε αναφέρει στην Βιβλιογραφία μου όλες τις πηγές τις οποίες χρησιμοποίησα και έλαβα ιδέες ή δεδομένα. Δηλώνω επίσης ότι, οποιοδήποτε στοιχείο ή κείμενο το οποίο έχω ενσωματώσει στην εργασία μου προερχόμενο από Βιβλία ή άλλες εργασίες ή το διαδίκτυο, γραμμένο ακριβώς ή παραφρασμένο, το έχω πλήρως αναγνωρίσει ως πνευματικό έργο άλλου συγγραφέα και έχω αναφέρει ανελλιπώς το όνομά του και την πηγή προέλευσης.

Ο σπουδαστής
(Ονοματεπώνυμο)

.....
(Υπογραφή)

2.ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα πτυχιακή θα πραγματοποιηθεί αναλυτικά ο σχεδιασμός και η κατασκευή της πειραματικής διάταξης κάμψης αμφιέριστων δοκών τριών και τεσσάρων σημείων φόρτισης. Η πτυχιακή αποτελείται από τρία κύρια κεφάλαια:

Πρώτο είναι το κεφάλαιο της θεωρίας της κάμψης, στο οποίο γίνεται λεπτομερής αναφορά ως προς τα μεγέθη που πρέπει να υπολογισθούν τόσο πειραματικά αλλά και θεωρητικά. Ο υπολογισμός των μεγεθών αυτών αποτελεί βασικό μέρος έτσι ώστε να εξασφαλιστεί η αντοχή και η ασφάλεια μιας κατασκευής.

Το δεύτερο κεφάλαιο αποτελείται από δύο μέρη. Το πρώτο μέρος αναφέρεται στη σχεδίαση των επιμέρους εξαρτημάτων και πλαισίων για την κατασκευή της πειραματικής διάταξης κάμψης και έγινε με χρήση του σχεδιαστικού προγράμματος Solidworks 3D CAD. Το δεύτερο μέρος του κεφαλαίου αναφέρεται αναλυτικά ως προς της κατασκευή της πειραματικής διάταξης από την αρχή έως το τέλος βήμα προς βήμα. Το σχέδιο και η κατασκευή αποτελεί εξολοκλήρου προϊόν του υπεύθυνου σπουδαστή, Λευθεριώτη Δημήτριου Νικόλαου.

Το τρίτο κεφάλαιο περιλαμβάνει αρχικά μια θεωρητική μελέτη των μεγεθών που θα υπολογισθούν κατά τη διάρκεια του πειράματος και εν συνεχεία την πειραματική διαδικασία για κάθε μια από τις δύο διατάξεις κατά τις οποίες θα χρησιμοποιηθεί η πειραματική διάταξη (διάταξη τριών και τεσσάρων σημείων φόρτισης). Στο τέλος του κεφαλαίου γίνεται μια σύγκριση των πειραματικών αποτελεσμάτων με εκείνα που υπολογίσθηκαν βάσει της θεωρίας.

Περιεχόμενα

| | |
|---|-----|
| 1. ΠΡΟΛΟΓΟΣ | ii |
| 2. ΠΕΡΙΛΗΨΗ | iii |
| 3. ΕΙΣΑΓΩΓΗ | 1 |
| 4. ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΜΨΗΣ | 3 |
| 4.1 ΚΑΜΨΗ..... | 3 |
| 4.2 ΚΑΘΑΡΗ ΚΑΙ ΓΕΝΙΚΗ ΚΑΜΨΗ..... | 4 |
| 4.3 ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΜΨΗΣ ΣΕ ΑΜΦΙΕΡΕΙΣΤΗ ΔΟΚΟ..... | 6 |
| 4.4 ΟΡΘΕΣ ΤΑΣΕΙΣ ΚΑΜΨΕΙΣ | 8 |
| 4.5 ΟΥΔΕΤΕΡΗ ΓΡΑΜΜΗ..... | 10 |
| 4.6 ΝΟΜΟΣ ΚΑΜΨΗΣ | 11 |
| 4.7 ΜΕΓΙΣΤΗ ΟΡΘΗ ΤΑΣΗ ΚΑΜΨΗΣ | 12 |
| 4.7.1 ΚΑΘΑΡΗ ΚΑΜΨΗ | 13 |
| 4.7.2 ΓΕΝΙΚΗ ΚΑΜΨΗ | 13 |
| 4.8 ΡΟΠΗ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗΣ W_b | 13 |
| 4.9 ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΡΟΠΗ ΑΝΤΙΔΡΑΣΗΣ | 14 |
| 4.10 ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΕΣ ΤΑΣΕΙΣ..... | 17 |
| 4.11 ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ | 21 |
| 5. ΣΧΕΔΙΑΣΗ – ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ | 25 |
| 5.1 ΣΧΕΔΙΑΣΗ..... | 25 |
| 5.1.1 ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΒΑΣΗ..... | 25 |
| 5.1.2 ΒΑΣΗ ΑΡΘΡΩΣΗΣ..... | 27 |
| 5.1.3 ΣΥΝΔΕΣΜΟΣ ΑΡΘΡΩΣΗΣ..... | 28 |
| 5.1.4 ΒΑΣΗ ΚΥΛΙΣΗΣ..... | 30 |
| 5.1.5 ASSEMBLY | 32 |
| 5.2 ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ..... | 34 |
| 5.2.1 ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΒΑΣΗ..... | 34 |
| 5.2.2 ΒΑΣΗ ΚΥΛΙΣΗΣ..... | 36 |
| 5.2.3 ΒΑΣΗ ΑΡΘΡΩΣΗΣ..... | 41 |
| 5.2.4 ΣΥΝΔΕΣΜΟΣ ΑΡΘΡΩΣΗΣ..... | 42 |
| 5.2.5 ΒΑΣΗ ΓΙΑ ΒΕΛΟΜΕΤΡΑ..... | 45 |
| 5.2.6 ΦΟΡΕΑΣ ΦΟΡΤΙΟΥ | 46 |
| 5.3 ΕΞΟΠΛΙΣΜΟΣ-ΜΗΧΑΝΗΜΑΤΑ | 47 |
| 6. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ – ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ | 51 |

| | |
|---|----|
| 6.1 <u>ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ</u> | 51 |
| 6.1.1 <u>ΔΙΑΤΑΞΗ ΚΑΜΨΗΣ ΑΜΦΙΕΡΕΙΣΤΗΣ ΔΟΚΟΥ ΤΡΙΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΦΟΡΤΙΣΗΣ</u> | 52 |
| 6.1.2 <u>ΔΙΑΤΑΞΗ ΚΑΜΨΗΣ ΑΜΦΙΕΡΕΙΣΤΗΣ ΔΟΚΟΥ ΤΕΣΣΑΡΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΦΟΡΤΙΣΗΣ</u> | 55 |
| 6.2 <u>ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ</u> | 57 |
| 6.2.1 <u>ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ ΚΑΜΨΗΣ ΑΜΦΙΕΡΕΙΣΤΗΣ ΔΟΚΟΥ ΤΡΙΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΦΟΡΤΙΣΗΣ</u> | 57 |
| 6.2.1 <u>ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ ΚΑΜΨΗΣ ΑΜΦΙΕΡΕΙΣΤΗΣ ΔΟΚΟΥ ΤΡΙΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΦΟΡΤΙΣΗΣ</u> | 59 |
| 6.3 <u>ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ</u> | 60 |
| 7. <u>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</u> | 63 |

3. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα πτυχιακή εργασία έχει ως αντικείμενο την κατασκευή μια πειραματικής διάταξης ώστε να γίνει κατανοητή η καταπόνηση σε κάμψη. Η κάμψη αποτελεί σημαντική έννοια στον τομέα της Αντοχής των Υλικών όπου και χρησιμοποιείται για τη μελέτη και το σχεδιασμό πολλών εξαρτημάτων μηχανών και δομικών στοιχείων. Ένα σημαντικό παράδειγμα είναι οι δοκοί.

Ένα παράδειγμα κάμψης τεσσάρων σημείων φόρτισης αποτελεί ο αλτήρας του εικονιζόμενου αθλητή όπως βλέπουμε στην εικ.3.1. Τα χέρια του βρίσκονται τοποθετημένα σε συμμετρικές αποστάσεις με αποτέλεσμα της κάμψη της ράβδου.



Εικόνα 3.1 : Κάμψη αλτήρα

Η πειραματική αυτή διάταξη κάμψης που πρόκειται να κατασκευαστεί προορίζεται να χρησιμοποιηθεί στο εργαστήριο της Αντοχής Υλικών του τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών Τ.Ε. στο Τ.Ε.Ι. Δυτικής Ελλάδας.

Οι ανάγκες του εργαστηρίου για μια νέα πειραματική διάταξη ,η οποία θα πρέπει να είναι λειτουργική για το εκπαιδευτικό προσωπικό αλλά και ταυτόχρονα απλή στη χρήση ώστε να μπορούν να κατανοούν και οι σπουδαστές τη λειτουργία της, αποτέλεσαν σημαντικούς παράγοντες για τον τρόπο κατασκευής αυτής της διάταξης.

Ο καμπτόμενος φορέας που θα χρησιμοποιηθεί είναι χαλύβδινη λάμα συμπαγούς ορθογωνικής διατομής 40mm πλάτους, 8mm ύψους και ενεργού μήκους 1.2 m.Οι δυνατότητες στήριξης της δοκού στην πειραματική διάταξη γίνονται με δύο τρόπους. Στην ένα άκρο υπάρχει η στήριξη της κύλισης και στο άλλο η στήριξη της άρθρωσης. Το πλαίσιο που φέρει τη στήριξη της κύλισης έχει δυνατότητα μετακινηθεί με χρήση κοχλιών, έτσι ώστε να μεταβάλλεται το εξεταζόμενο ενεργό μήκος της αμφιέρειστης δοκού που θέλουμε να υπολογίσουμε.

Τα όργανα μέτρησης που χρησιμοποιούνται για τις πειραματικές μετρήσεις της καταπόνησης σε κάμψη, είναι δύο βελόμετρα τα οποία είναι τοποθετημένα σε διαφορετικά σημεία της δοκού έτσι ώστε να μπορούμε να μετρήσουμε το βέλος

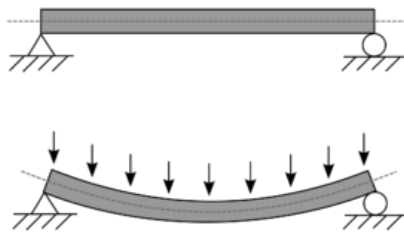
κάμψης. Αξίζει να σημειωθεί ότι η πειραματική διάταξη φέρει επάνω στην στήριξη της άρθρωσης μια δυναμοκυψέλη με εύρος από 0 έως 1000 kg η οποία υπάρχει με σκοπό της μέτρηση της κάθετης αντίδρασης καθώς και επάνω στην πειραματική δοκό έχουν τοποθετηθεί μηκυσιόμετρα ηλεκτρικής αντίστασης για μέτρηση της παραμόρφωσης. Λόγω όμως ότι υπήρξαν τεχνικά προβλήματα με τη συσκευή καταγραφής που υπήρχε στη διάθεση μας, τα αποτελέσματα των πειραματικών μετρήσεων δίνονται από τα βελόμετρα που αναφέραμε προηγουμένως.

Έτσι λοιπόν πριν ξεκινήσουμε τη διαδικασία για την κατασκευή της πειραματικής διάταξης, θα παραθέσουμε στο πρώτο κεφάλαιο της πτυχιακής εργασίας μερικά γενικά στοιχεία και έννοιες για την καταπόνηση σε κάμψη, καθώς και θα γίνει αναφορά για τα μεγέθη που θα υπολογίσουμε και κατά τη διάρκεια του πειράματος

4. ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΜΨΗΣ

4.1 ΚΑΜΨΗ

Με τον όρο κάμψη ονομάζουμε την εντατική κατάσταση στην οποία βρίσκεται μια δοκός, η οποία υποβάλλεται σε εγκάρσια φόρτιση. Αυτό παρατηρείται αν σε μια αμφιέρειστη δοκό (Σχ.4.1) είτε σε μια δοκό σε πρόβολο (Σχ. 4.2) ασκήσουμε εγκάρσιο φορτίο P , τότε θα παρατηρήσουμε ότι η δοκός θα παραμορφωθεί κατά τη διεύθυνση του ασκούμενου φορτίου και ο διαμήκης άξονας της θα καμφθεί όπως φαίνεται παρακάτω στα σχήματα.

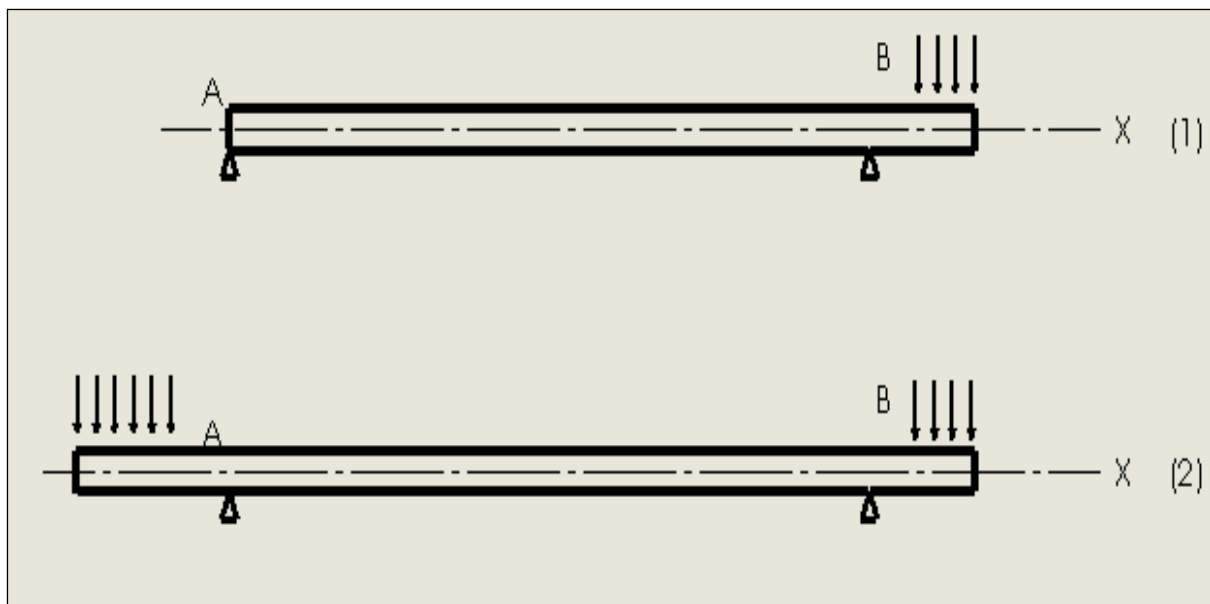


Σχήμα 4.1: Αμφιέρειστης στήριξης δοκός σε κάμψη



Σχήμα 4.2 : Δοκός σε στήριξη προβόλου

Το φαινόμενο της κάμψης παρατηρείται σε προβόλους, αμφιέρειστες δοκούς, μονοπρόεχουσες δοκούς (Σχ. 4.3.1), αμφιπρόεχουσες δοκούς (Σχ. 4.3.2) και γενικά σε πολλές τεχνικές κατασκευές που συναντάμε στην πράξη. Όσο συμβαίνει η καταπόνηση σε κάμψη, αναπτύσσονται καμπτικές ροπές οι οποίες προκαλούν καμπύλωση της δοκού αλλά παράλληλα υπάρχει δημιουργία τάσεων εντός του υλικού της δοκού. Συνεπώς με τον όρο κάμψη αναφερόμαστε στις αναπτυσσόμενες τάσεις αλλά και στις προκαλούμενες παραμορφώσεις, οι οποίες ονομάζονται βέλη κάμψης.



Σχήμα 4.3 : Στην περίπτωση (4.3.1) έχουμε την μονοπρόεχουσα δοκό και στην (4.3.2) την αμφιπρόεχουσα

4.2 ΚΑΘΑΡΗ ΚΑΙ ΓΕΝΙΚΗ ΚΑΜΨΗ

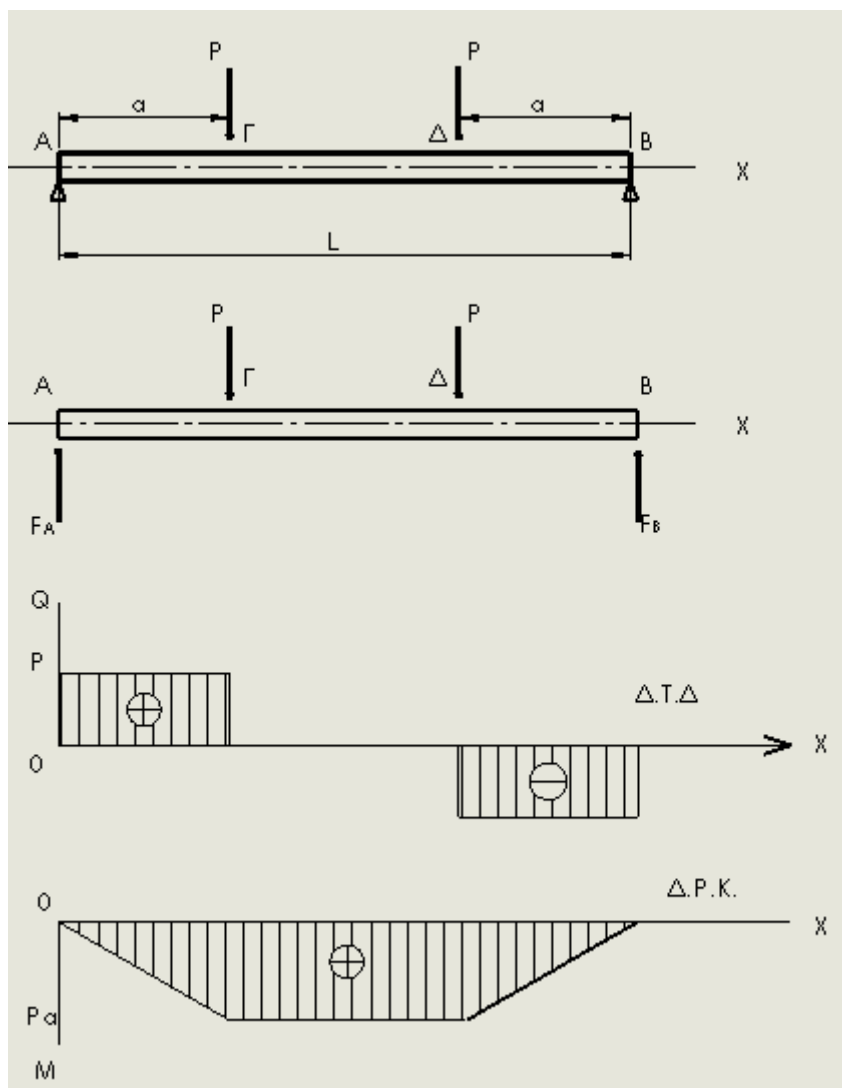
Η δοκός είναι ένας ευθύγραμμος φορέας, ο οποίος παραλαμβάνει αξονικά ή εγκάρσια φορτία, τα οποία στη συνέχεια τα μεταφέρει στις στηρίξεις του αναπτύσσοντας ταυτόχρονα αξονικές και τέμνουσες δυνάμεις καθώς και καμπτικές ροπές στο εσωτερικό του υλικού της.

Με τον όρο φορτίο αναφερόμαστε σε δυνάμεις αλλά και σε ροπές, από την ύπαρξη των οποίων δημιουργείται αξονική δύναμη, τέμνουσα δύναμη και καμπτική ροπή σε κάθε σημείο της διατομής της φορτιζόμενης δοκού.

Όταν στη δοκό εφαρμόσουμε εγκάρσια δύναμη ή καμπτική ροπή ή και τα δύο παραπάνω ταυτόχρονα, τότε το υλικό της δοκού θα βρεθεί σε εντατική κατάσταση και η δοκός θα καμφθεί. Η παραπάνω καταπόνηση διακρίνεται σε δύο βασικά είδη τα οποία είναι :

- α) η περίπτωση της καθαρής κάμψης , κατά την οποία στην φορτισμένη δοκό ή σε τμήμα της δοκού εμφανίζεται μόνο καμπτική ροπή.
- β) η περίπτωση της γενικής κάμψης , κατά την οποία εκτός της καμπτικής ροπής εμφανίζεται και τέμνουσα δύναμη.

Έστω ότι έχουμε μια αμφιέρειστη δοκό AB ,με μήκος L , στην οποία ασκούνται δύο ίσα φορτία P σε ίσες αποστάσεις a από τις στηρίξεις της δοκού. Από τη στατική και τις συνθήκες στατικής ισορροπίας προκύπτει με υπολογισμούς ότι οι αντιδράσεις των στηρίξεων είναι F_A , F_B οι οποίες λόγω συμμετρίας είναι ίσες. Έτσι προκύπτει ότι $F_A = F_B = P$. Στη συνέχεια σχεδιάζουμε το διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων και το διάγραμμα καμπτικών ροπών (Σχ. 4.4) .



Σχήμα 4.4 : Διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων και καμπτικών ροπών σε αμφιέρειστη δοκό AB

Από τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων και καμπτικών ροπών παρατηρούμε τα εξής :

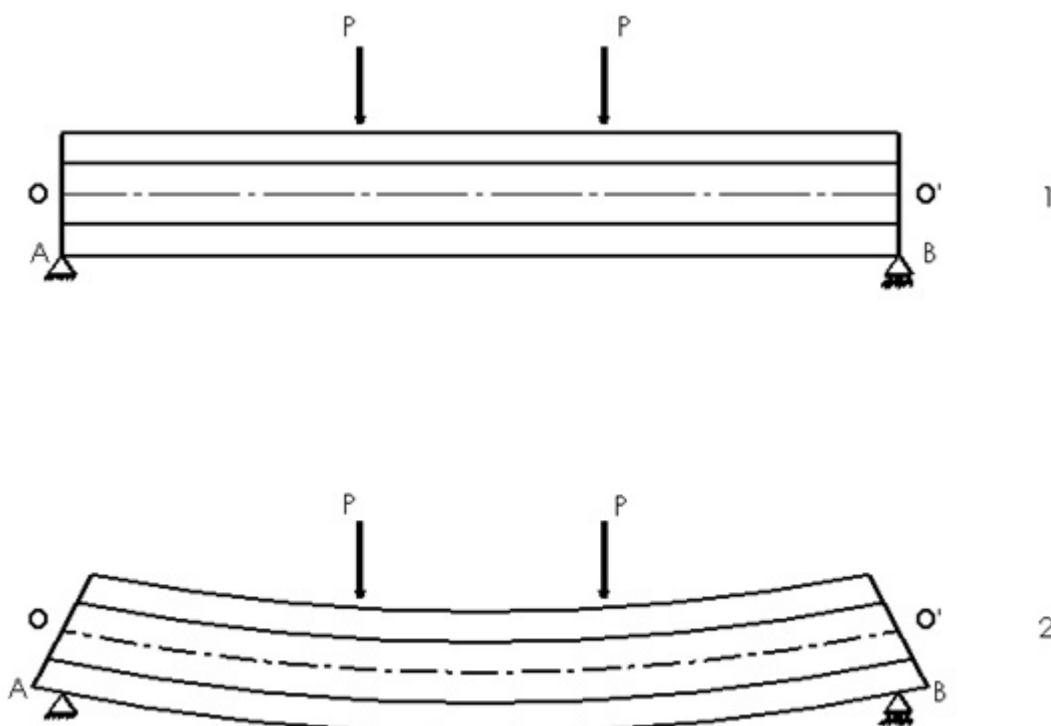
α) Στο τμήμα ΓΔ της δοκού παρατηρούμε ότι υπάρχει μόνο καμπτική ροπή με σταθερή τιμή η οποία ισούται με $M = P \cdot a$, καθώς η τέμνουσα δύναμη Q είναι ίση με μηδέν. Συνεπώς το τμήμα ΓΔ της δοκού βάσει των παραπάνω υπόκειται σε καθαρή κάμψη.

β) Αντίθετα στα τμήματα ΑΓ και ΔΒ της δοκού, πέραν της καμπτικής ροπής έχουμε και τέμνουσα δύναμη Q η οποία από υπολογισμούς προκύπτει ίση με P .Έτσι σε αυτά τα δύο τμήματα έχουμε την περίπτωση της γενικής κάμψης.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι οι εσωτερικές δυνάμεις που αναπτύσσονται στο υλικό κατά την κάμψη είναι τέμνουσες δυνάμεις και καμπτικές ροπές.

4.3 ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΜΨΗΣ ΣΕ ΑΜΦΙΕΡΕΙΣΤΗ ΔΟΚΟ

Για να ξεκινήσουμε την ανάλυση, αρχικά θα θεωρήσουμε ότι έχουμε μια αμφιέρειστη δοκό η οποία δεν δέχεται φορτίο. Ακόμα θεωρούμε ότι το ίδιο βάρος της είναι αμελητέο. Έτσι ο διαμήκης άξονας, ο οποίος διέρχεται από το μέσον της δοκού OO' είναι ευθύγραμμος (Σχ. 4.5.1). Όταν όμως στη συνέχεια επιβάλλουμε εγκάρσιες δυνάμεις ως προς τον άξονα της (OO') ή ροπές κάμψης, τότε η δοκός θα καμπυλωθεί προς την φορά των επενεργουσών δυνάμεων ή ροπών και ο άξονας της από ευθύγραμμος θα λάβει τη μορφή καμπύλης γραμμής (Σχ. 4.5.2). Έστω λοιπόν για την ευκολότερη κατανόηση και ανάλυση της κάμψης, ότι η δοκός αποτελείται από ίνες αλληλένδετες μεταξύ τους οι οποίες διατάσσονται οριζόντια και παράλληλα μεταξύ τους υπό μορφή στρωμάτων.

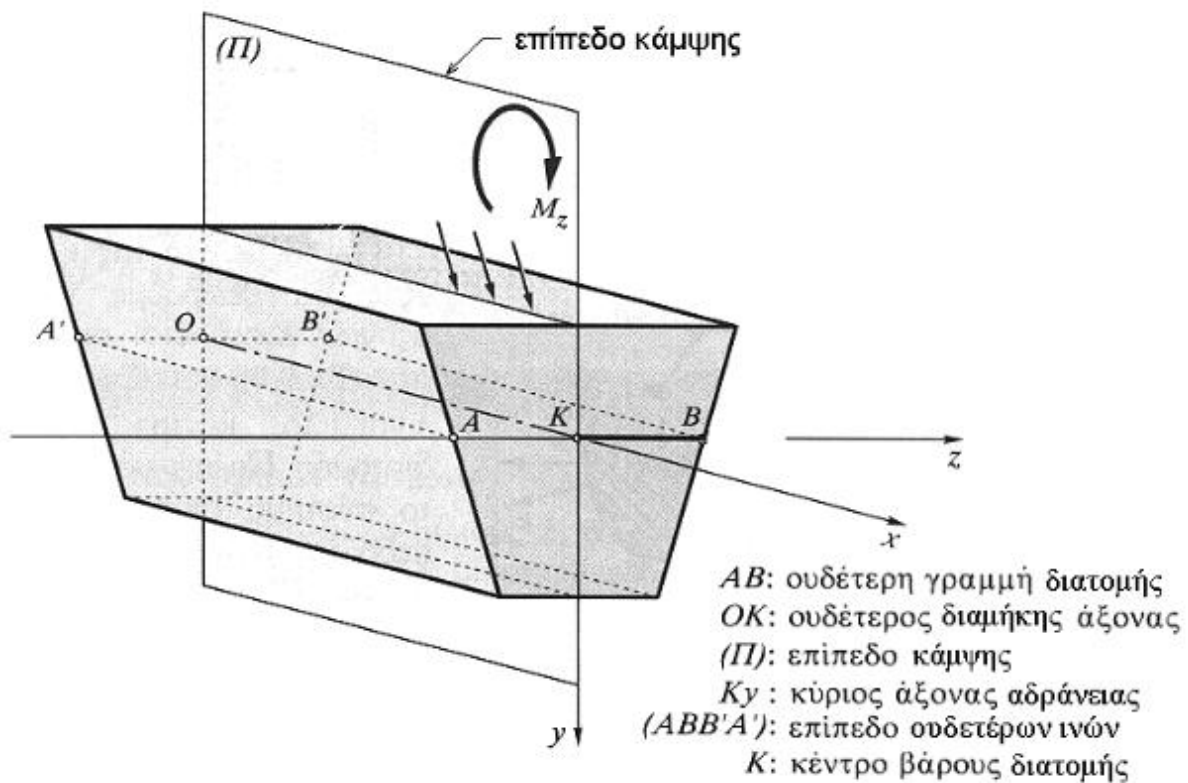


Σχήμα 4.5 : Αμφιέρειστη δοκός πριν τη φόρτιση (4.5.1) και μετά τη φόρτιση (4.5.2)

Όπως μπορούμε να διακρίνουμε στα παραπάνω σχήματα (4.5.1 , 4.5.2) ,μετά την επιβολή φορτίου στην δοκό και την καμπύλωση του άξονα OO' παρατηρείται ότι οι άνω ίνες της δοκού επιβραχύνονται, ενώ ταυτόχρονα οι κάτω ίνες της δοκού επιμηκύνονται. Συνεπώς προκύπτει το συμπέρασμα ότι οι ίνες που βρίσκονται επάνω από τον άξονα της δοκού (OO') δέχονται καταπόνηση σε θλίψη, ενώ εκείνες που βρίσκονται κάτω από τον άξονα εφελκύνονται. Για το λόγο όμως ότι το υλικό της δοκού δεν εμφανίζει κενά εντός της μάζας του, η παραμόρφωση που δέχεται είναι συνεχής με συνέπεια να υπάρχει βαθμιαία μεταβολή από το φαινόμενο της θλίψης στο φαινόμενο του εφελκυσμού.

Από τα παραπάνω προκύπτει το συμπέρασμα, ότι υπάρχουν ενδιάμεσες θέσεις της διατομής της δοκού στις οποίες οι ίνες δεν υφίστανται καμία μεταβολή ως προς το μήκος τους, με συνέπεια να μην καταπονούνται ούτε από εφελκυστικά αλλά ούτε από θλιπτικά φορτία. Η καταπόνηση που δέχονται αυτές οι ενδιάμεσες ίνες είναι διατμητική και αυτό συμβαίνει λόγω της ολίσθησης μεταξύ των άνω και κάτω στρωμάτων.

Έτσι προκύπτει ότι η κάμψη είναι μια σύνθετη καταπόνηση, η οποία με τη σειρά της αναλύεται σε εφελκυσμό, σε θλίψη και σε διάτμηση.



Σχήμα 4.6 : Άξονες και επίπεδα διατομής

Το επίπεδο των ινών το οποίο δεν καταπονείται σε εφελκυσμό αλλά ούτε και σε θλίψη, παρά μόνο σε διάτμηση ονομάζεται ουδέτερο επίπεδο και οι ίνες από τις οποίες αποτελείται ονομάζονται ουδέτερες ίνες. Το επίπεδο αυτό φαίνεται στον παραπάνω σχήμα (Σχ. 4.6) και είναι το επίπεδο $ABB'A'$. Ο άξονας OK ως προς την x διεύθυνση ονομάζεται ουδέτερος άξονας και είναι η τομή του ουδέτερου επιπέδου με το επίπεδο συμμετρίας της δοκού xy . Οι γραμμές AB και $A'B'$ επάνω στη διατομή του επιπέδου ονομάζονται ουδέτερες γραμμές.

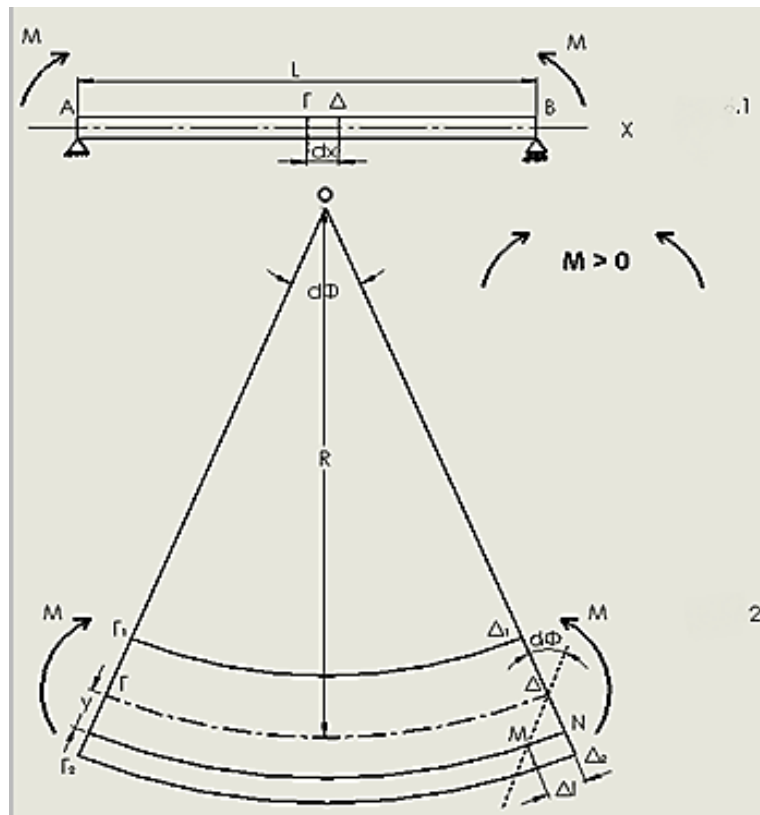
Το επίπεδο φόρτισης (Π) περιέχει τα εξωτερικά φορτία που επιδρούν στη δοκό καθώς και τον κεντροβαρικό άξονα της δοκού Ox . Για την περίπτωση της παραπάνω διατομής, ο κύριος άξονας είναι ο y λόγω ότι αποτελεί και άξονα συμμετρίας της διατομής, με αποτέλεσμα το διάνυσμα της καμπτικής ροπής να βρίσκεται στον άλλο κεντροβαρικό άξονα αδρανείας της διατομής, τον Kz , ο οποίος είναι κάθετος στο επίπεδο φόρτισης και έτσι μπορούμε να δώσουμε το συμβολισμό M_z στην καμπτική ροπή.

4.4 ΟΡΘΕΣ ΤΑΣΕΙΣ ΚΑΜΨΗΣ

Για να μιλήσουμε για την κατανομή των ορθών τάσεων σε μια δοκό η οποία υπόκειται σε κάμψη, θα θεωρήσουμε αμφιέριστη δοκό AB με μήκος L στην οποία ασκούνται στα άκρα της δύο ίσες και αντίθετες σε φορά ροπές M. Με την θεώρηση αυτή, η δοκός υπόκειται σε καθαρή κάμψη διότι σε κάθε σημείο της διατομής της ασκείται σταθερή ροπή M (Σχ.4.7.1), με αποτέλεσμα η δοκός να δεχθεί κυκλική παραμόρφωση.

Στη συνέχεια κάνουμε δύο τομές στα σημεία Γ και Δ και μεταξύ αυτών των σημείων παίρνουμε ένα στοιχειώδες τμήμα της δοκού dx. Οι τομές Γ και Δ παραμένουν κάθετες στον ουδέτερο άξονα της δοκού και μετά την παραμόρφωση. Έτσι η διατομή Γ₁, Γ₂ του στοιχειώδους τμήματος dx στράφηκε κατά γωνία dφ ως προς της διατομή Δ₁, Δ₂. Εάν στη συνέχεια προεκτείνουμε τις διατομές Γ₁, Γ₂ και Δ₁, Δ₂ θα έχουμε το σημείο τομής Ο των διατομών, βάσει του οποίου ορίζουμε την ακτίνα R ή αλλιώς ακτίνα καμπυλότητας (Σχ 4.7.2). Το αντίστροφο της ακτίνα καμπυλότητας ορίζεται ως K και ονομάζεται καμπυλότητα.

$$K = \frac{1}{R} \dots (1)$$



Σχήμα 4.7 : Κυκλική παραμόρφωση στοιχειώδους τμήματος dx

Όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.7.2 ,σε τυχαία απόσταση y από τον ουδέτερο άξονα $\Gamma\Delta$ της διατομής, υπάρχει μια παράλληλη ίνα, το μήκος της οποίας έχει αυξηθεί από το αρχικό κατά Δl . Βάσει ομοιότητας τριγώνων μεταξύ των $O\Gamma\Delta$ και ΔMN ισχύει η παρακάτω σχέση :

$$\frac{\Delta l}{L} = \frac{y}{R} \dots (2)$$

Ο λόγος $\frac{\Delta l}{L}$ είναι γνωστός με τον όρο παραμόρφωση ε , για την οποία γνωρίζουμε από το νόμο του Hooke ότι ισχύει :

$$\sigma = \varepsilon \cdot E \dots (3.1) \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \dots (3.2)$$

Επομένως η εξ.(2) μέσω των εξ. (3.1) και (3.2) γράφεται ως εξής :

$$\sigma = \frac{E}{R} \cdot y \dots (4)$$

Η εξ. (4) εκφράζει τη γραμμική μεταβολή μεταξύ των ορθών τάσεων σ ,συναρτήσει της απόστασης y από τον ουδέτερο άξονα της διατομής και προκύπτει το συμπέρασμα ότι η ορθή τάση που αναπτύσσεται σε τυχαίο σημείο της διατομής μιας δοκού που υπόκειται σε κάμψη είναι ανάλογη της απόστασης του σημείου αυτού από την ουδέτερη γραμμή. Έτσι προκύπτει ακόμα ότι επάνω στην ουδέτερη γραμμή η ορθή τάση ισούται με μηδέν.

Μπορούμε ακόμα να δούμε στην εξ. (4) ότι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού E , όπως και η R είναι σταθερά μεγέθη. Έτσι προκύπτει ότι ο λόγος $\frac{E}{R} = C$ είναι σταθερός, επομένως και η εξίσωση λαμβάνει τη μορφή :

$$\sigma = C \cdot y \dots (5.1) \Leftrightarrow \frac{\sigma}{y} = \frac{E}{R} \dots (5.2)$$

Για να δούμε λοιπόν την κατανομή των ορθών τάσεων σε μια καμπτόμενη δοκό θεωρούμε ότι μια δοκός, στην οποία ασκείται θετική ροπή κάμψης και έστω ότι y_a^{\max} , y_u^{\max} είναι οι μέγιστες αποστάσεις από την ουδέτερη γραμμή έως τις άνω και κάτω ίνες αντίστοιχα (Σχ.4.8) και E είναι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού για εφελκυσμό και θλίψη. Επομένως, με τα νέα αυτά δεδομένα και την εξ. (4) μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέγιστη εφελκυστική και θλιπτική τάση , όπου είναι :

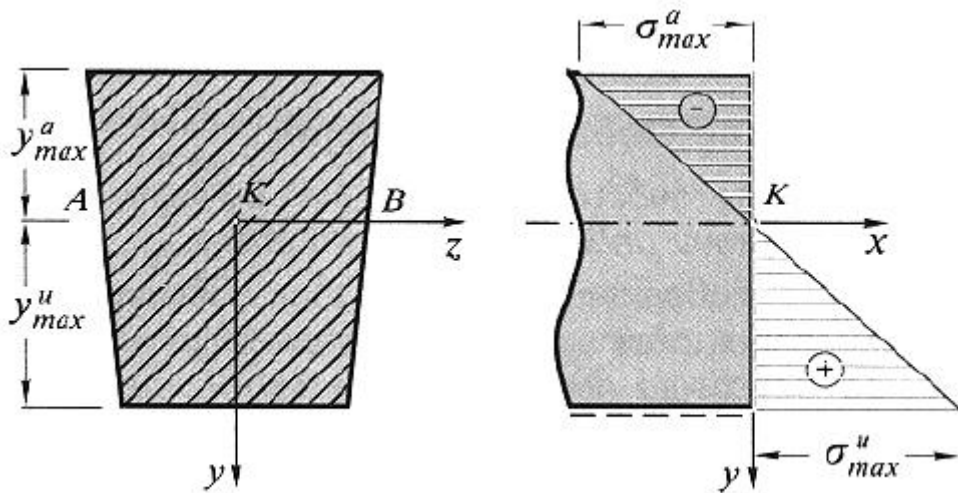
$$\sigma_{max}^u = \frac{E}{R} \cdot y_{max}^u \dots (6.1) \quad \text{και} \quad \sigma_{max}^a = \frac{E}{R} \cdot y_{max}^a \dots (6.2)$$

Τις παραπάνω εξισώσεις (6.1) και (6.2) μέσω της εξίσωσης (5.1) μπορούμε να τις ξαναγράψουμε και ως εξής :

$$\sigma_{max}^u = C \cdot y_{max}^u \dots (7.1) \quad \text{και} \quad \sigma_{max}^a = C \cdot y_{max}^a \dots (7.2)$$

Επομένως μπορούμε να συμπεράνουμε από τις εξισώσεις (7.1) και (7.2) ότι τις μέγιστες ορθές καταπονήσεις σε μια δοκό τις δέχονται οι ίνες που βρίσκονται στα άνω και κάτω άκρα της δοκού.

Πιο συγκεκριμένα, εφαρμόζοντας θετική ροπή κάμψης σε μια αμφίεριστη δοκό, με εγκάρσιες δυνάμεις οι οποίες έχουν φορά από πάνω προς τα κάτω (βλ. Σχ. 4.5.2) , οι άνω ίνες υφίστανται μέγιστες θλιπτικές τάσεις, ενώ οι κάτω ίνες μέγιστες εφελκυστικές τάσεις (Σχ. 4.8). Για δοκό σε πρόβολο ισχύει ακριβώς το αντίθετο.



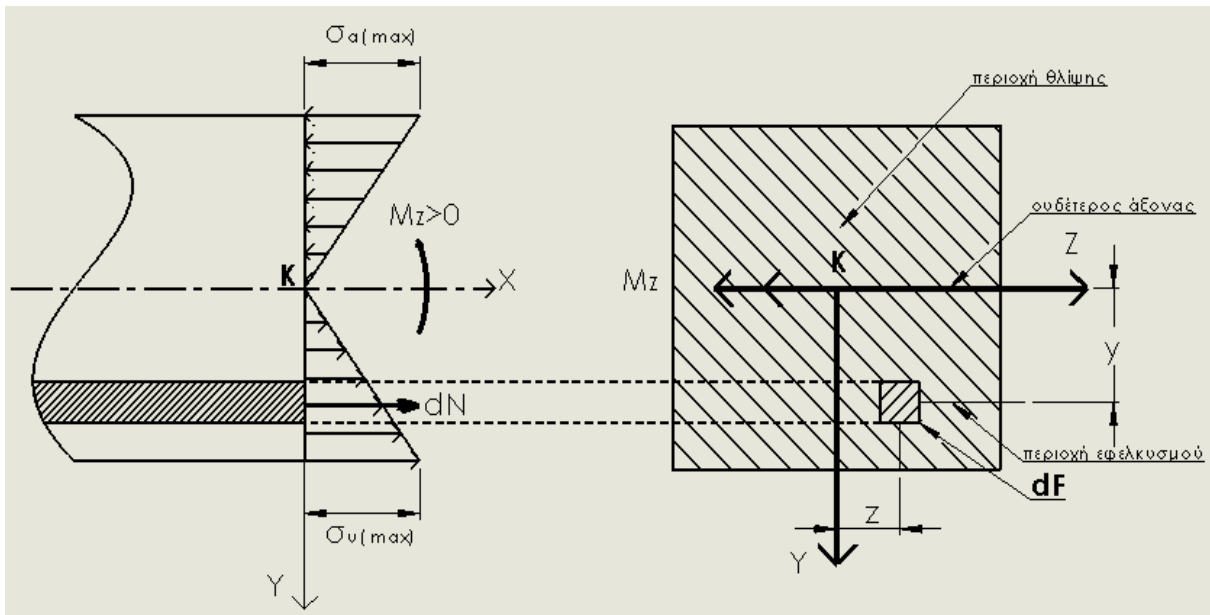
Σχ. 4.8 Τριγωνική κατανομή ορθών τάσεων

Η κατανομή των ορθών τάσεων σε μια δοκό που υπόκειται σε κάμψη είναι τριγωνική, όπως φαίνεται στο δεξί μέρος του παραπάνω σχήματος (Σχ. 4.8) .

4.5 ΟΥΔΕΤΕΡΗ ΓΡΑΜΜΗ

Με τον όρο ουδέτερη γραμμή, αναφερόμαστε στα σημεία εκείνα της διατομής τα οποία διατηρούν μηδενικές τάσεις ακόμα και όταν η διατομή βρίσκεται σε καταπόνηση. Για τον υπολογισμό και τον καθορισμό της θέσης της ουδέτερης γραμμής σε μια δοκό η οποία υπόκειται σε κάμψη θα χρησιμοποιήσουμε τη στατική συνθήκη ισορροπίας. Δηλαδή το αλγεβρικό άθροισμα όλων των δυνάμεων που είναι παράλληλες με τον άξονα της δοκού , το οποίο λόγω ότι βρισκόμαστε σε συνθήκη ισορροπίας πρέπει να είναι ίσο με μηδέν.

Επομένως με δύο τομές στη δοκό ,θεωρούμε ότι αποκόπτουμε δυο διατομές της, οι οποίες απέχουν μεταξύ τους μια στοιχειώδη απόσταση dx . Στη μια εκ των δύο διατομών θεωρούμε μια στοιχειώδη επιφάνεια dF , η οποία βρίσκεται σε απόσταση y από την ουδέτερη γραμμή, και επάνω σε αυτήν επενεργεί μια στοιχειώδης δύναμη dN (Σχ. 4.9) .



Σχ. 4.9 Πλάγια όψη και πρόοψη τμήματος της καμπτόμενης δοκού

Από τον ορισμό της ορθής τάσης έχουμε:

$$\sigma = \frac{dN}{dF} \Leftrightarrow dN = \sigma \cdot dF \dots (8)$$

Την εξ. (8) μπορούμε να την ξαναγράψουμε μέσω της (4) ως εξής :

$$dN = \frac{E}{R} \cdot y \cdot dF \dots (9)$$

Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε τη στατική συνθήκη ισορροπία ως προς τον οριζόντιο άξονα, κατά την οποία πρέπει η δύναμη N να ισούται με μηδέν και ολοκληρώνουμε την παραπάνω σχέση (9). Έτσι έχουμε :

$$N = \frac{E}{R} \cdot \int_F y \cdot dF = 0 \dots (10)$$

Για να ικανοποιηθεί η εξ. (10) , έχοντας ως δεδομένο ότι ο λόγος $\frac{E}{R} \neq 0$, μπορεί να συμβεί όταν μηδενίζεται το ολοκλήρωμα. Αυτό εκφράζει τη στατική ροπή της διατομής ως προς την ουδέτερη γραμμή, δηλαδή όταν συμπίπτει με τον άξονα Z της διατομής, πράγμα που σημαίνει ότι η ουδέτερη γραμμή είναι και κεντροβαρική. Επομένως η ουδέτερη γραμμή διαχωρίζει τη διατομή σε εφελκυσόμενη και θλιβόμενη περιοχή.

4.6 ΝΟΜΟΣ ΚΑΜΨΗΣ

Εντός του επιπέδου συμμετρίας μια διατομής που υπόκειται σε κάμψη, ενεργεί η ροπή κάμψης. Για το λόγο αυτό για κάθε ροπή κάμψης θα υπάρχει πάντοτε μια ίση και αντίθετη με αποτέλεσμα την αλληλεξουδετέρωση της. Επομένως κατά τη διεύθυνση του άξονα y, η συνιστώσα της ροπής κάμψης M_y είναι ίση με μηδέν. Άρα όταν δεν υπάρχει επίπεδο συμμετρίας εφαρμόζουμε την παραπάνω στατική συνθήκη για το στοιχειώδες τμήμα της διατομής που αναφερθήκαμε παραπάνω και έχουμε:

$$M_y = \int_F Z \cdot \sigma \cdot dF = 0 \Leftrightarrow M_y = \int_F Z \cdot \frac{E}{R} \cdot y \cdot dF = 0 \Leftrightarrow M_y = \frac{E}{R} \int_F Z \cdot y \cdot dF = 0 \dots (11)$$

Στην παραπάνω εξ. (11), το ολοκλήρωμα $\int_F Z \cdot y \cdot dF$, εκφράζει το γινόμενο αδράνειας της διατομής I_{zy} και ισούται με μηδέν όταν οι άξονες z και y είναι κεντροβαρικοί άξονες της διατομής. Επομένως εάν ενεργούν φορτία κατά τον άξονα y της διατομής, τότε ουδέτερος άξονας είναι ο z και το αντίστροφο.

Μια άλλη περίπτωση είναι όταν έχουμε ως επίπεδο φόρτισης το xy επίπεδο, το οποίο όμως δεν αποτελεί επίπεδο συμμετρίας της διατομής. Για την περίπτωση αυτή λοιπόν, για να έχουμε την ουδέτερη γραμμή κάθετη ως προς το επίπεδο φόρτισης πρέπει οι άξονες y και z να είναι κύριοι άξονες αδρανείας της διατομής, ώστε η ροπή αδρανείας I_{yz} να είναι μηδενική. Εάν βέβαια στο επίπεδο φόρτισης δεν περιέχεται κανένας κύριος άξονας αδρανείας προκύπτει ότι και η ουδέτερη γραμμή δεν θα είναι κάθετη σε αυτό.

Συνοπτικά, η καμπτική ροπή M_z που ενεργεί σε μια δοκό είναι το άθροισμα των ροπών των στοιχειωδών δυνάμεων $\sigma \cdot dF$ ως προς τον άξονα x της διατομής και ισχύει ανεξάρτητα από τον αν είναι ή όχι συμμετρική η διατομή της δοκού. Έτσι ισχύει ότι :

$$M_z = \int_F y \cdot \sigma \cdot dF \Leftrightarrow M_z = \int_F y \cdot \frac{E}{R} \cdot y \cdot dF = \frac{E}{R} \int_F y^2 \cdot dF \dots (12)$$

Στη εξ. (12) υπάρχει το ολοκλήρωμα $\int_F y^2 \cdot dF$, το οποίο αντιπροσωπεύει τη δευτεροβάθμια ροπή αδράνειας της διατομής ως προς τον άξονα Z (I_z), όπου παράλληλα αποτελεί και την ουδέτερη γραμμή της διατομής. Οπότε για τις ορθές τάσεις ως προς τον x άξονα προκύπτει από συνδυασμό των εξισώσεων (5.2) και (12) και γνωρίζοντας ότι $I_z = \int_F y^2 \cdot dF$ το εξής :

$$M_z = \frac{E}{R} \cdot I_z \Leftrightarrow M_z = \frac{\sigma_x}{y} \cdot I_z \Leftrightarrow \sigma_x = \frac{M_z}{I_z} \cdot y \dots (13)$$

Στην παραπάνω εξίσωση(13) με το γράμμα y αντιπροσωπεύεται η απόσταση του εκάστοτε σημείου που εξετάζουμε σε σχέση με το την ουδέτερη γραμμή και έτσι η εξίσωση αυτή αποτελεί το νόμο των ορθών τάσεων και εκφράζει ότι η ορθή τάση που αναπτύσσεται σε μια διατομή είναι ανάλογη με την απόσταση του εξεταζόμενου σημείου από την ουδέτερη γραμμή, καθώς και της ροπής κάμψης ως προς τον z άξονα, ενώ είναι αντιστρόφως ανάλογη της ροπής αδρανείας της διατομής.

4.7 ΜΕΓΙΣΤΗ ΟΡΘΗ ΤΑΣΗ ΚΑΜΨΗΣ

Στα περισσότερα πρακτικά προβλήματα κάμψης που αντιμετωπίζουμε, το αποτέλεσμα που αναζητούμε ως επί το πλείστον είναι η μέγιστη ορθή τάση που αναπτύσσεται εντός του υλικού. Ο λόγος είναι διότι για να εξασφαλίσουμε την αντοχή μιας καμπτόμενης δοκού, πρέπει η μέγιστη ορθή τάση που αναπτύσσεται στο υλικό να είναι μικρότερη ή ακόμα ίση με την επιτρεπόμενη τάση του υλικού.

4.7.1 ΚΑΘΑΡΗ ΚΑΜΨΗ

Για να υπολογίσουμε τη μέγιστη ορθή τάση (σ_{max}) που αναπτύσσεται κατά την καθαρή κάμψη της δοκού στο υλικό, πρέπει να προσδιορίσουμε τα σημεία εκείνα των ινών που απέχουν την μέγιστη απόσταση από τον ουδέτερο άξονα (y_{max}), έτσι από την εξίσ. (13) έχουμε :

$$\sigma_{x(max)} = \frac{M_z}{I_z} \cdot y_{max} \dots (14)$$

4.7.2 ΓΕΝΙΚΗ ΚΑΜΨΗ

Στο πλήθος όμως των περιπτώσεων επικρατεί η περίπτωση της γενικής κάμψης, καθώς η φόρτιση της δοκού προέρχεται από κάθετα φορτία με αποτέλεσμα η ροπή κάμψης να μεταβάλλεται λόγω της απόστασης x . Επομένως η μέγιστη ορθή τάση στην περίπτωση της γενικής κάμψης, είναι στο σημείο της διατομής της καμπτόμενης δοκού όπου υπάρχει η μέγιστη τιμή ροπής κάμψης ($M_{z(max)}$ ή αλλιώς M_{max}) και ισχύει ότι αναπτύσσεται στα σημεία εκείνα των ινών που απέχουν την μέγιστη απόσταση από τον ουδέτερο άξονα (y_{max}) όπως στην περίπτωση της καθαρής κάμψης. Για τον προσδιορισμό της μέγιστης ροπής κάμψης χρησιμοποιούμε κατά βάση τα διαγράμματα ροπών κάμψης όπως είδαμε σε προηγούμενη ενότητα (βλ. Σχ.4.4). Άρα ισχύει η εξίσωση:

$$\sigma_{x(max)} = \frac{M_{z(max)}}{I_z} \cdot y_{max} \dots (15)$$

4.8 ΡΟΠΗ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗΣ W_b

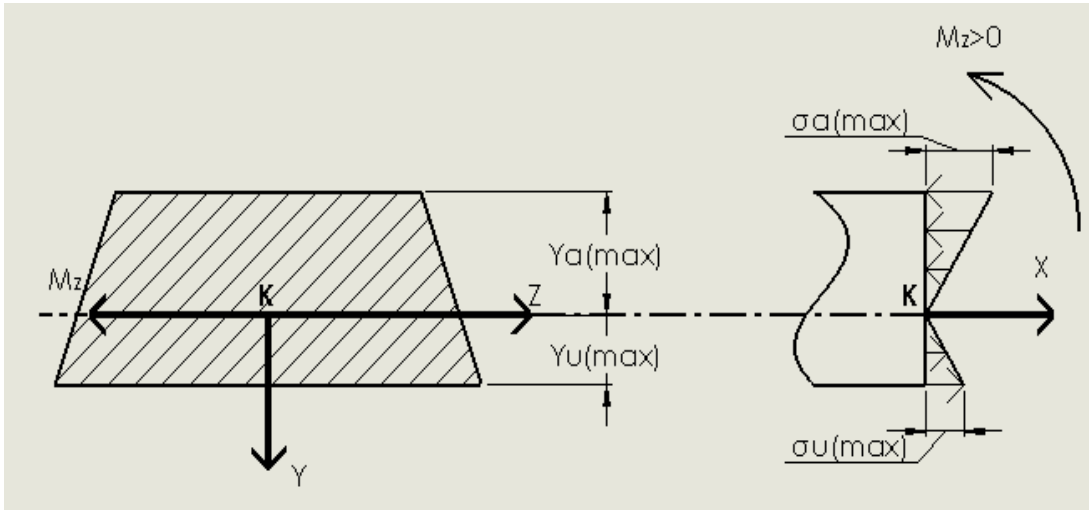
Για λόγους συντομίας αλλά και διευκόλυνσης ορίζουμε τη ροπή αντίστασης της διατομής ως προς τον άξονα z , τη W_b ($W_{b(z)}$), η οποία είναι το πηλίκο της ροπής αδράνειας της διατομής ως προς τον άξονα Z (I_z) προς τη μέγιστη απόσταση της καμπτόμενης ίνας της διατομής από τον ουδέτερο άξονα (y_{max}):

$$W_b = \frac{I_z}{y_{(max)}} \dots (16)$$

Η μονάδες μέτρησης της ροπής αντίστασης είναι συνήθως [mm^3] στη μηχανολογία και εξαρτάται κυρίως από το γεωμετρικό σχήμα της διατομής.

Ακόμα λόγω ότι η διατομή χωρίζεται σε θλιβόμενη και εφελκυσμένη περιοχή έχουμε αντίστοιχα και δύο ροπές αντίστασης. Αυτό συμβαίνει διότι ο ουδέτερος άξονας δεν αποτελεί πάντοτε και άξονα συμμετρίας της διατομής καθώς τα γεωμετρικά σχήματα των διατομών ποικίλουν (σχ. 4.10). Έτσι για τη μέγιστη απόσταση από τη θλιβόμενη ίνα έχουμε το συμβολισμό y_{max}^a , ενώ από την εφελκυσμένη είναι y_{max}^u . Βάσει αυτών ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις για τις αντίστοιχες ροπές αντίστασης ανά περίπτωση.

$$W_b^u = \frac{I_z}{y_{max}^u} \dots (17.1) \quad \text{και} \quad W_b^a = \frac{I_z}{y_{max}^a} \dots (17.2)$$

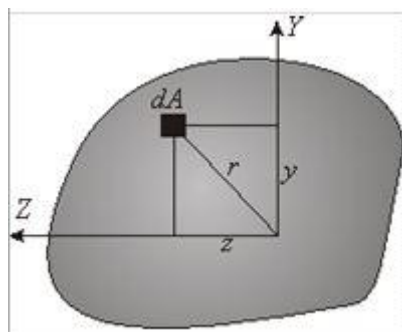


Σχ.4.10 Πρόοψη και προφίλ ορθών τάσεων ασύμμετρου τμήματος της καμπτόμενης δοκού

4.9 ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

Ροπή αδράνειας επιφάνειας ονομάζουμε τη ροπή αδράνειας ενός λεπτότοιχου σώματος, το οποίο έχει ομοιόμορφη μάζα και το πάχος του τείνει να είναι μηδενικό. Η ροπή αδράνειας μιας στοιχειώδους διατομής ως προς έναν άξονα εκφράζεται ως το γινόμενο του εμβαδού της διατομής επί το τετράγωνο της απόστασης της από τον άξονα. Εάν λοιπόν αθροίσουμε τις στοιχειώδεις αυτές ροπές αδράνειας, προκύπτει η δευτεροβάθμια ροπή αδράνειας της επιφάνειας ως προς τον άξονα.

Έστω ότι έχουμε μια στοιχειώδη επιφάνεια dA σε σύστημα συντεταγμένων ZOY , η οποία απέχει απόσταση z από τον άξονα y , y από τον άξονα z και r από το O (Σχ.4.11).



Σχήμα 4.11 : Στοιχειώδης επιφάνεια dA

Δευτεροβάθμια ροπή αδράνειας ως προς τον z άξονα :

$$I_z = \int_A y^2 \cdot dA \dots (18.1)$$

Δευτεροβάθμια ροπή αδράνειας ως προς τον y άξονα :

$$I_y = \int_A z^2 \cdot dA \dots (18.2)$$

Δευτεροβάθμια ροπή εκτροπής ως προς τους άξονες y και z:

$$I_{zy} = \int_A z \cdot y \cdot dA \dots (18.3)$$

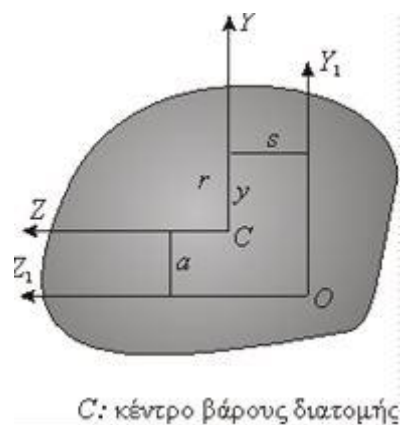
Η δευτεροβάθμια ροπή εκτροπής I_{zy} μηδενίζεται σε περίπτωση που η επιφάνεια έχει έστω και έναν άξονα συμμετρίας.

Πολική ροπή αδράνειας

$$I_p = \int_A r^2 \cdot dA = \int_A (z^2 + y^2) \cdot dA \Rightarrow I_p = I_z + I_y \dots (18.4)$$

- ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΑΞΟΝΩΝ (ΘΕΩΡΗΜΑ STEINER)

Το θεώρημα του παράλληλων αξόνων του Steiner, αναφέρει ότι η ροπή αδράνειας μιας επιφάνειας ως προς έναν άξονα που είναι παράλληλος με τον κεντροβαρικό της επιφάνειας, ισούται με τη ροπή αδράνειας ως προς τον κεντροβαρικό άξονα συν το γινόμενο του εμβαδού της επιφάνειας επί το τετράγωνο της απόστασης του κέντρου βάρους της από τον άξονα αυτό.



Σχήμα 4.11: Εφαρμογή θεωρήματος Steiner σε τυχαία διατομή
Για την παραπάνω διατομή(σχ. 4.11), βάση του θεωρήματος του Steiner για τις δευτεροβάθμιες ροπές αδράνειας έχουμε :

Ως προς τον άξονα Z_1 :

$$I_{Z1} = I_z + a^2 \cdot A \dots (19.1)$$

Ως προς τον άξονα Y_1 :

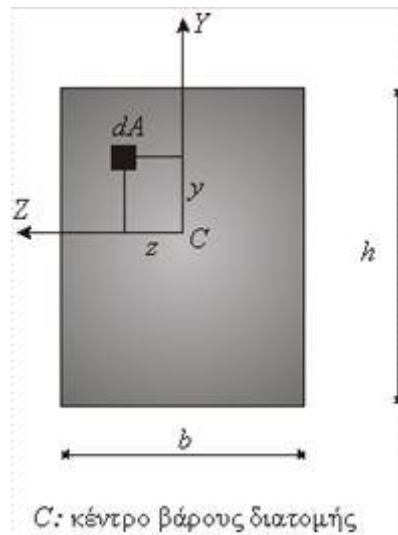
$$I_{Y1} = I_y + s^2 \cdot A \dots (19.2)$$

Ως προς τον άξονα Y_1 και Z_1 :

$$I_{Z1Y1} = I_{zy} + a \cdot s \cdot A \dots (19.3)$$

- ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΕΣ ΡΟΠΕΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ ΣΕ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ ΔΙΑΤΟΜΗ

Για να υπολογίσουμε τις δευτεροβάθμιες ροπές αδράνειας σε μια ορθογωνική διατομή, θεωρούμε μια διατομή με ύψος h και πλάτος b και κέντρο βάρους C διατομής σε απόσταση $h/2$ και $b/2$. Έστω στοιχειώδης επιφάνεια dA , η οποία απέχει απόσταση y και z αντίστοιχα από το κέντρο βάρους της ορθογωνικής διατομής, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 4.12 : Δοκός ορθογωνικής διατομής

Για να υπολογίσουμε τις δευτεροβάθμιες ροπές αδράνειας της παραπάνω διατομής έχουμε :

$$dA = dy \cdot dz \dots (20.1)$$

Ως προς τον άξονα z έχουμε :

$$\begin{aligned} I_z &= \int_A y^2 \cdot dA = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot dydz = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz = \frac{h^3}{12} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dz = \\ &= \frac{h^3}{12} \cdot \left[z \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Rightarrow I_z = \frac{b \cdot h^3}{12} \dots (20.2) \end{aligned}$$

Ομοίως για τον άξονα y έχουμε :

$$I_y = \int_A z^2 \cdot dA \Leftrightarrow I_y = \frac{h \cdot b^3}{12} \dots (20.3)$$

Η δευτεροβάθμια ροπή αδράνειας I_{zy} για ορθογωνική διατομή είναι μηδέν καθώς υπάρχουν άξονες συμμετρίας.

4.10 ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΕΣ ΤΑΣΕΙΣ

Γνωρίζουμε ότι σε περίπτωση που έχουμε καθαρή κάμψη δοκού, κατά την οποία η ροπή κάμψης παραμένει σταθερή σε όλο το μήκος της δοκού και η τέμνουσα δύναμη Q ισούται με μηδέν, οι τάσεις που αναπτύσσονται στο εσωτερικό της διατομής της καμπτόμενης δοκού είναι μόνο ορθές τάσεις σ .

Στις περισσότερες όμως περιπτώσεις, η καταπόνηση της δοκού προκαλείται από εγκάρσια φορτία, με αποτέλεσμα η ροπή κάμψης να μεταβάλλεται κατά το μήκος της δοκού. Λόγω όμως των εγκάρσιων φορτίων, η δοκός καταπονείται και σε διάτμηση. Επομένως στην περίπτωση αυτή έχουμε γενική κάμψη και εκτός των ορθών τάσεων σ λόγω καμπτικών ροπών, αναπτύσσονται και διατμητικές τάσεις τ διότι η τέμνουσα δύναμη Q δεν είναι μηδέν.

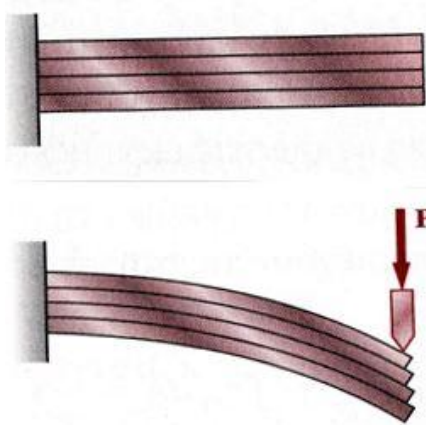
Σε περιπτώσεις δοκών όπου το μήκος τους (L) είναι πολύ μεγαλύτερο από το ύψος της διατομής (h) και ισχύει ο λόγος $\frac{L}{h} > 10$, θεωρούμε ότι χωρίς μεγάλη απόκλιση, οι διατομές παραμένουν επίπεδες και οι διατμητικές τάσεις είναι σχετικά μικρές. Οπότε βασικό ρόλο έχουν οι ορθές τάσεις.

- ΚΑΝΟΝΑ ΑΜΟΙΒΑΙΟΤΗΤΑΣ ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΩΝ ΤΑΣΕΩΝ

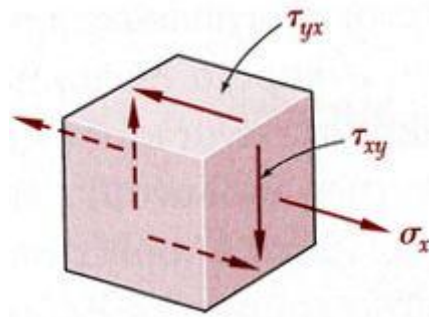
Θεωρούμε ότι έχουμε μια δοκό, η οποία αποτελείται από επάλληλα διαμήκη στρώματα. Εάν εφαρμόσουμε στο άκρο της δοκού (πρόβολος) εγκάρσιο φορτίο P , θα παρατηρήσουμε ότι κατά την κάμψη της δοκού τα διαμήκη στρώματα τείνουν να κινηθούν (ολισθήσουν) το ένα σε σχέση με το άλλο (Σχ. 4.13). Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι διατμητικές τάσεις, εκτός ότι αναπτύσσονται κατά την εγκάρσια διεύθυνση της διατομής με επίδραση εγκάρσιου φορτίου, αναπτύσσονται και στη διαμήκη. Σε μια κανονική δοκό όμως δεν υπάρχει το φαινόμενο της ολίσθησης αλλά μόνο η τάση για να προκληθεί. Αυτό οφείλεται στον κανόνα αμοιβαιότητας των τάσεων, κατά τον οποίο οι διατμητικές τάσεις που εμφανίζονται σε κάθετα μεταξύ επίπεδα είναι ίσες και αντίθετες (Σχ.4.14).

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{xz} = \tau_{zx} \dots (21)$$

Ο πρώτος δείκτης δείχνει τον άξονα στον οποίο η τάση είναι κάθετη στο επίπεδο και ο δεύτερος δείκτης, τον άξονα προς τον οποίο έχει διεύθυνση το διάνυσμα της στοιχειώδους τάσης.



Σχήμα 4.13 : Κάμψη προβόλου ο οποίος αποτελείται από μη συγκολλημένα στρώματα



Σχήμα 4.14: Διατμητικές τάσεις μεταξύ κάθετων επιπέδων

- ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΩΝ ΤΑΣΕΩΝ

Για τον προσδιορισμό των διατμητικών τάσεων σε μια δοκό χρησιμοποιούμε την παρακάτω σχέση :

$$\tau_{xy}(y) = \frac{Q_y(x) \cdot \bar{Q}_z(y)}{I_z \cdot t} \dots (22)$$

Όπου :

$Q_y(x)$: είναι η τέμνουσα δύναμη που υπολογίζουμε από τα εγκάρσια φορτία που καταπονούν στη διατομή.

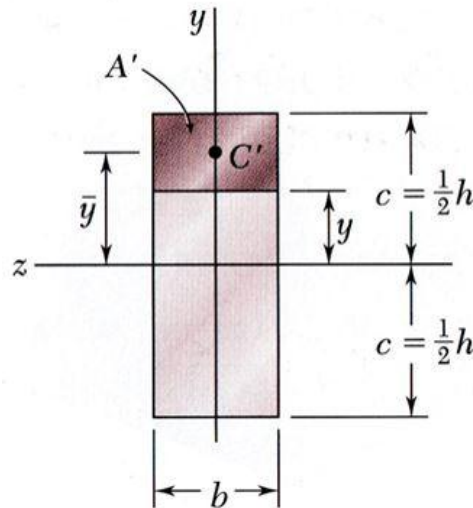
I_z : είναι η δευτεροβάθμια ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα z

t : είναι το πάχος της διατομής στο σημείο που θέλουμε να υπολογίσουμε τις διατμητικές τάσεις

$\bar{Q}_z(y)$: είναι η πρωτοβάθμια ροπή αδράνειας του εμβαδού ως προς τον z άξονα που θέλουμε να υπολογίσουμε τη διατμητική τάση

- ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΩΝ ΤΑΣΕΩΝ ΣΕ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ ΔΙΑΤΟΜΗ

Έστω ότι έχουμε μια ορθογωνική διατομή ύψους h και πλάτους b . Για τον υπολογισμό των διατμητικών τάσεων θα χρησιμοποιήσουμε την εξ. (22).



Σχήμα 4.15 :Διαστάσεις ορθογωνικής διατομής για υπολογισμό διατμητικών τάσεων

$$\tau_{xy}(y) = \frac{Q_y(x) \cdot \bar{Q}_z(y)}{I_z \cdot t} \dots (22)$$

Υπολογισμοί

$$t = b$$

$$c = \frac{h}{2} \Rightarrow h = 2 \cdot c$$

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{b \cdot 8 \cdot c^3}{12} = \frac{2}{3} \cdot b \cdot c^3$$

Για να υπολογίσουμε τη πρωτοβάθμια ροπή αδράνειας του γραμμοσκιασμένου εμβαδού του παραπάνω σχήματος, πρέπει να πολλαπλασιάσουμε το γραμμοσκιασμένο εμβαδό επί την απόσταση του κέντρου βάρους του γραμμοσκιασμένου από τον άξονα z .

$$\bar{Q}_z(y) = A' \cdot \bar{y}$$

$$A' = b \cdot h' \cdot y = b \cdot (c - y)$$

$$\bar{y} = y + \frac{h'}{2} = \frac{y + c}{2}$$

Αντικαθιστούμε του παραπάνω υπολογισμούς στην εξ. (22) και έχουμε :

$$\tau_{xy}(y) = \frac{3 \cdot Q_y(x) \cdot b(c - y) \cdot (c + y)}{4 \cdot b^2 \cdot c^3} \dots (22.1)$$

$$A_{ολ} = 2 \cdot b \cdot c \xrightarrow{(22.1)} \tau_{xy}(y) = \frac{3 \cdot Q_y(x) \cdot (c^2 - y^2)^3}{2 \cdot A_{ολ} \cdot c^2} \Rightarrow \dots \Rightarrow \tau_{xy}(y) = \frac{3 \cdot Q_y(x)}{2 \cdot A_{ολ}} \cdot \left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right)$$

➤ **Άνω πέλμα**

$$\text{Για } y = \frac{h}{2} = c$$

$$\tau_{xy}(h/2) = 0$$

➤ **Κάτω πέλμα**

$$\text{Για } y = -\frac{h}{2} = -c$$

$$\tau_{xy}(-h/2) = 0$$

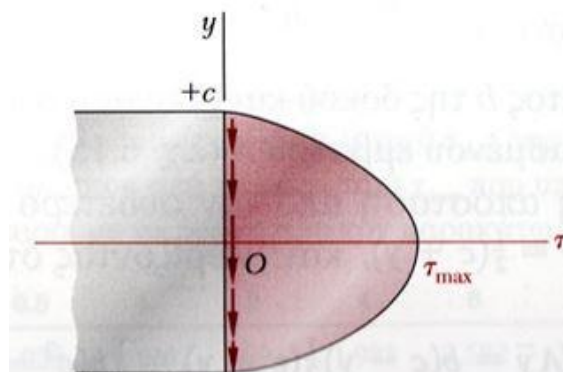
➤ **Ουδέτερος άξονας**

$$\text{Για } y = 0$$

$$\tau_{xy}(y) = \frac{3 \cdot Q_y(x)}{2 \cdot A_{ολ}} \Rightarrow \tau_{xy}(y) = \frac{3}{2} \cdot \tau_{μεσο}$$

Από τις παραπάνω πράξεις παρατηρούμε ότι οι διατμητικές τάσεις στην άνω και κάτω επιφάνεια είναι μηδέν και αυτό λόγω ότι είναι ελεύθερες επιφάνειες, ενώ στα αντίστοιχα σημεία είδαμε σε προηγούμενη αναφορά ότι οι ορθές τάσεις είναι μέγιστες.(σχ.4.16)

Αντίστοιχα, στο κέντρο βάρους της διατομής που περνάει ο ουδέτερος άξονας, οι διατμητικές τάσεις παίρνουν τη μέγιστη τιμή τους ενώ αντίστοιχα οι ορθές μηδενίζονται.



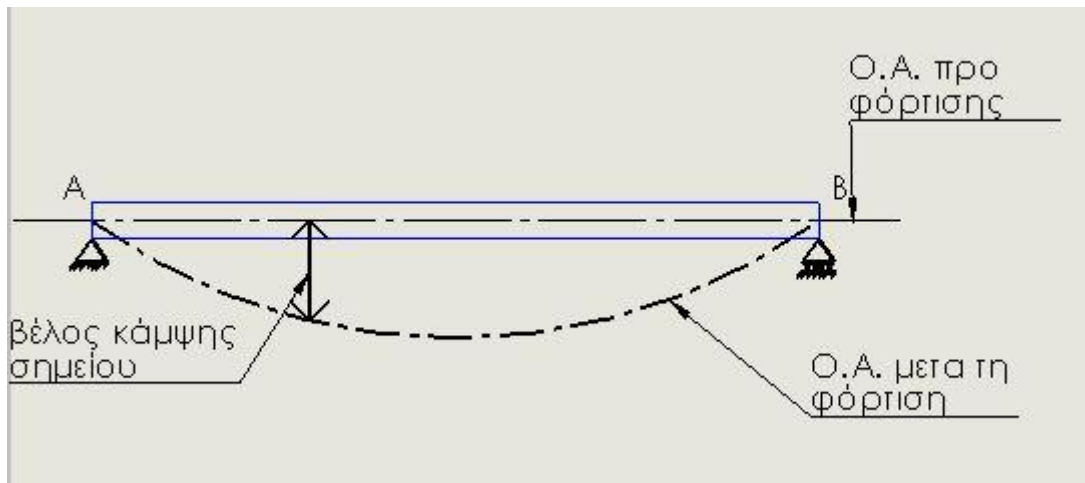
Σχήμα 4.16 :Κατανομή διατμητικών τάσεων σε ορθογωνική διατομή

4.11 ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ

Κατά τη διάρκεια της στατικής μελέτης μιας δοκού, απαραίτητη προϋπόθεση αποτελεί ο έλεγχος για το βέλος κάμψης για την αξιολόγηση της διατομής της δοκού και εν συνεχεία γίνεται ο έλεγχος ως προς τις αναπτυσσόμενες τάσεις στη δοκό (ορθές και διατμητικές), οι οποίες πρέπει να έχουν τιμές μικρότερες από τις επιτρεπόμενες.

Σε περίπτωση που γίνει υπέρβαση του επιτρεπόμενου ορίου για το βέλος κάμψης στην καμπτόμενη δοκό, μπορούν να προκληθούν σοβαρά προβλήματα στην κατασκευή όπως ρηγματώσεις ή αστοχίες στις συνδέσεις, έως και πιο απλά προβλήματα ως προς την αισθητική της κατασκευής.

Όπως έχει αναφερθεί στην αρχή του κεφαλαίου, όταν επιβάλλουμε εγκάρσια φορτία ή ροπές κάμψης σε μια δοκό, ο κεντροβαρικός άξονας της δοκού ή αλλιώς ο ουδέτερος άξονας (ΟΟ') παραμορφώνεται υπό τη μορφή μια καμπύλης γραμμής, η οποία και ονομάζεται ελαστική γραμμή. Η μετατόπιση των σημείων του άξονα σε σχέση με την αρχική τους ως προς την κατακόρυφο, ονομάζεται βέλος κάμψης της δοκού και αντιστοιχεί στο σημείο που υπολογίζεται (Σχ.4.17).



Σχήμα 4.17 : Βέλος κάμψης δοκού

Σε περίπτωση που έχουμε καθαρή κάμψη, δηλαδή η ροπή κάμψης M_z είναι σταθερή, η καμπυλότητα K είναι σταθερή και η ελαστική γραμμή παίρνει τη μορφή τόξου κύκλου και ισχύει :

- Για την ακτίνα καμπυλότητας

$$K = \frac{1}{R} = \frac{M_z}{E \cdot I_z} \dots (23.1)$$

- Για την ολική γωνία στροφής

$$\varphi = \frac{M_z}{E \cdot I_z} \cdot L \dots (23.2)$$

Στην περίπτωση όμως της γενικής κάμψης, όπου η ροπή κάμψης δεν έχει σταθερή τιμή, ισχύει κάτω από προϋποθέσεις η διαφορική εξίσωση της ελαστικής γραμμής η οποία είναι :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_z}{E \cdot I_z} \dots (24)$$

Όπου y είναι το βέλος κάμψης.

Οι προϋποθέσεις οι οποίες έχουν τεθεί ώστε να ισχύει η διαφορική εξίσωση της ελαστικής γραμμής είναι οι παρακάτω τέσσερις(4) και ο κύριος λόγος είναι ώστε να περιοριστούν οι στρεβλώσεις της διατομής λόγω διατμητικών τάσεων. Έτσι έχουμε ότι :

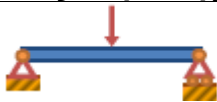



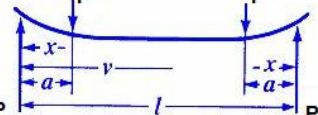
- Η καμπυλότητα σε κάθε σημείο εξαρτάται μόνο από την τιμή της καμπτικής ροπής M
- Το μέγιστο βέλος κάμψης είναι πολύ μικρό συγκριτικά με το μήκος L της δοκού
- Το μήκος L της δοκού και το ύψος h της διατομής, βρίσκονται εντός των ορίων : **$10 \cdot h \leq L \leq 20 \cdot h$**
- Το ύψος h της διατομής και το πλάτος της b καλύπτουν τη σχέση : **$h \leq 4 \cdot b$**

Εάν θεωρήσουμε ότι οι τάσεις που αναπτύσσονται στη δοκό, βρίσκονται εντός της περιοχής αναλογίας και γνωρίζουμε το μέγιστο βέλος κάμψης, τότε βάσει του νόμου του Hooke μπορούμε να υπολογίσουμε τις μέγιστες ορθές τάσεις σ_{max} :





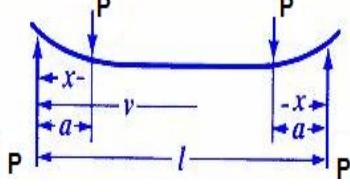
$$\varepsilon_{max} = \frac{y_{max}}{R} \dots (25.1), \text{ άρα } \sigma_{max} = E \cdot \frac{y_{max}}{R} \dots (25.2)$$

Για χαρακτηριστικές περιπτώσεις δοκού σε κάμψη, η αλγεβρική εξίσωση της ελαστικής γραμμής δίδεται παρακάτω πίνακες 5.1 και 5.2. :

Πίνακας 5.1 : Μέγιστο Βέλος κάμψης ανά περίπτωση φόρτισης

| α/α | Είδος Φόρτισης | Μέγιστο Βέλος κάμψης |
|-----|---|---|
| 1 |  | $f\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{P \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I}$ |
| 2 |  | $f(L) = \frac{P \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I}$ |
| 3 |  | $f\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{5 \cdot q \cdot L^4}{384 \cdot E \cdot I}$ |
| 4 |  | $f(L) = \frac{q \cdot L^4}{8 \cdot E \cdot I}$ |
| 5 |  | $f\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{P \cdot a}{24 \cdot E \cdot I} (3L - 4a)$ |

Πίνακας 5.2 :Εξίσωση ελαστικής γραμμής ανά περίπτωση φόρτισης

| α/α | Είδος Φόρτισης | Εξίσωση Ελαστικής Γραμμής |
|-----|---|--|
| 1 |  | $f(x) = \frac{P \cdot x}{12 \cdot E \cdot I} \cdot \left(\frac{3L^2}{4} - x^2 \right)$ |
| 2 |  | $f(x) = \frac{P \cdot x^2}{6 \cdot E \cdot I} \cdot (3L - x)$ |
| 3 |  | $f(x) = \frac{q \cdot x}{24 \cdot E \cdot I} \cdot (L^3 - 2Lx^2 + x^3)$ |
| 4 |  | $f(x) = \frac{q \cdot x^2}{24 \cdot E \cdot I} \cdot (x^2 + 6L^2 - 4Lx)$ |
| 5 |  | <p>Μεταξύ Φορτίων</p> $f(x) = \frac{P \cdot a}{6 \cdot E \cdot I} \cdot (3V(L - V) - a^2)$ <p>Μεταξύ Στήριξης και φορτίου</p> $f(x) = \frac{P \cdot x}{6 \cdot E \cdot I} \cdot (3a(L - a) - x^2)$ |

5.ΣΧΕΔΙΑΣΗ - ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τη διαδικασία σχεδίασης και κατασκευής της πειραματικής μηχανής κάμψης. Αρχικά θα ξεκινήσουμε με την σχεδίαση των επιμέρους εξαρτημάτων της πειραματικής μηχανής και στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου θα προχωρήσουμε στη διαδικασία κατασκευής.

5.1 ΣΧΕΔΙΑΣΗ

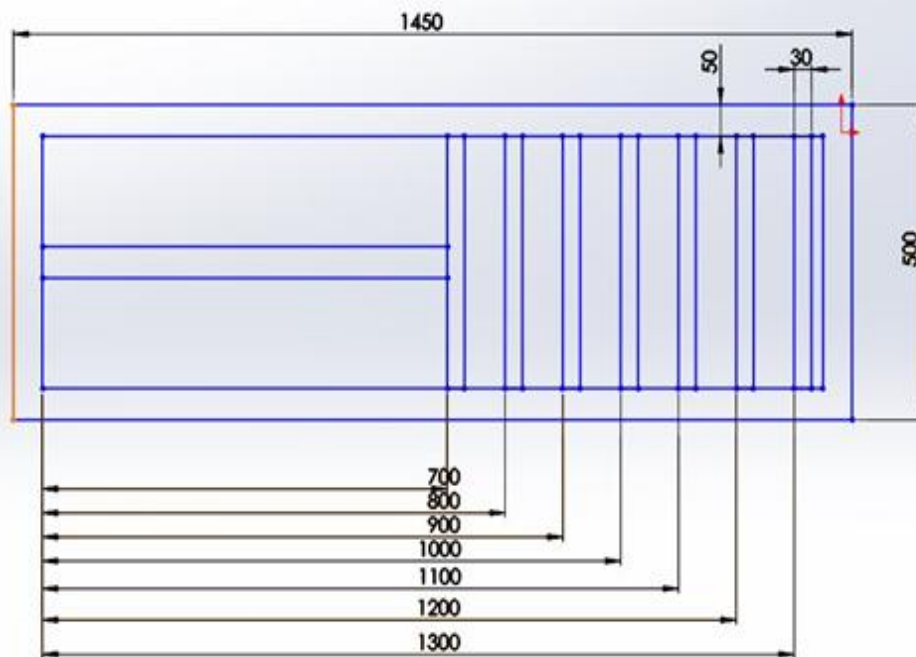
Για την σχεδίαση των εξαρτημάτων της πειραματικής διάταξης κάμψης χρησιμοποιήθηκε το ηλεκτρονικό πρόγραμμα σχεδίασης Solidworks 3D CAD με σκοπό να αποκτήσουμε μια πρότυπη μορφή της πειραματικής συσκευής, έτσι ώστε να λάβουμε πληροφορίες ως προς την δομή της κατασκευής αλλά και ως προς τα υλικά που θα χρειαστούν στην διαδικασία κατασκευής.

5.1.1 ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΒΑΣΗ

Αρχικά θα ξεκινήσουμε με την σχεδίαση της κεντρικής βάσης της πειραματικής μας διάταξης. Είναι από τα σημαντικότερα βήματα της σχεδίασης καθώς αποτελεί βασικό δομικό στοιχείο.

Στην εικ.5.1 έχουμε ένα 2D σχέδιο που απεικονίζει το περίγραμμα της κεντρικής βάσης. Οι διαστάσεις που απεικονίζονται στο σχέδιο εκφράζονται σε χιλιοστά του μέτρου (mm) .Το συνολικό μέγεθος της κατασκευής όπως φαίνεται και στο σχέδιο είναι 1450 mm σε μήκος και 500 mm σε πλάτος.

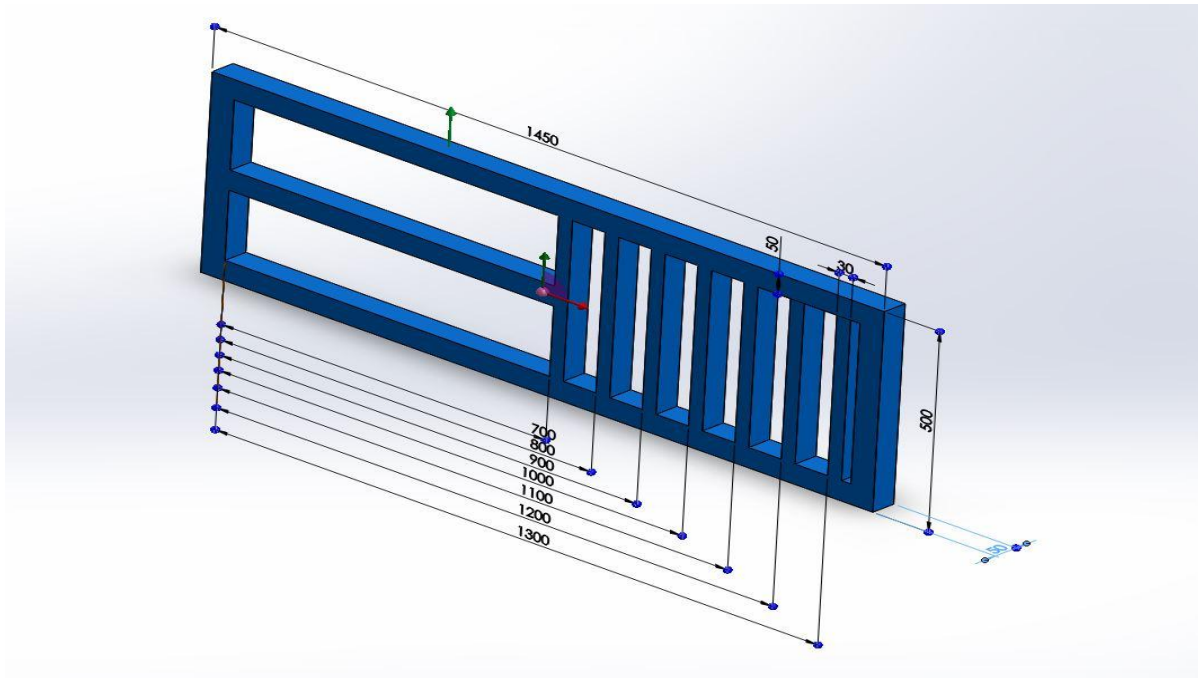
Οι διαστάσεις που απεικονίζονται στο κάτω μέρος του σχεδίου (700mm , 800mm , 900mm, 1000mm, 1100mm, 1200 mm, 1300mm) αφορούν της θέση που τοποθετείται η βάση με τα ρουλεμάν ώστε να επιτευχθεί η στήριξη της κύλισης. Για αυτά θα αναφερθούμε αναλυτικότερα στη συνέχεια της σχεδίασης



Εικ. 5.1 : Περίγραμμα κεντρικής βάσης σε 2Δ σχέδιο

Παρακάτω έχουμε μια τρισδιάστατη άποψη της κεντρικής βάσης (εικ.5.2). Εκτός των διαστάσεων του περιγράμματος ,δίνονται πληροφορίες και για το πάχος των δοκών που θα χρησιμοποιήσουμε για την κατασκευή.

Οι δοκοί που θα χρησιμοποιηθούν περιμετρικά της κατασκευής αλλά και στο ενδιάμεσο τμήμα των 700 mm, το οποίο έχει βασικό ρόλο ενίσχυσης αλλά και συμμετρίας της κατασκευής θα είναι διατομής 50mm × 30 mm. Ενώ στο δεξί τμήμα της κατασκευής μεταξύ των 700 mm έως 1300 mm θα χρησιμοποιηθεί δοκός διατομής 30 mm × 30 mm με σκοπό να ενισχύει την εκάστοτε θέση της βάσης κυλίσεως



Εικ 5.2 : 3Δ απεικόνιση κεντρικής βάσης

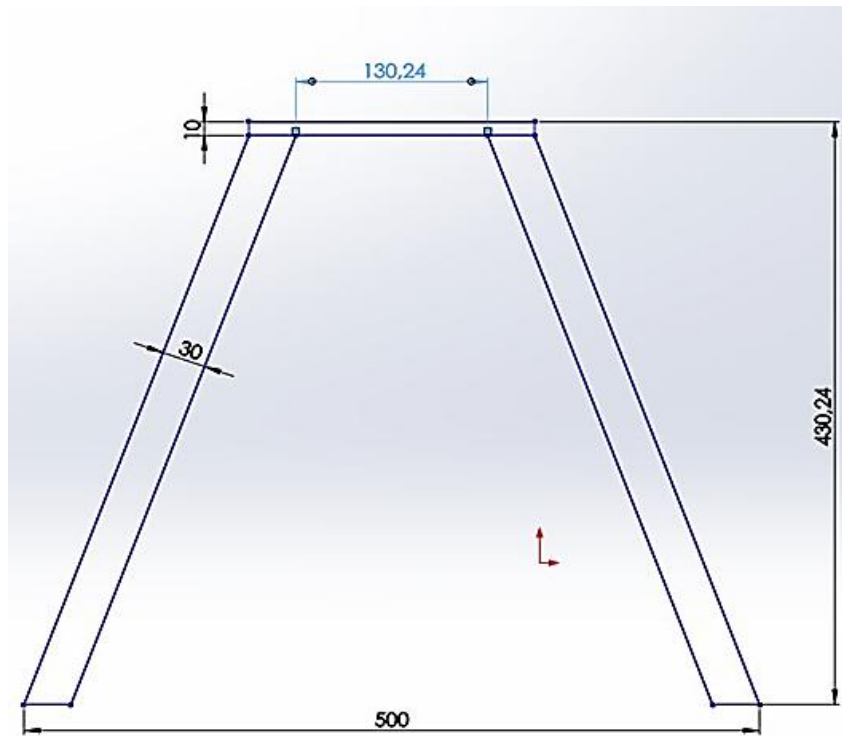
5.1.2 ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΒΑΣΗΣ ΑΡΘΡΩΣΗΣ

Σε αυτό το υπό κεφάλαιο θα αναφερθούμε στην σχεδίαση της βάσης, επάνω στην οποία θα τοποθετηθούν τα εξαρτήματα ώστε να δημιουργήσουμε ένα βραχίονα άρθρωσης όπως επιβάλλει η θεωρία της καθαρής κάμψης.

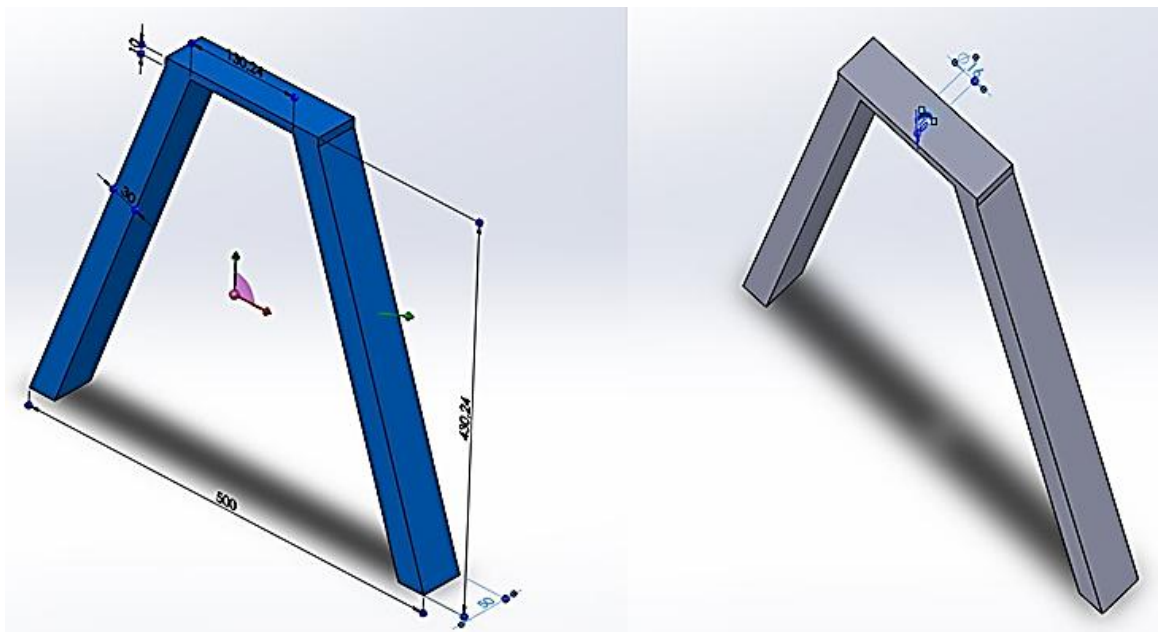
Στην εικ. 5.3 έχουμε ένα 2D σχέδιο με το περίγραμμα της βάσης, η οποία θα τοποθετηθεί σταθερά με συγκόλληση στο αριστερό άκρο της κεντρικής βάσης(βλ. εικ.5.1). Για το λόγο αυτό έχουμε την απόσταση των 500 mm μεταξύ των άκρων.

Οι δύο δοκοί διατομής 50mm × 30mm δεξιά και αριστερά της κατασκευής θα ενωθούν με μια λάμα συμπαγούς διατομής 50mm × 10mm. Ο λόγος για τον οποίο τοποθετείται λάμα συμπαγούς διατομής είναι για ενίσχυσης της βάσης, καθώς επάνω σε αυτή θα τοποθετηθεί ο σύνδεσμος της άρθρωσης.

Στο επάνω τμήμα της βάσης, όπως διακρίνουμε και στην εικ.5.4, υπάρχει μια οπή διαμέτρου 16 mm, από την οποία διέρχεται ο άξονας του συνδέσμου της άρθρωσης.



Εικ. 5.3 : Περίγραμμα βάσης άρθρωσης σε 2Δ σχέδιο



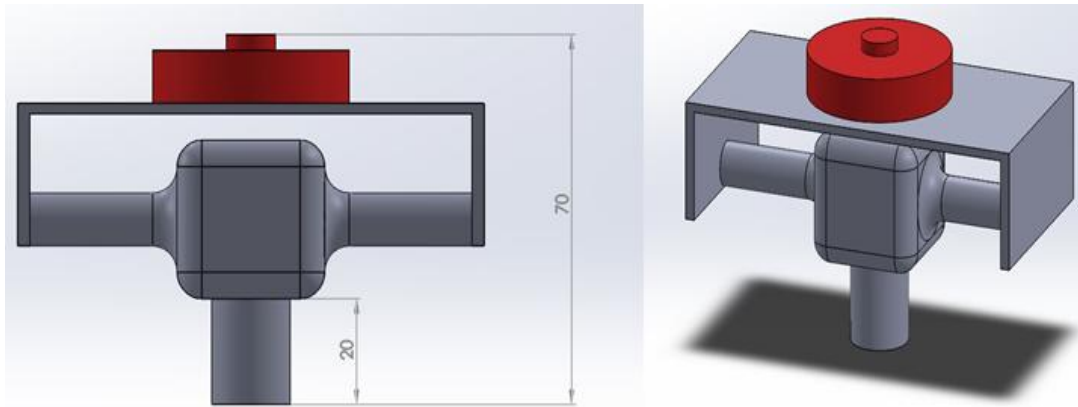
Εικ. 5.4: Βάση άρθρωσης σε 3Δ (Δεξιά διακρίνεται η οπή των 16 mm)

5.1.3 ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΣΥΝΔΕΣΜΟΥ ΑΡΘΡΩΣΗΣ

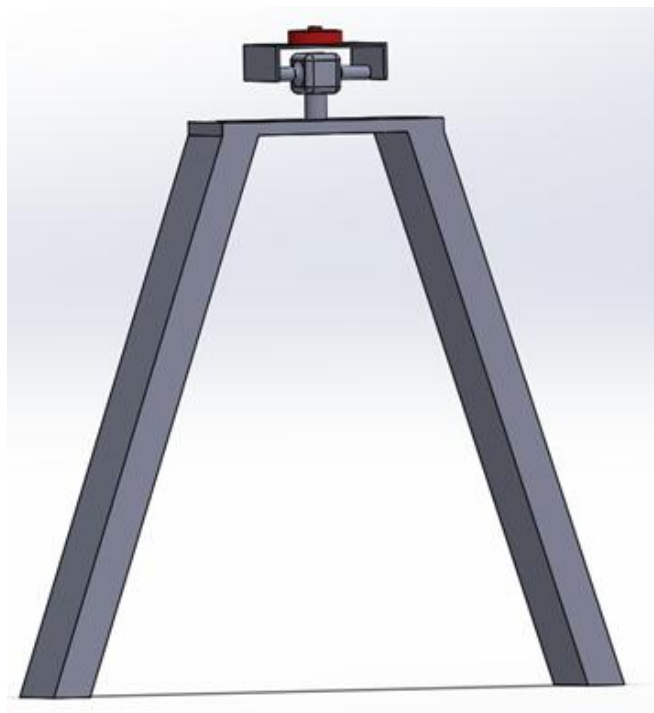
Το παρακάτω σχέδιο(εικ. 5.5) αφορά το σύνδεσμο της άρθρωσης επάνω στον οποίο έχει δημιουργηθεί βάση ώστε να τοποθετηθεί μια δυναμοκυψέλη σε περεταίρω

εξέλιξη της πειραματικής μηχανής κάμψης σε μελλοντικό χρόνο. Η δυναμοκυψέλη διακρίνεται με κόκκινο χρώμα στην παρακάτω εικόνα του σχεδίου.

Το συνολικό ύψος του συνδέσμου μαζί με τη δυναμοκυψέλη είναι 70 mm . Ο κορμός που φαίνεται στο σχέδιο με ύψος 20 mm είναι κυλινδρικής διατομής με διάμετρο 16 mm και πρόκειται για τον άξονα ο οποίος τοποθετείται στην οπή της βάσης άρθρωσης που αναφέραμε στο προηγούμενο υπό κεφάλαιο.



Εικ. 5.5:Σύνδεσμος άρθρωσης σε 3Δ σχέδιο



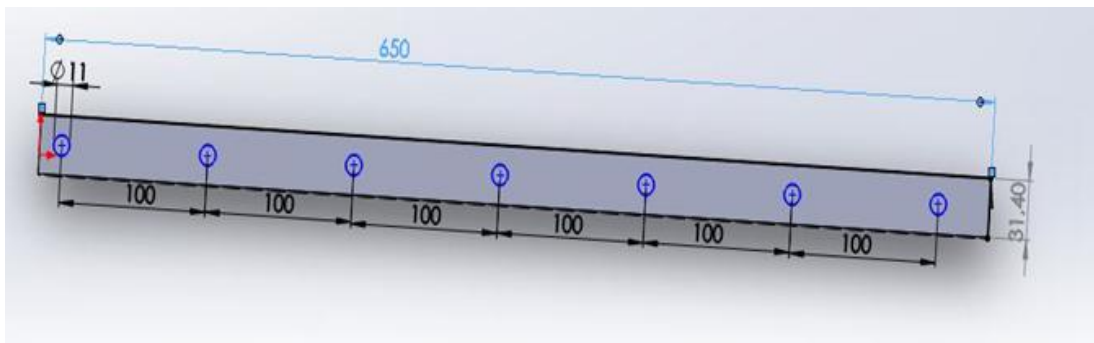
Εικ. 5.6

Στην εικ.5.6, με τη βοήθεια του Solidworks Assembly έχουμε μια πρότυπη μορφή της βάσης άρθρωσης επάνω στην οποία έχει τοποθετηθεί ο σύνδεσμος της άρθρωσης και η δυναμοκυψέλη που θα χρησιμοποιήσουμε κατά την κατασκευή.

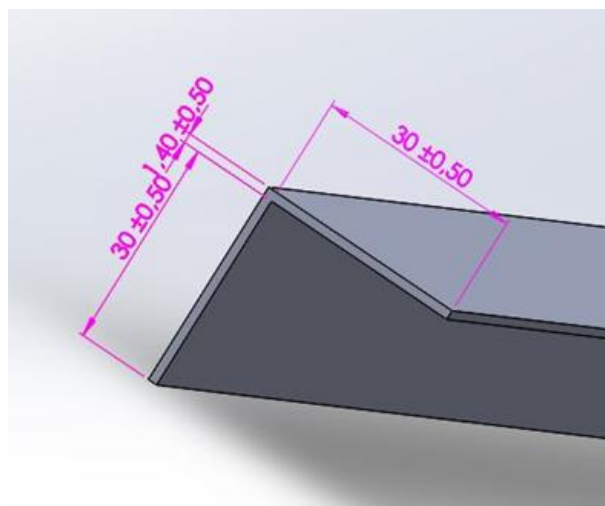
5.1.4 ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΤΗΣ ΒΑΣΗΣ ΚΥΛΙΣΕΩΣ

Λόγω ότι η βάση κυλίσεως, η οποία θα τοποθετηθεί στην δεξιά πλευρά της κατασκευής (βλ. εικ.5.1), θα έχει μεταβαλλόμενη θέση όπως προαναφέραμε ανάλογα με το μήκος της δοκού που θα χρησιμοποιήσουμε για το πείραμα (700 mm έως 1300mm καθαρό μήκος δοκού), θα τοποθετήσουμε δύο ανεστραμμένα γωνιακά ελάσματα στην κεντρική βάση της πειραματικής μηχανής όπως θα δούμε παρακάτω.

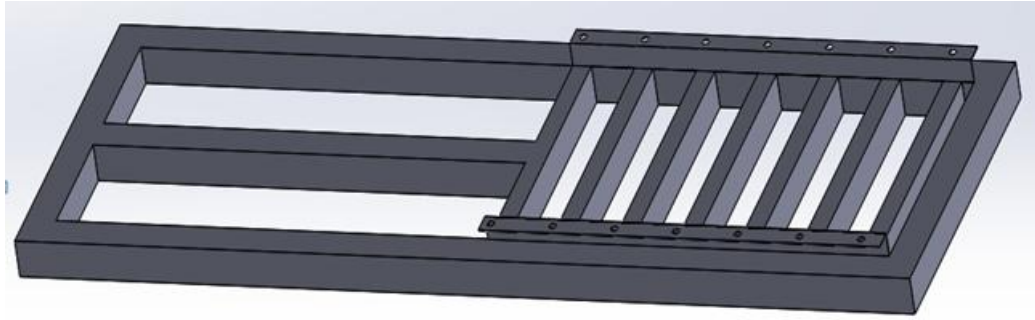
Στην εικ.5.9 έχουμε το προφίλ των ελασμάτων, το οποίο όπως φαίνεται είναι γωνιακό έλασμα τύπου V με 90 μοίρες γωνία. Οι διαστάσεις των ελασμάτων είναι 650 mm σε μήκος και στην μία εκ των δύο πλευρών του υπάρχουν οπές διατομής 11 mm ,ανά 100 mm μήκους (εικ.5.8). Αυτό το επιδιώξαμε ώστε να μπορούμε να εξασφαλίσουμε την σταθερότητα της βάσης κυλίσεως στην εκάστοτε επιθυμητή θέση όπως θα δούμε και στη συνέχεια της διαδικασίας. Τα δύο γωνιακά ελάσματα τοποθετούνται στην κεντρική βάση της κατασκευής όπως φαίνεται στην εικ.5.10.



Εικ. 5.7: Διαστάσεις ελάσματος και θέση οπών



Εικ. 5.8: Προφίλ ελασμάτων

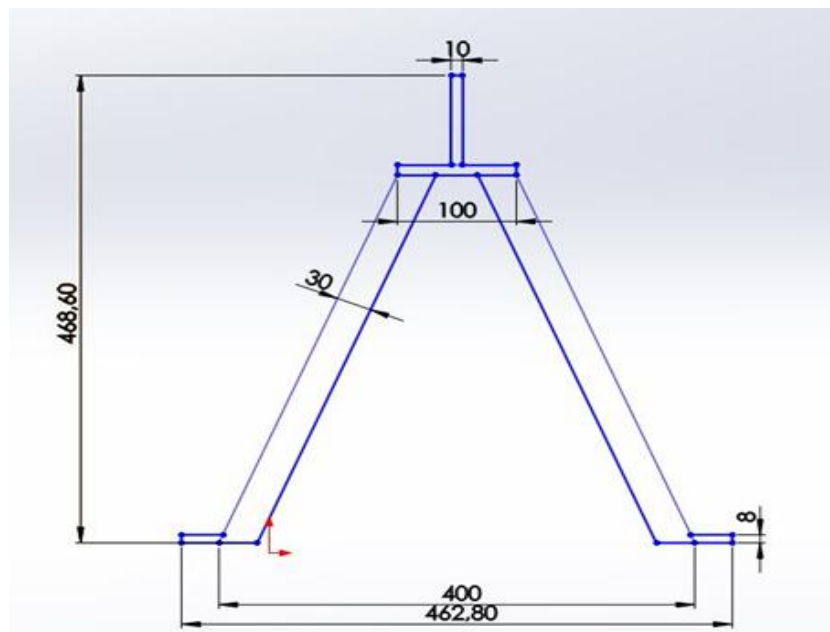


Εικ. 5.9: Θέση τοποθέτησης ελασμάτων στην κεντρική βάση

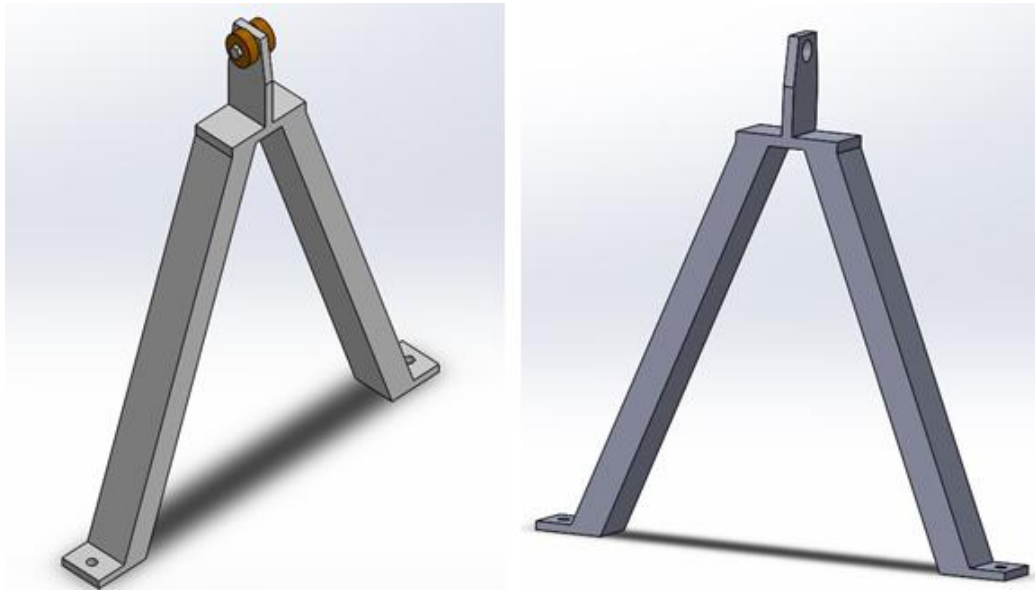
Αφού λοιπόν σχεδιάστηκαν τα γωνιακά ελάσματα, θα προχωρήσουμε στην σχεδίαση της βάσης κυλίσεως. Λόγω ότι το ύψος από την άνω επιφάνεια της δυναμοκυψέλης έως την επιφάνεια της κεντρικής βάσης της πειραματικής μηχανής είναι 500 mm, πρέπει για λόγους ισορροπίας της πειραματικής δοκού αλλά και για να έχουμε ακριβή πειραματικά αποτελέσματα στη συνέχεια, θα πρέπει η άνω επιφάνεια των ρουλεμάν κυλίσεως στην οποία θα πατάει η καμπτόμενη δοκός να απέχει το ίδιο ύψος από την επιφάνεια της κεντρικής βάσης. Έτσι λοιπόν πρέπει να λάβουμε υπόψιν στη σχεδίαση το ύψος των γωνιακών ελασμάτων το οποίο όπως φαίνεται στην εικ.5.8 είναι 31,4 mm .

Οι οπές δεξιά και αριστερά, όπως φαίνονται στο σχέδιο(εικ.5.11), ταυτίζονται με αυτές των γωνιακών ελασμάτων αντίστοιχα έτσι ώστε να εξασφαλίζεται η ακριβής θέση της βάσης κύλισης στο εκάστοτε σημείο που επιλέγουμε.

Η άνω οπή του σχήματος είναι διαμέτρου 20 mm μέσα από την οποία διέρχεται ο άξονας με τα ρουλεμάν κυλίσεως.



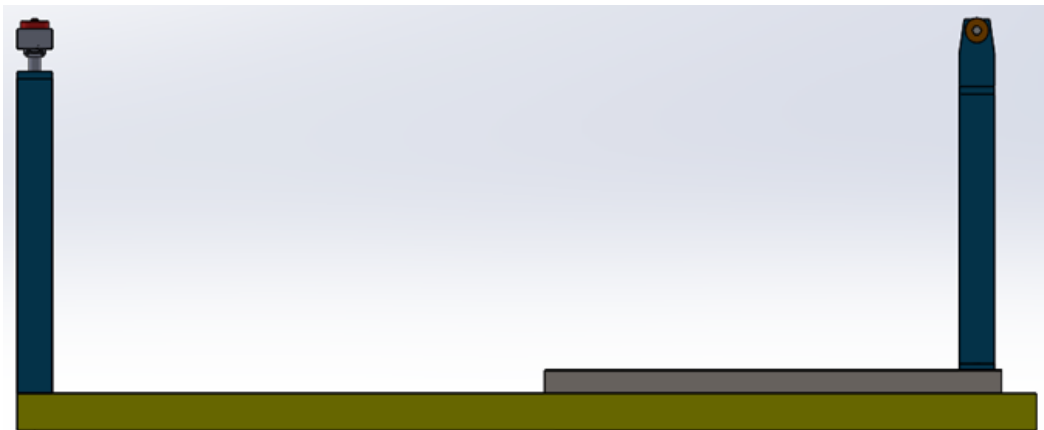
Εικ. 5.10:Περίγραμμα βάσης κυλίσεως



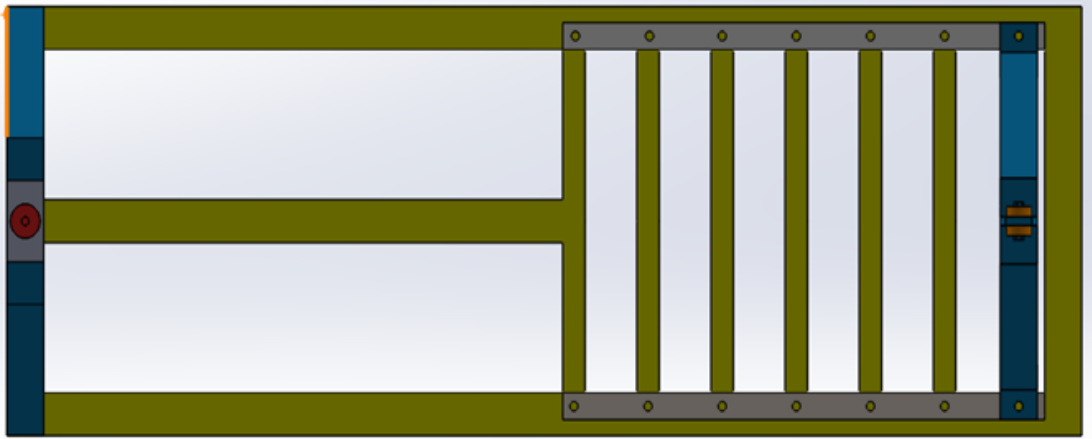
Εικ. 5.11:Βάση κυλίσεως σε 3Δ(Αριστερά διακρίνονται τα ρουλεμάν)

5.1.5 ASSEMBLY

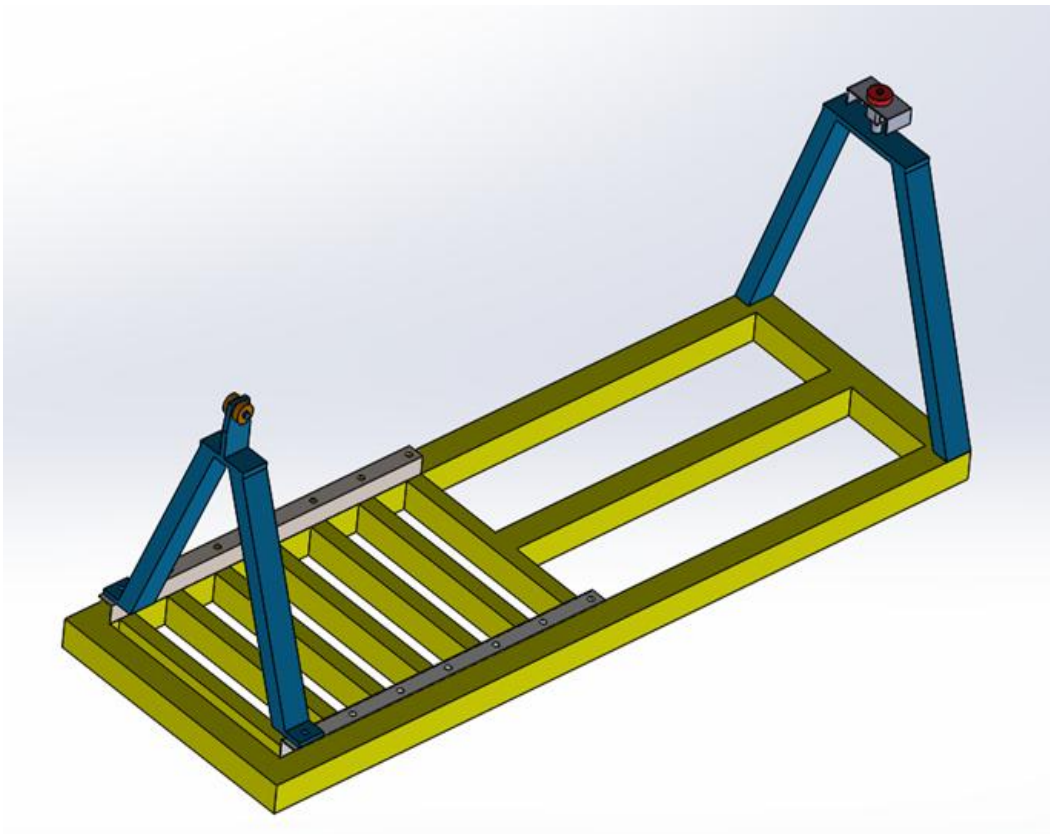
Αφού λοιπόν έχουμε ολοκληρώσει την σχεδίαση όλων των εξαρτημάτων της κατασκευής, με τη βοήθεια του Solidworks Assembly θα ενώσουμε όλα τα εξαρτήματα έτσι ώστε να αποκτήσουμε μια πρώτη γενική εικόνα της πειραματικής μηχανής κάμψης που πρόκειται να κατασκευάσουμε(Εικ 5.12 έως 5.14).



Εικ. 5.12: Πρόοψη πειραματικής μηχανής



Εικ. 5.13: Άνω όψη πειραματικής μηχανής



Εικόνα 5.14: Πειραματική μηχανή σε 3D απεικόνιση

5.2 ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ

Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου, θα ασχοληθούμε αναλυτικά και βήμα προς βήμα, με τη διαδικασία κατασκευής της πειραματικής μηχανής κάμψης αμφιέριστης δοκού τριών και τεσσάρων σημείων. Για την παρούσα κατασκευή έγινε χρήση εξοπλισμού του Τ.Ε.Ι. αλλά και προσωπικού εξοπλισμού όπως θα δούμε και παρακάτω.

5.2.1 ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΒΑΣΗΣ

Όπως ξεκίνησε η σχεδίαση, έτσι και στην κατασκευή το αρχικό τμήμα της πειραματικής μηχανής που κατασκευάζουμε είναι η κεντρική βάση. Αρχικά θα ξεκινήσουμε με τα αναγκαία υλικά που είναι απαραίτητα για την κατασκευή του πλαισίου.

Το περιμετρικό πλαίσιο της κεντρικής βάσης αποτελείται από γαλβανισμένη στράντζα του εμπορίου με ορθογωνική διατομή 50mm × 30mm και πάχος 1,4 mm όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα(Εικ. 5.15).



Εικόνα 5.15: Διατομή 50 × 30 × 1.4 mm

Για το πλαίσιο χρειάστηκαν τα παρακάτω υλικά :

- ✓ 2 τεμάχια στράντζα ορθογωνικής διατομής 50 × 30 × 1.4 μήκους 145 cm
- ✓ 2 τεμάχια στράντζα ορθογωνικής διατομής 50 × 30 × 1.4 μήκους 50 cm
- ✓ 1 τεμάχιο στράντζα ορθογωνικής διατομής 30 × 30 × 1.4 μήκους 70 cm
- ✓ 6 τεμάχια στράντζα ορθογωνικής διατομής 30 × 30 × 1.4 μήκους 40 cm

Για να ξεκινήσει η κατασκευή διαμορφώνουμε αρχικά τα άκρα των τεσσάρων τεμαχίων στράντζας διατομής 50 × 30 × 1.4 με γωνία 45 μοιρών σε σταθερό πριόνι υγρής κοπής μετάλλων όπως φαίνεται στην εικ.5.16 .



Εικ. 5.16: Διαμόρφωση κομματιών σε 45 μοίρες

Μετά τη διαμόρφωση, χρησιμοποιούμε ηλεκτροσυγκόλληση ώστε να ενώσουμε τα τέσσερα αυτά τμήματα και να κατασκευάσουμε το αρχικό πλαίσιο της κεντρικής βάσης (εικ. 5.17).



Εικ. 5.17: Πλαίσιο κεντρικής βάσης

Στη συνέχεια τοποθετούμε σε ακριβείς θέσεις που έχουμε υπολογίσει τα 6 τμήματα στράντζας ορθογωνικής διατομής 30 × 30 (mm) (εικ.5.18).



Εικ. 5.18: Εσωτερική ενίσχυση πλαισίου

Για την ολοκλήρωση της κεντρικής βάσης πρέπει να τοποθετηθούν και να συγκολληθούν ακόμα δύο γωνιακά ελάσματα τύπου V 90 μοιρών δεξιά και αριστερά του πλαισίου επάνω στα οποία θα τοποθετηθεί η μεταβλητής θέσης βάση κυλίσεως(εικ. 5.19).

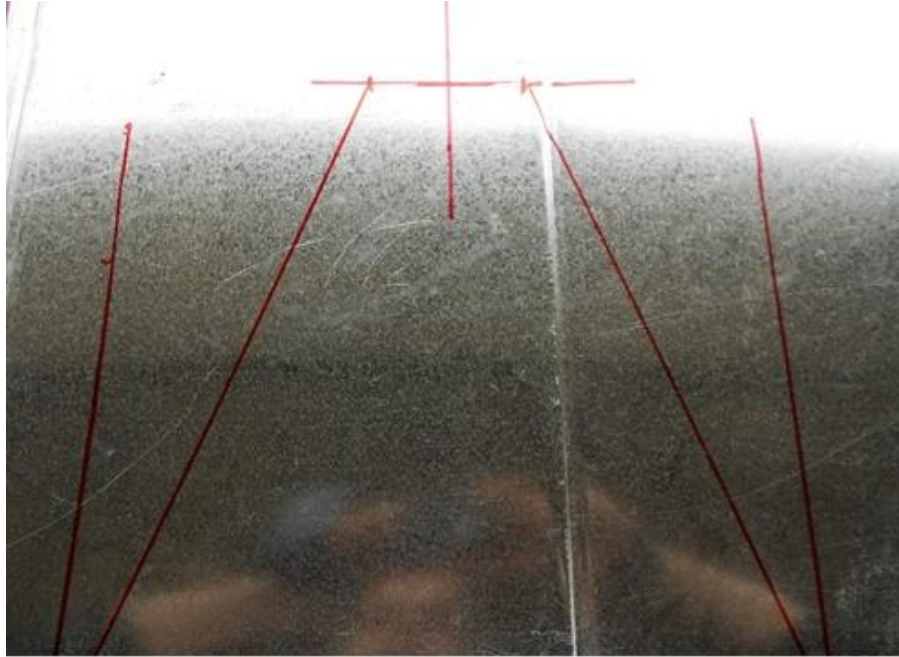
Οι οπές των 11 mm επάνω στα γωνιακά ελάσματα έγιναν σε σταθερό δρόπανο (δράπανο στήλης) ανά 100 mm όπως είδαμε και σε προηγούμενα σχέδιο(βλ. εικ.5.8).



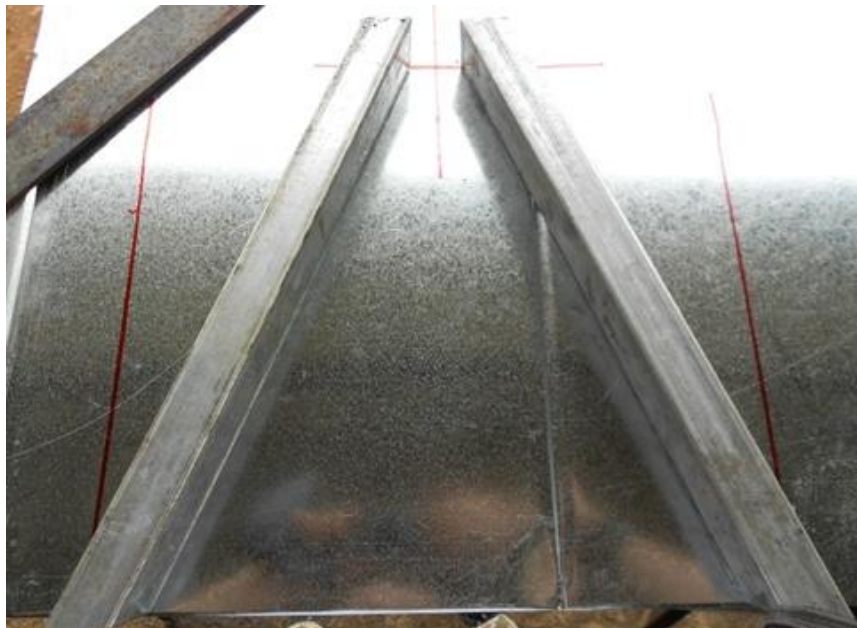
Εικ. 5.19: Προσαρμογή γωνιακών ελασμάτων σε κεντρική βάση

5.2.2 ΒΑΣΗ ΚΥΛΙΣΗΣ

Για την βάση κυλίσεως, αρχικά αποτυπώσαμε το σχέδιο σε ένα έλασμα λαμαρίνας ώστε να μπορέσουμε να μετρήσουμε τα απαιτούμενα κομμάτια στράντζας που θα χρησιμοποιήσουμε αλλά και την κλίση που θα δώσουμε στους βραχίονες ώστε να εφάπτονται επάνω στα γωνιακά ελάσματα (εικ.5.20 και 5.21). Αυτό έγινε διότι τα μηχανήματα που είχαμε στη διάθεση μας δεν είχαν την δυνατότητα να λάβουν την γωνία κοπής ακριβώς και θα είχαμε μεγάλες αποκλίσεις στη συνέχεια κατά την κατασκευή.



Εικ. 5.20: Αποτύπωση περιγράμματος



Εικ. 5.21: Τοποθέτηση βραχιόνων στο έλασμα για επαλήθευση και διόρθωση

Το επάνω τμήμα των βραχιόνων ενώνεται με λάμα συμπαγούς διατομής 50 mm × 10 mm (εικ.5.22).



Εικ. 5.22: Ένωση βραχιόνων

Στο επάνω τμήμα της βάσης συγκολλήσαμε ένα κομμάτι λάμα συμπαγούς διατομής 50 mm × 8 mm, το οποίο στο επάνω άκρο έχει μια οπή διαμέτρου 20 mm μέσα από την οποία διέρχεται ο άξονας με τα ρουλεμάν κυλίσεως(εικ.5.23).



Εικ. 5.23: Βάση ρουλεμάν κυλίσεως

Όπως φαίνεται και στην εικ.5.23, υπάρχει μια γωνιακή διαβάθμιση του ελάσματος σε φρέζα για αποφυγή ατυχημάτων από τις ακμές. Ακόμα, στο κάτω τμήμα του ελάσματος έχει υποστεί κατεργασία στην φρέζα ώστε να επιτύχουμε

επιπεδότητα κατά τη διαδικασία τοποθέτησης επάνω στους βραχίονες της βάσης. Την τελική μορφή της βάσης μπορούμε να τη δούμε στην εικ.5.24.



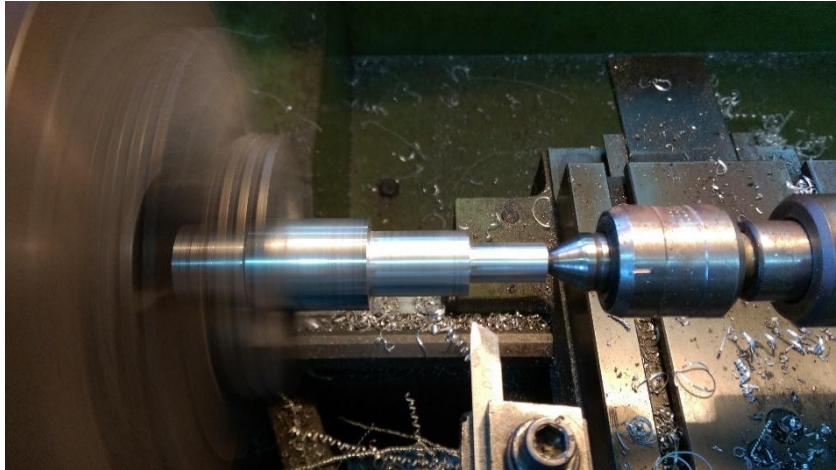
Εικ. 5.24:Βάση κυλίσεως σε τελική μορφή

- ΑΞΟΝΑΣ ΓΙΑ ΡΟΥΛΕΜΑΝ

Για την κατασκευή του άξονα με τα ρουλεμάν χρησιμοποιήθηκε ένα κομμάτι αλουμινίου κυκλικής διατομής 26 mm στο οποίο έγινε κατάλληλη κατεργασία σε τόρνο συμβατικής λειτουργίας του Τ.Ε.Ι. όπως φαίνεται και στις εικόνες 5.25 έως 5.28.



Εικ. 5.25:Ξεχόνδρισμα άξονα



Εικ. 5.26: Δημιουργία επιθυμητής μορφής άξονα



Εικόνα 5.27: Κατασκευή σπειρώματος M12 x 1.5



Εικ. 5.28: Διαμόρφωση πίσω μέρους άξονα

5.2.3 ΒΑΣΗ ΑΡΘΡΩΣΗΣ

Για την κοπή των κομματιών των βραχιόνων στη βάση άρθρωσης χρησιμοποιήθηκε το ίδιο αποτυπωμένο σχέδιο στο έλασμα λαμαρίνας όπου συναντήσαμε προηγουμένως, αλλά ελαφρώς διαφοροποιημένο λόγω διαφορετικών μεγεθών και κλίσεων, καθώς σε αυτή την περίπτωση οι βραχίονες θα συγκολληθούν απευθείας επάνω στην κεντρική βάση της πειραματικής μηχανής .



Εικόνα 5.29: Συγκόλληση βραχιόνων επάνω στην κεντρική βάση

Αφού ολοκληρωθεί η συγκόλληση των δύο βραχιόνων στα δύο άκρα της κεντρικής βάσης (εικ. 5.29) ,θα συγκολληθεί στο επάνω μέρος ένα τμήμα λάμας συμπαγούς διατομής 50mm×10mm έτσι ώστε να ενωθούν μεταξύ τους. Η λάμα στο μέσον της έχει μια οπή 16 mm, μέσα από την οποία διέρχεται ο άξονας που συγκρατεί τον σύνδεσμο της άρθρωσης(εικ.5.30).



Εικ. 5.30: Θέση οπής από την οποία διέρχεται ο άξονας του συνδέσμου άρθρωσης

5.2.4 ΣΥΝΔΕΣΜΟΣ ΑΡΘΡΩΣΗΣ

Η κατασκευή του συνδέσμου άρθρωσης αποτέλεσε ένα από τα δυσκολότερα τμήματα της πειραματικής διάταξης και ο λόγος είναι ότι αποτελείται από διάφορα εξαρτήματα τα οποία πρέπει να συνεργάζονται άρτια μεταξύ τους. Τα υλικά που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή του συνδέσμου είναι τα εξής :

- ✓ Χαλύβδινος άξονας συμπαγούς κυλινδρικής διατομής με διάμετρο 50 mm και μήκος 120 mm
- ✓ Τμήμα κοίλης δοκού ορθογωνικής διατομής $80 \times 40 \times 2.5$ μήκους 100 mm
- ✓ Ντίζα γαλβανιζέ M10x1.5 μήκους 120 mm
- ✓ 6 παξιμάδια γαλβανιζέ M10 x 1.5
- ✓ 2 παξιμάδια γαλβανιζέ M16 x 2.0
- ✓ 6 ροδέλες γαλβανιζέ M10
- ✓ 2 ροδέλες γαλβανιζέ M16

Αρχικά, το πρώτο τμήμα του συνδέσμου που κατασκευάζουμε είναι ο βασικός κορμός του, καθώς επάνω σε αυτόν έρχονται και τοποθετούνται όλα τα υπόλοιπα εξαρτήματα. Ξεκινάμε λοιπόν με τον χαλύβδινο συμπαγή άξονα τον οποίο τον κατεργαζόμαστε στον τόρνο.

Αρχικά κάνουμε 10 περάσματα στον τόρνο με βάθος κοπής 1 mm και για μήκος 90 mm ώστε να αποκτήσει περίμετρο 40 mm, όση δηλαδή θέλουμε στο επάνω μέρος του κορμού. Στη συνέχεια αφαιρούμε υλικό από το κάτω μέρος του με 24 περάσματα με βάθος κοπής 1 mm για 65 mm μήκος ,ώστε να φτιάξουμε στο τέλος ένα σπείρωμα M16 x 2.0 (εικ. 5.31).



Εικ. 5.31:Κατεργασία κορμού στον τόρνο

Το ύψος του κορμού του συνδέσμου διαφέρει κατά 20 mm από αυτό που αναφέρθηκε κατά τη σχεδίαση και αυτό λόγω ότι δημιουργούμε λίγο μεγαλύτερο κορμό στο τμήμα σπειρώματος ώστε να υπάρχει η δυνατότητα να μετατοπιστεί επάνω ή κάτω για τυχόν διόρθωση του ύψους.

Αφού ολοκληρωθεί η διαμόρφωση στον τόρνο, αφαιρούμε με την κόφτρα το απαιτούμενο τμήμα που χρειαζόμαστε και ύστερα τοποθετούμε το κομμάτι στη φρέζα για να γίνει η διάνοιξη της οπής των 10mm, μέσα από την οποία διέρχεται η ντίζα (εικ.5.32) .

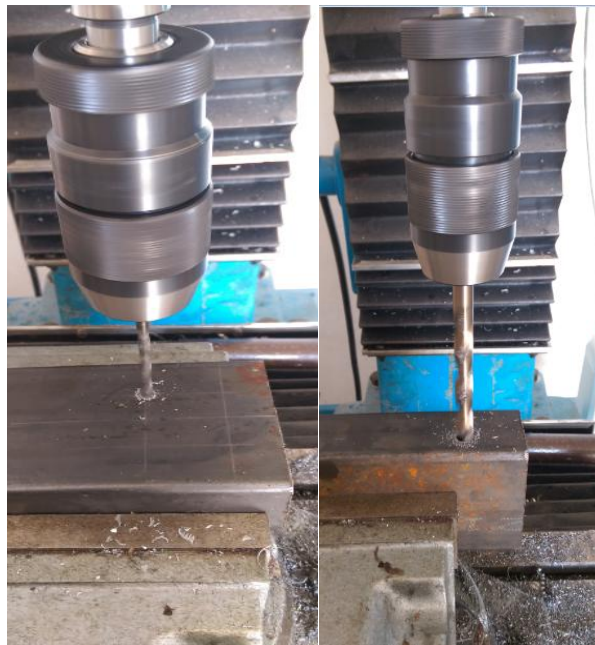


Εικ. 5.32:Διάνοιξη οπής για ντίζα

Στη συνέχεια της διαδικασίας θα κατασκευάσουμε το περιστρεφόμενο κατά +/- 90 μοίρες πέλμα, επάνω στο οποίο θα τοποθετηθεί η δυναμοκυψέλη. Το πέλμα θα το κατασκευάσουμε με κατεργασία της κοίλης δοκού που αναφέραμε. Σε πρώτο στάδιο, θα αποτυπώσουμε στο επάνω μέρος της κοίλης δοκού 4 οπές διαμέτρου 5 mm στις οποίες θα στηριχθεί η δυναμοκυψέλη και στη συνέχεια στα πλάγια τμήματα της δοκού θα αποτυπώσουμε 2 οπές των 10 mm από τις οποίες διέρχεται η ντίζα M10, με αποτέλεσμα να προκύψει η περιστροφή (εικ.5.33).



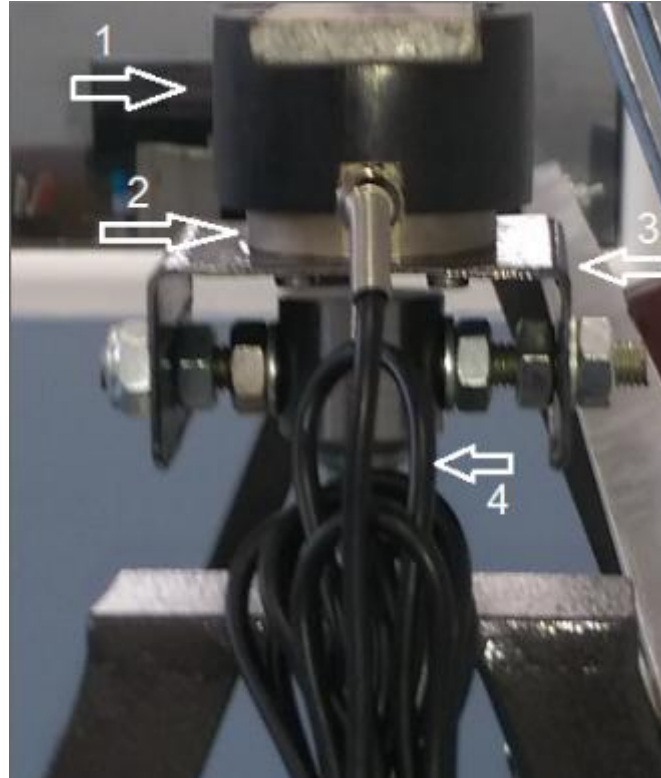
Εικ. 5.33: Αποτύπωση οπών



Εικ. 5.34 : Διάνοιξη οπών στη φρέζα

Τέλος αφαιρούμε το κάτω τμήμα της κοίλης δοκού ώστε να επιτύχουμε την περιστροφή σε συνεργασία με τον κορμό που κατασκευάσαμε προηγουμένως.

Για λόγους προστασίας της δυναμοκυψέλης αλλά και για αύξηση της σταθερότητας κατά τη συγκράτηση της δοκού, κατασκευάσαμε ένα περίβλημα από τεφλόν. Μετά από κατάλληλη κατεργασία στον τόρνο και τη φρέζα το τοποθετήσαμε περιμετρικά της δυναμοκυψέλης (εικ. 5.35).



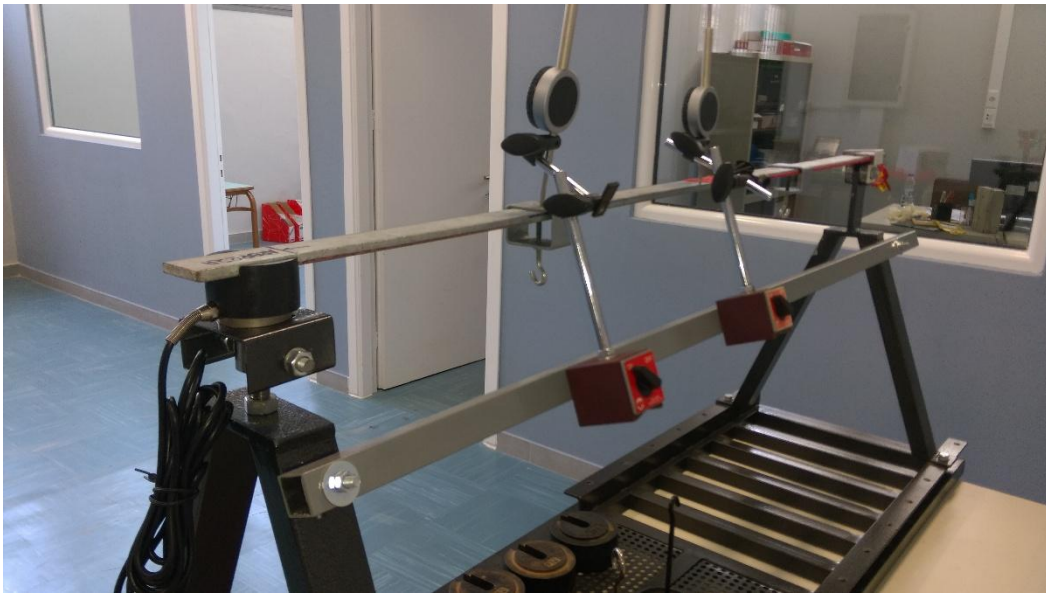
Εικ. 5.35 : (1) Προστατευτικό περίβλημα με τεφλόν, (2) Δυναμοκυψέλη, (3)Περιστρεφόμενο πέλιμα, (4) Βασικός κορμός άρθρωσης

5.2.5 ΒΑΣΗ ΓΙΑ ΒΕΛΟΜΕΤΡΑ

Για τις μετρήσεις του πειράματος θα χρησιμοποιηθούν βελόμετρα μεταβλητής θέσης, έτσι ώστε να υπάρχει η δυνατότητα να μετρηθεί το βέλος κάμψης σε όποιο σημείο της καμπτόμενης δοκού επιθυμούμε ή είναι απαραίτητο. Τα βελόμετρα αποτελούνται από τη βασική μετρητική συσκευή (βελόμετρο)(εικ.5.36) και από μια βάση με μαγνήτη και διακόπτη ώστε να μπορούν να τοποθετηθούν σε μεταλλικές επιφάνειες. Έτσι χρησιμοποιήσαμε μια κοίλη δοκό ορθογωνικής διατομής $30 \times 30 \times 1.4$,μήκους 1300 mm, την οποία βιδώσαμε στο πίσω μέρος των βραχιόνων και εν συνεχεία τοποθετήσαμε επάνω σε αυτή τα βελόμετρα (εικ.5.37).



Εικ. 5.36: Βελόμετρο



Εικ. 5.37 : Βάση με βελόμετρα

5.2.6 ΦΟΡΕΑΣ ΦΟΡΤΙΟΥ

Το τελευταίο τμήμα της πειραματικής μηχανής που κατασκευάσαμε είναι δύο φορείς μεταβλητής θέσης, επάνω στους οποίους κρεμάμε μεταλλικούς δίσκους συγκεκριμένης μάζας ώστε να ασκηθεί κάθετο φορτίο στη δοκό. Οι φορείς αυτοί αποτελούνται από δύο κομμάτια κοίλης δοκού ορθογωνικής διατομής $50 \times 30 \times 2.5$ mm και μήκους 40 mm. Στην μια εκ των δύο επιφανειών 50×40 mm, έχει γίνει μία οπή 6 mm και περιμετρικά από αυτή συγκολλήθηκε παξιμάδι M6 x 1.0, από το οποίο διέρχεται κοχλίας ο οποίος στο ένα άκρο του φέρει γάντζο ώστε να κρεμαστεί το φορτίο (εικ.5.38).



Εικ. 5.38: Φορέας φορτίου

5.3 ΕΞΟΠΛΙΣΜΟΣ

Για την κατασκευή της πειραματικής διάταξης κάμψης αμφιέριστων δοκών τριών και τεσσάρων σημείων χρησιμοποιήθηκαν μηχανήματα που υπάρχουν στο χώρο του Τ.Ε.Ι. Δυτικής Ελλάδας και συγκεκριμένα στο τμήμα μηχανολόγων μηχανικών Τ.Ε στα εργαστήρια του μηχανουργείου και CAM/CNC καθώς και σε στους χώρους του σιδηρουργείου και του ελασματοουργείου. Τα μηχανήματα και τα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν θα τα δούμε αναλυτικά παρακάτω στις εικόνες 5.39 έως 5.44.



Εικόνα 5.39 : Πρέσα υδραυλικής πίεσης δυναμικότητας 60 τόνων



Εικόνα 5.40 : Ψαλίδι κοπής ελασμάτων πάχους έως 1.5mm



Εικόνα 5.41 : Μηχανικό ψαλίδι κοπής ελασμάτων πάχους έως 2.5mm



Εικόνα 5.42 : Στράντζα χειροκίνητης λειτουργίας για κάμψη ελάσματος έως 1.5 mm



Εικόνα 5.43 : Ηλεκτροσυγκόλληση (TA 252) και Αργκόν (MIG 250)



Εικόνα 5.44 : Δισκοπρίονο υγρής κοπής(δεξιά) και Ξηράς κοπής(αριστερά)

6. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ – ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

6.1 ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ

Πριν ξεκινήσουμε τη διαδικασία του πειράματος και τη λήψη μετρήσεων στην πειραματική διάταξη κάμψης που κατασκευάσαμε, θα κάνουμε αρχικά τους υπολογισμούς με βάση τη θεωρία της κάμψης έτσι ώστε να έχουμε ένα μέτρο σύγκρισης των θεωρητικών αποτελεσμάτων με τα πειραματικά που θα λάβουμε στη συνέχεια.

Η δοκός που θα χρησιμοποιηθεί για το πείραμα είναι λάμα από χάλυβα, συμπαγούς διατομής με ύψος $h = 8 \text{ mm}$, πλάτος $b = 40 \text{ mm}$ και μήκος $L = 1200 \text{ mm}$ και θα υποστεί καταπόνηση σε κάμψη τριών (3) και τεσσάρων (4) σημείων. Για κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις θα αναλύσουμε στη συνέχεια.

Το υλικό της λάμας είναι κράμα χάλυβα θερμής διέλασης A36 κατά τυποποίηση ASTM. Παρακάτω στον πίνακα 6.1 έχουμε τις μηχανικές ιδιότητες του χάλυβα που θα χρησιμοποιηθεί στη δοκιμή της κάμψης.

Πίνακας 6.1 : Μηχανικές Ιδιότητες Χάλυβα

| Κράμα Χάλυβα A36 Θερμής διέλασης | | |
|----------------------------------|------|-----------------|
| | Τιμή | Μονάδα Μέτρησης |
| Πυκνότητα | 7.85 | g/cm^3 |
| Μέτρο Ελαστικότητας | 200 | GPa |
| Λόγος Poisson | 0.30 | - |
| Αντοχή σε Διαρροή | 250 | MPa |
| Αντοχή σε Εφελκυσμό | 500 | MPa |

➤ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ 2^ο ΒΑΘΜΙΑΣ ΡΟΠΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

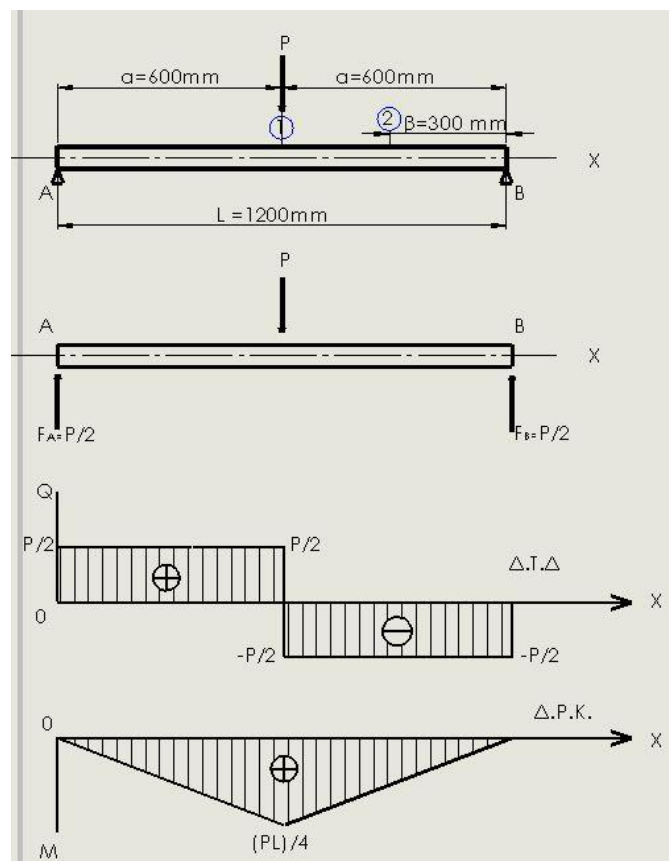
Με βάση τις σχέσεις της θεωρίας που συναντήσαμε στο πρώτο κεφάλαιο, θα προχωρήσουμε στον υπολογισμό της δευτεροβάθμιας ροπής αδράνειας της διατομής που θα χρησιμοποιήσουμε για το πείραμα καθώς θα τη χρειαστούμε και στη συνέχεια σε υπολογισμούς. Η διατομή της λάμας είναι ορθογωνική, επομένως ισχύει η εξίσωση (20.2) της θεωρίας.

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{40 \cdot 8^3}{12} \text{ mm}^4 \Rightarrow I_z = 1706.67 \text{ mm}^4$$

6.1.1 ΔΙΑΤΑΞΗ ΚΑΜΨΗΣ ΑΜΦΙΕΡΕΙΣΤΗΣ ΔΟΚΟΥ ΤΡΙΩΝ (3) ΣΗΜΕΙΩΝ ΦΟΡΤΙΣΗΣ

Αρχικά θα ξεκινήσουμε με τη θεωρητική μελέτη της δοκιμής σε κάμψη τριών σημείων. Κατά την πειραματική δοκιμή θα λάβουμε έντεκα (11) μετρήσεις ξεκινώντας με εγκάρσιο φορτίο 10 N και σταδιακά προσθέτοντας, θα φτάσουμε έως και 110 N. Το μήκος του φορέα που υπόκειται σε κάμψη είναι $L = 1200 \text{ mm}$ και το φορτίο ασκείται στο μέσον της δοκού, σε απόσταση $a = 600 \text{ mm}$ από τη στήριξη. Οι μετρήσεις του βέλους κάμψης θα γίνουν σε δύο σημεία της δοκού. Το βελόμετρο (1) είναι τοποθετημένο στο μέσον της δοκού, και το βελόμετρο (2) σε απόσταση $\beta = 300 \text{ mm}$ από τη στήριξη.

Από τη στατική και τις συνθήκες στατικής ισορροπίας προκύπτει με τους απαιτούμενους υπολογισμούς ότι οι αντιδράσεις των στηρίξεων είναι ίσες λόγω συμμετρίας και η τιμή τους είναι $F_A = F_B = P/2$, όπου P είναι το φορτίο που ασκείται στη δοκό. Η μέγιστη ροπή κάμψης ασκείται στο μέσον της δοκού και η τιμή της είναι $M = (P \cdot L)/4$. Παρακάτω θα σχεδιάσουμε το διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων και το διάγραμμα καμπτικών ροπών (εικ. 6.1).

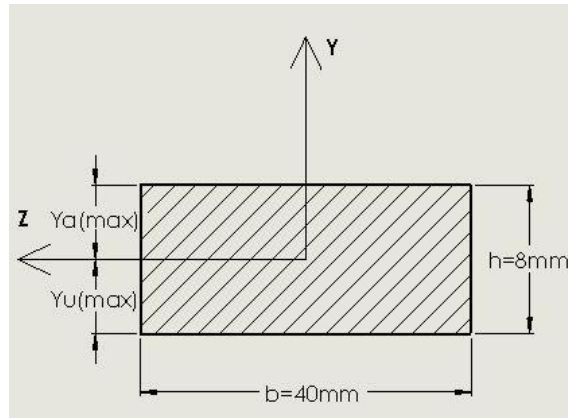


Εικόνα 6.1 : Διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων και ροπών κάμψης σε φόρτιση 3 σημείων²

Από τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων και ροπών κάμψης παρατηρούμε ότι κατά τη φόρτιση της δοκού επενεργούν στο υλικό της δοκού και τέμνουσες δυνάμεις αλλά και ροπές κάμψης. Οπότε η δοκός υπόκειται σε γενική κάμψη.

Η μέγιστη ορθή τάση στη γενική κάμψη, υπολογίζεται από την εξίσωση (15) που είδαμε στη θεωρία και είναι :

$$\sigma_{x(max)} = \frac{M_{z(max)}}{I_z} \cdot y_{max}$$



Εικόνα 6.2 : Διαστάσεις διατομής

Όπως βλέπουμε στην παραπάνω εικόνα 6.2, λόγω ότι έχουμε ορθογωνική διατομή, ο ουδέτερος άξονας ο οποίος ταυτίζεται με τον κεντροβαρικό άξονα διέρχεται από το μέσον της διατομής εφόσον γνωρίζουμε ότι είναι ορθογωνική διατομή. Επομένως η μέγιστες ορθές τάσεις σε εφελκυσμό στην κάτω επιφάνεια της διατομής είναι ίσες ως προς το μέτρο τους με τις μέγιστες σε θλίψη στην άνω επιφάνεια αντίστοιχα. Η απόσταση Y_{max} στην περίπτωση αυτής της διατομής ισούται με 4 mm.

Ακόμα, λόγω ότι είμαστε σε περίπτωση γενικής κάμψης, για να υπολογίσουμε τα βέλη κάμψης στα σημεία (1) και (2) που αναφέραμε, θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση της ελαστικής γραμμής για την πρώτη περίπτωση που φαίνεται στον πίνακα 1 της θεωρίας, η οποία είναι :

$$y = \frac{P \cdot x}{12 \cdot E \cdot I} \cdot \left(\frac{3 \cdot L^2}{4} - x^2 \right), \text{ για } 0 < x < \frac{L}{2}$$

Μετά από πράξεις για τις έντεκα περιπτώσεις φορτίου, στον παρακάτω πίνακα(πιν 6.2) έχουμε τα θεωρητικά αποτελέσματα για την μέγιστη καμπτική ροπή M_{max} , τη μέγιστη ορθή τάση σ_{max} , την βέλος κάμψης στην θέση (1) για απόσταση $x = 600$ mm και το βέλος κάμψης στην θέση (2) για απόσταση $x = 300$ mm. Τα θεωρητικά αποτελέσματα για τα βέλη κάμψης θα τα συγκρίνουμε στη συνέχεια με τα αντίστοιχα πειραματικά.

Πίνακας 6.2 : Θεωρητικά αποτελέσματα κάμψης 3 – σημείων φόρτισης

| α/α | Φορτίο P (N) | Καμπτική Ροπή $M_{max}(N\cdot m)$ | Μέγιστη ορθή τάση $\sigma_{max}(N/mm^2)$ | Βέλος κάμψης στη θέση (1) (x = 600 mm) | Βέλος κάμψης στη θέση (2) (x = 300 mm) |
|-----|--------------|-----------------------------------|--|--|--|
| 1 | 10 | 3 | 7.03 | 1.05 | 0.73 |
| 2 | 20 | 6 | 14.06 | 2.11 | 1.45 |
| 3 | 30 | 9 | 21.09 | 3.16 | 2.18 |
| 4 | 40 | 12 | 28.12 | 4.22 | 2.90 |
| 5 | 50 | 15 | 35.16 | 5.27 | 3.63 |
| 6 | 60 | 18 | 42.19 | 6.33 | 4.35 |
| 7 | 70 | 21 | 49.22 | 7.38 | 5.08 |
| 8 | 80 | 24 | 56.25 | 8.44 | 5.80 |
| 9 | 90 | 27 | 63.28 | 9.49 | 6.53 |
| 10 | 100 | 30 | 70.31 | 10.55 | 7.25 |
| 11 | 110 | 33 | 77.34 | 11.60 | 7.98 |

6.1.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΚΑΜΨΗΣ ΑΜΦΙΕΡΕΙΣΤΗΣ ΔΟΚΟΥ ΤΕΣΣΑΡΩΝ (4) ΣΗΜΕΙΩΝ ΦΟΡΤΙΣΗΣ

Δεύτερη περίπτωση που θα εξετάσουμε είναι η συμμετρική κάμψη αμφιέρειστης δοκού τεσσάρων (4) σημείων. Στην πειραματική δοκιμή θα λάβουμε επτά μετρήσεις, ξεκινώντας από 20 N (10 + 10) έως 140 N (70 + 70). Οι διαστάσεις του φορέα είναι οι ίδιες με την προηγούμενη περίπτωση στην κάμψη τριών σημείων καθώς και οι θέσεις που θα μετρήσουμε τα βέλη κάμψης (1 και 2). Τα φορτία P και P θα ασκηθούν σε απόσταση $a=300$ mm από τις στηρίξεις.

Για την κάμψη τεσσάρων σημείων, από τη στατική και τις συνθήκες ισορροπίας προκύπτει ότι οι αντιδράσεις στις στηρίξεις είναι μεταξύ τους ίσες λόγω συμμετρίας και ισχύει ότι $F_A = F_B = P$, όπου P είναι το φορτίο που ασκείται στη δοκό στην εκάστοτε θέση. Στο τμήμα ΓΔ της δοκού παρατηρούμε ότι υπάρχει μόνο καμπτική ροπή με σταθερή τιμή η οποία ισούται με $M_{max} = P \cdot a$, καθώς η τέμνουσα δύναμη Q είναι ίση με μηδέν. Συνεπώς το τμήμα ΓΔ της δοκού βάσει των παραπάνω υπόκειται σε καθαρή κάμψη.

Αντίθετα στα τμήματα ΑΓ και ΔΒ της δοκού, πέραν της καμπτικής ροπής έχουμε και τέμνουσα δύναμη Q η οποία από υπολογισμούς προκύπτει ίση με P. Έτσι σε αυτά τα δύο τμήματα έχουμε την περίπτωση της γενικής κάμψης. (εικ. 6.3)

Ο υπολογισμός του βέλους κάμψης μεταξύ του σημείου στήριξης και του κοντινότερου φορτίου, στα τμήματα δηλαδή ΑΓ και ΒΔ της δοκού, γίνεται με την παρακάτω εξίσωση :

$$y = \frac{P \cdot x}{6 \cdot E \cdot I} \cdot (3 \cdot a \cdot (L - a) - x^2), \text{ για } 0 < x \leq a$$

Για $x=a$, μπορούμε να υπολογίσουμε το βέλος κάμψης στο σημείο που εφαρμόζεται το φορτίο.

Η εξίσωση της ελαστικής γραμμής διαφοροποιείται όμως μεταξύ των φορτίων και γίνεται ως εξής:

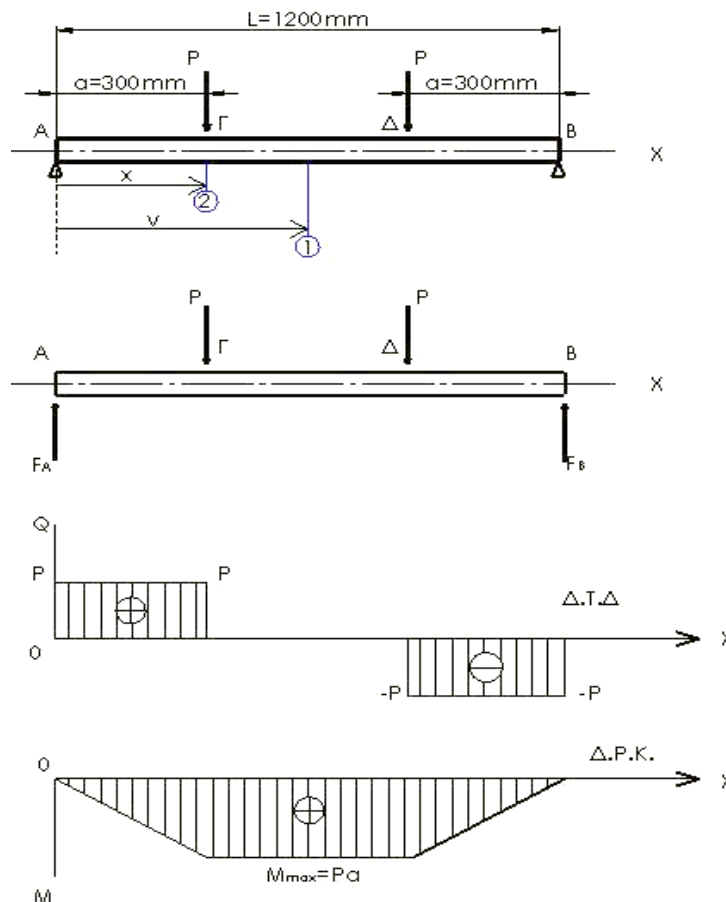
$$y = \frac{P \cdot \alpha}{6 \cdot E \cdot I} \cdot (3 \cdot v \cdot (L - v) - \alpha^2), \text{ για } \alpha < v \leq \frac{L}{2}$$

Για την τιμή του $v = L/2$, μπορούμε να υπολογίσουμε το μέγιστο βέλος κάμψης στο μέσον της δοκού.

Η μέγιστη τάση κάμψης, σε αυτή την περίπτωση φόρτισης, αναπτύσσεται στη διατομή της δοκού μεταξύ των σημείων Γ και Δ κατά τα οποία η ροπή κάμψης παίρνει τη μέγιστη τιμή $M_{\max} = P \cdot a$ και υπολογίζεται από την εξίσωση :

$$\sigma_{x(\max)} = \frac{M_z}{I_z} \cdot y_{\max}$$

Η απόσταση y_{\max} ισούται με 4 mm όπως μπορούμε να δούμε και στην εικ.2, και λόγω της γεωμετρίας της διατομής οι μέγιστες ορθές τάσεις σε εφελκυσμό είναι ίσες κατά απόλυτη τιμή με τις μέγιστες σε θλίψη.



Εικόνα 6.3 : Διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων και ροπών κάμψης σε φόρτιση 4 σημείων3

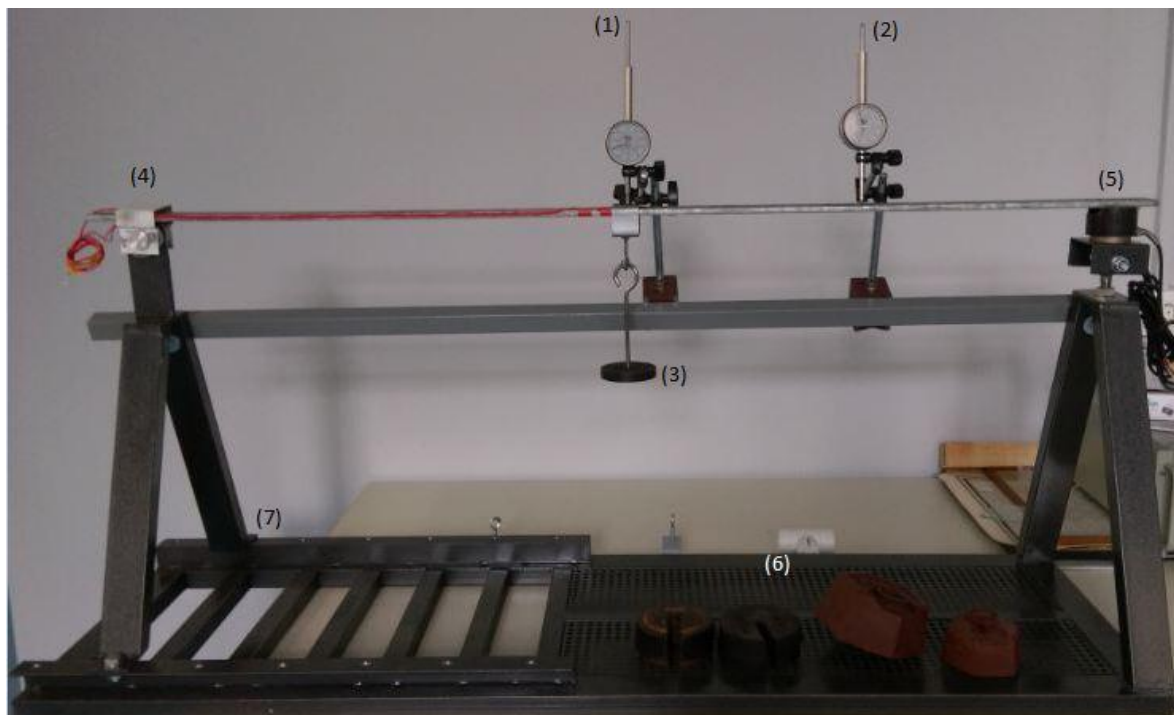
Μετά από πράξεις για τις επτά περιπτώσεις ασκούμενου φορτίου στη δοκό, στον παρακάτω πίνακα(Πιν.6.3) έχουμε τα θεωρητικά αποτελέσματα που προέκυψαν για την μέγιστη καμπτική ροπή M_{max} , τη μέγιστη ορθή τάση σ_{max} , την βέλος κάμψης στην θέση (1) για απόσταση $v = 600$ mm και το βέλος κάμψης στην θέση (2) για απόσταση $x = 300$ mm. Τα θεωρητικά αποτελέσματα για τα βέλη κάμψης θα τα συγκρίνουμε στη συνέχεια με τα αντίστοιχα πειραματικά.

Πίνακας 6.3 : Θεωρητικά αποτελέσματα για κάμψη 4 - σημείων

| α/α | Ζεύγος Φορτίου P-P (N) | Καμπτική Ροπή (P·α) M_{max} (N·m) | Μέγιστη ορθή τάση σ_{max} (N/mm ²) | Βέλος κάμψης στη θέση (1) ($v = 600$ mm) | Βέλος κάμψης στη θέση (2) ($x = 300$ mm) |
|-----|------------------------|-------------------------------------|---|---|---|
| 1 | 10-10 | 3 | 7.03 | 1.45 | 1.05 |
| 2 | 20-20 | 6 | 14.06 | 2.90 | 2.11 |
| 3 | 30-30 | 9 | 21.09 | 4.35 | 3.16 |
| 4 | 40-40 | 12 | 28.12 | 5.80 | 4.22 |
| 5 | 50-50 | 15 | 35.16 | 7.25 | 5.27 |
| 6 | 60-60 | 18 | 42.19 | 8.70 | 6.33 |
| 7 | 70-70 | 21 | 49.22 | 10.15 | 7.38 |

6.2.1 ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ ΚΑΜΨΗΣ ΤΡΙΩΝ 3 – ΣΗΜΕΙΩΝ ΦΟΡΤΙΣΗΣ

Η πειραματική διάταξη που θα κατασκευάσαμε και θα χρησιμοποιηθεί για το πείραμα κάμψης τριών σημείων φαίνεται στην παρακάτω εικόνα (εικ.6.4)



Εικόνα 6.4 : Πειραματική διάταξη κάμψης τριών σημείων φόρτισης

Στην εικόνα 6.4 φαίνεται αναλυτικά η πειραματική διάταξη, με τη δοκό που θα χρησιμοποιήσουμε κατά τη διάρκεια του πειράματος. Στη θέση (1) έχουμε το βελόμετρο με το οποίο υπολογίζουμε το βέλος κάμψης στο μέσον της δοκού και απέχει απόσταση 600mm από τις στηρίξεις. Ακριβώς κάτω από αυτό στη θέση (3) έχουμε την βάση επάνω στην οποία με προσθήκη βάρους θα ασκήσουμε το κάθετο φορτίο στη δοκό. Στην θέση (2) διακρίνουμε το άλλο βελόμετρο που θα χρησιμοποιηθεί, το οποίο απέχει 300 mm από την άρθρωση η οποία βρίσκεται στη θέση (5) της εικόνας. Στη θέση (4) έχουμε την κύλιση με τα ρουλεμάν και στη θέση (6) έχουμε διαφόρων μεγεθών φορτία τα οποία θα τα προσθέτουμε με αύξουσα σειρά.

Διακρίνουμε ότι η βάση κυλίσεως, όπως αναφέραμε και κατά την κατασκευή είναι μεταβλητής θέσεως ώστε να μπορούμε να κάνουμε το πείραμα μας σε δοκούς με καθαρό μήκος από 700 έως 1300 mm. Έτσι όπως βλέπουμε και στην εικ.6.4 και συγκεκριμένα στη θέση (7), η βάση κυλίσεως είναι τοποθετημένης τη δεύτερη θέση από αριστερά. Να σημειωθεί ακόμα ότι στην εικ.6.4 η δοκός είναι αφόρτιστη και τα βελόμετρα είναι μηδενισμένα για να διεξαχθεί το πείραμα κάμψης τριών σημείων.

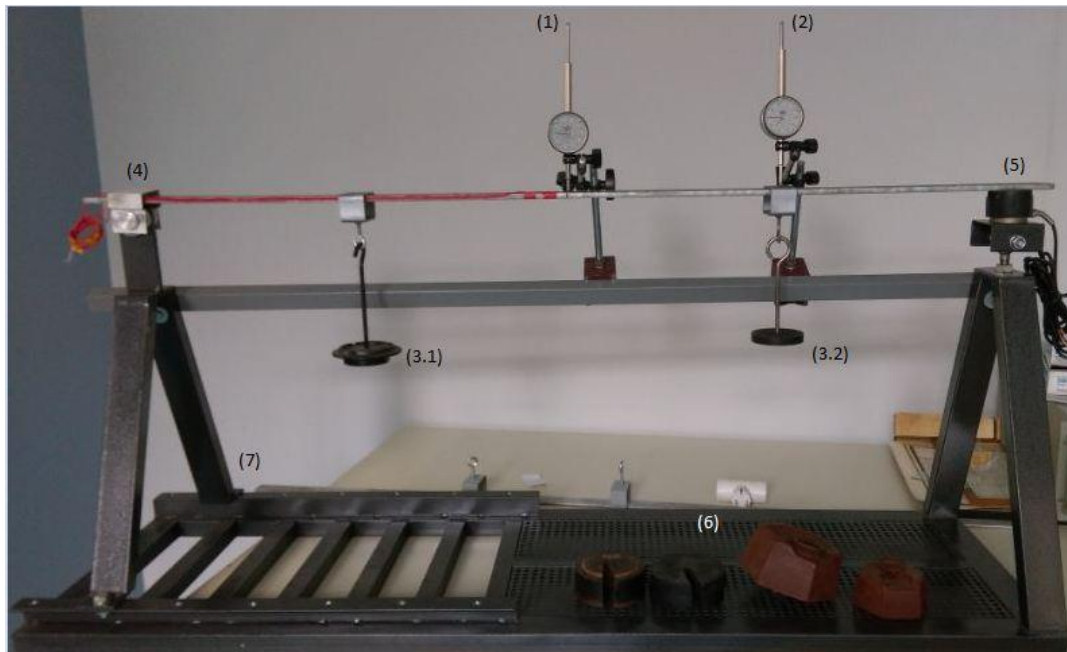
Έτσι λοιπόν ξεκινάμε το πείραμα ασκώντας φορτίο στη δοκό σταδιακά. Συνολικά θα επαναλάβουμε το πείραμα έντεκα φορές, ξεκινώντας αρχικά με την ελάχιστη δυνατή τιμή φορτίου που μπορούμε να ασκήσουμε, η οποία είναι 10 N και προσθέτουμε κάθε φορά 10 ακόμα έως ότου φτάσουμε τα 110 N μετά από έντεκα επαναλήψεις. Κάθε φορά που ασκούμε φορτίο, καταγράφουμε τις μετρήσεις των βελόμετρων στις θέσεις (1) και (2) έτσι ώστε να μπορέσουμε να συγκρίνουμε τις πειραματικές αυτές τιμές, με τις θεωρητικές που υπολογίσαμε στην υπο ενότητα 6.1.1 και συγκεκριμένα στον Πιν.6.2.

Πίνακας 6.4 : Πειραματικά αποτελέσματα για κάμψη 3 – σημείων φόρτισης

| α/α | Φορτίο P (N) | Βελόμετρο (1) (mm) | Βελόμετρο(2) (mm) |
|------------|---------------------|-------------------------------|------------------------------|
| 1 | 10 | 1 | 0.73 |
| 2 | 20 | 2 | 1.46 |
| 3 | 30 | 3.12 | 2.24 |
| 4 | 40 | 4.21 | 3.03 |
| 5 | 50 | 5.30 | 3.80 |
| 6 | 60 | 6.66 | 4.78 |
| 7 | 70 | 7.52 | 5.38 |
| 8 | 80 | 8.58 | 6.14 |
| 9 | 90 | 9.67 | 6.92 |
| 10 | 100 | 10.76 | 7.69 |
| 11 | 110 | 11.89 | 8.49 |

6.2.2 ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ ΚΑΜΨΗΣ ΤΕΣΣΑΡΩΝ (4) – ΣΗΜΕΙΩΝ ΦΟΡΤΙΣΗΣ

Για την πειραματική διάταξη κάμψης τεσσάρων σημείων, τροποποιούμε την διάταξη που χρησιμοποιήσαμε για πείραμα κάμψης τριών σημείων. Αναλυτικότερα φαίνεται στην παρακάτω εικόνα(εικ.6.5).



Εικόνα 6.5 : Πειραματική διάταξη κάμψης τεσσάρων σημείων φόρτισης

Πιο συγκεκριμένα στην παρούσα διάταξη έχουμε τοποθετήσει δύο φορείς φορτίου, έναντι ενός που είχαμε προηγουμένως έτσι ώστε να επιτύχουμε την κάμψη τεσσάρων σημείων. Οι δύο φορείς φορτίου στις θέσεις (3.1) και (3.2) που φαίνονται στην εικόνα 5, είναι συμμετρικά τοποθετημένοι σε απόσταση 300 mm από τις στηρίξεις (στη θέση (5) η στήριξη της άρθρωσης και στην (4) της κύλισης). Έτσι στην μεταξύ απόσταση των φορτίων επιτυγχάνουμε να έχουμε καθαρή κάμψη της δοκού διότι αναπτύσσεται μόνο καμπτική ροπή με σταθερό μέτρο, ενώ μεταξύ φορτίου και στηρίξεων η καμπτική ροπή δεν έχει σταθερή τιμή και αλλάζει κατά το μήκος της δοκού και έτσι έχουμε γενική κάμψη.

Κατά τη διαδικασία του πειράματος στην διάταξη των τεσσάρων σημείων, θα πραγματοποιήσουμε επτά δοκιμές με διαφορετικό φορτίο. Αρχικά θα ξεκινήσουμε ασκώντας συμμετρικά 10 N και 10 N και θα επαναλάβουμε έως τα 70 N και 70 N. Σε κάθε δοκιμή θα καταγράψουμε τις μετρήσεις των βελομέτρων στις θέσεις (1) και (2) ώστε να τις συγκρίνουμε με εκείνες που βρήκαμε εφαρμόζοντας τη θεωρία της κάμψης. Το βελόμετρο που βρίσκεται στη θέση (1) θα μας δώσει την τιμή του μέγιστου βέλους κάμψης καθώς βρίσκεται στο μέσον της δοκού σε απόσταση 600 mm από τις στηρίξεις. Το βελόμετρο στη θέση (2) είναι τοποθετημένο 300 mm από τη στήριξη της άρθρωσης.

Παρακάτω στον πίνακα (6.3) έχουμε τις πειραματικές μετρήσεις του βέλους κάμψης στις θέσεις (1) και (2).

Πίνακας 6.5 : Πειραματικά αποτελέσματα για κάμψη 4 – σημείων φόρτισης

| α/α | Φορτίο P - P (N) | Βελόμετρο (1) (mm) | Βελόμετρο(2) (mm) |
|-----|------------------|-----------------------|----------------------|
| 1 | 10 – 10 | 1.55 | 1.16 |
| 2 | 20 – 20 | 3.07 | 2.34 |
| 3 | 30 – 30 | 4.62 | 3.51 |
| 4 | 40 – 40 | 6.16 | 4.69 |
| 5 | 50 – 50 | 7.58 | 5.65 |
| 6 | 60 – 60 | 9.10 | 6.77 |
| 7 | 70 – 70 | 10.58 | 7.86 |

6.3 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Παρακάτω παραθέτουμε τους πίνακες (6.6 και 6.6) στους οποίους έχουμε συγκριτικά για την κάθε περίπτωση λειτουργίας της πειραματικής διάταξης τα θεωρητικά αποτελέσματα και τα πειραματικά έτσι ώστε να συγκρίνουμε τις τιμές που λάβαμε κατά τη διάρκεια του πειράματος.

Πίνακας 6.5.1 : Πειραματικά και θεωρητικά αποτελέσματα για κάμψη 4 – σημείων φόρτισης για το βελόμετρο (1)

| α/α | Ζεύγος Φορτίου P-P (N) | Βέλος κάμψης στη θέση (1) (v = 600 mm) ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ | Βέλος κάμψης στη θέση (1) (v = 600 mm) ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ | Σφάλμα (%) |
|-----|------------------------|--|--|------------|
| 1 | 10-10 | 1.55 | 1.45 | 6.45 |
| 2 | 20-20 | 3.07 | 2.90 | 5.54 |
| 3 | 30-30 | 4.62 | 4.35 | 5.84 |
| 4 | 40-40 | 6.16 | 5.80 | 5.84 |
| 5 | 50-50 | 7.58 | 7.25 | 4.35 |
| 6 | 60-60 | 9.10 | 8.70 | 4.40 |
| 7 | 70-70 | 10.58 | 10.15 | 4.06 |

Πίνακας 6.5.2 : Πειραματικά και θεωρητικά αποτελέσματα για κάμψη 4 – σημείων φόρτισης για το βελόμετρο (2)

| α/α | Ζεύγος Φορτίου P-P (N) | Βέλος κάμψης στη θέση (2) (x = 300 mm) ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ | Βέλος κάμψης στη θέση (2) (x = 300 mm) ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ | Σφάλμα (%) |
|------------|-------------------------------|---|---|-------------------|
| 1 | 10-10 | 1.16 | 1.05 | 5.41 |
| 2 | 20-20 | 2.34 | 2.11 | 5.38 |
| 3 | 30-30 | 3.51 | 3.16 | 5.39 |
| 4 | 40-40 | 4.69 | 4.22 | 5.59 |
| 5 | 50-50 | 5.65 | 5.27 | 5.56 |
| 6 | 60-60 | 6.77 | 6.33 | 5.66 |
| 7 | 70-70 | 7.86 | 7.38 | 5.63 |

Πίνακας 6.5.3 : Πειραματικά και θεωρητικά αποτελέσματα για κάμψη 3 – σημείων φόρτισης για το βελόμετρο (1)

| α/α | Φορτίο P (N) | Βέλος κάμψης στη θέση (1) (v = 600 mm) ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ | Βέλος κάμψης στη θέση (1) (v = 600 mm) ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ | Σφάλμα (%) |
|------------|---------------------|---|---|-------------------|
| 1 | 10 | 1 | 1.05 | 5.00 |
| 2 | 20 | 2 | 2.11 | 5.50 |
| 3 | 30 | 3.12 | 3.16 | 1.28 |
| 4 | 40 | 4.21 | 4.22 | 0.24 |
| 5 | 50 | 5.30 | 5.27 | 0.57 |
| 6 | 60 | 6.66 | 6.33 | 4.95 |
| 7 | 70 | 7.52 | 7.38 | 1.86 |
| 8 | 80 | 8.58 | 8.44 | 1.63 |
| 9 | 90 | 9.67 | 9.49 | 1.86 |
| 10 | 100 | 10.76 | 10.55 | 1.95 |
| 11 | 110 | 11.89 | 11.60 | 2.44 |

Πίνακας 6.5.4 : Πειραματικά και θεωρητικά αποτελέσματα για κάμψη 3 – σημείων φόρτισης για το βελόμετρο (2)

| α/α | Φορτίο P (N) | Βέλος κάμψης στη θέση (2) (x = 300 mm) ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ | Βέλος κάμψης στη θέση (2) (x = 300 mm) ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ | Σφάλμα (%) |
|------------|-------------------------|---|---|-----------------------|
| 1 | 10 | 0.73 | 0.73 | 0.00 |
| 2 | 20 | 1.46 | 1.45 | 0.68 |
| 3 | 30 | 2.24 | 2.18 | 2.68 |
| 4 | 40 | 3.03 | 2.90 | 4.29 |
| 5 | 50 | 3.80 | 3.63 | 4.47 |
| 6 | 60 | 4.62 | 4.35 | 5.84 |
| 7 | 70 | 5.38 | 5.08 | 5.58 |
| 8 | 80 | 6.14 | 5.80 | 5.54 |
| 9 | 90 | 6.92 | 6.53 | 5.64 |
| 10 | 100 | 7.69 | 7.25 | 5.72 |
| 11 | 110 | 8.49 | 7.98 | 6.01 |

7. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Σημειώσεις της θεωρίας του μαθήματος Μηχανική II
2. Παραδόσεις θεωρίας του μαθήματος Μηχανική II του τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών Τ.Ε. Τ.Ε.Ι Δυτικής Ελλάδας, Δρ. Τσινόπουλος Στέφανος
3. <http://eclass.teipat.gr/eclass/modules/document/file.php/465146/%CE%A0%CE%91%CE%A1%CE%9F%CE%A5%CE%A3%CE%99%CE%91%CE%A3%CE%95%CE%99%CE%A3%20%CE%95%CE%A1%CE%93%CE%91%CE%A3%CE%A4%CE%97%CE%A1%CE%99%CE%A9%CE%9D/05%20-%20%CE%9A%CE%AC%CE%BC%CF%88%CE%B7-2.pdf>
4. https://www.engineersedge.com/beam_bending/beam_bending4.htm
5. <http://eclass.gunet.gr/modules/document/file.php/LABGU100/ΘΕΩΡΙΑ%20ΠΕΙΡΑΜΑΤΩΝ/Kampsi.pdf>
6. http://users.auth.gr/~akonsta/BENDING_new.pdf
7. <http://eclass.gunet.gr/modules/document/file.php/OCGU107/%CE%9A%CE%AC%CE%BC%CF%88%CE%B7/%CE%A3%CE%B7%CE%BC%CE%B5%CE%B9%CF%8E%CF%83%CE%B5%CE%B9%CF%82%20%CE%BA%CE%AC%CE%BC%CF%88%CE%B7%CF%82%20%CE%93%CE%B5%CF%89%CF%81%CE%B3%CE%B1%CF%84%CE%B6%CE%AF%CE%BD%CE%BF%CF%85.pdf>
8. http://engineering-apps.blogspot.gr/2012/12/blog-post_4441.html
9. Θ. Κερμανίδη, ΑΝΤΟΧΗ ΥΛΙΚΩΝ 2, εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, 2009
10. Ferdinand P. Beer, E. Russel Johnston, Jr. ,John T. DeWolf, David F. Mazurek, ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ 6^η Έκδοση, εκδόσεις Τζιόλα