

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΔΥΤΙΚΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΜΕΣΩΝ ΜΑΖΙΚΗΣ ΕΝΗΜΕΡΩΣΗΣ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ 3Δ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΣΚΗΝΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΜΟΡΦΟΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΣΠΟΥΔΑΣΤΗ: ΒΑΓΕΝΑ ΑΓΓΕΛΙΚΗ

ΕΠΟΠΤΕΥΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : ΔΡΟΣΟΣ ΛΑΜΠΡΟΣ

ΠΥΡΓΟΣ - 2015

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η λέξη fractal, χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον Benoit Mandelbrot στη δεκαετία του '70. Εκείνος, χρονολόγησε την προέλευση της Fractal γεωμετρίας από το 1975 αλλά έδειξε ότι τα αντικείμενα που θεωρούνται τώρα fractal υπήρξαν πολύ πριν από εκείνη την δεκαετία. Πολλά φυσικά αντικείμενα, όπως τα δέντρα, οι ακτές ή τα σύννεφα, θεωρούνται τώρα ότι έχουν fractal ιδιότητες και ένα μεγάλο μέρος του τρέχοντος ενδιαφέροντος οφείλεται στις προσπάθειες να μιμηθούμε τέτοια φυσικά φαινόμενα με τη χρήση γραφικών με υπολογιστές. Άλλες περισσότερο αφηρημένες μορφές αντικειμένων fractal επινοήθηκαν από τους καλλιτέχνες και τους μαθηματικούς, και πάλι η διαθεσιμότητα των τρεχουσών τεχνικών στα γραφικά με υπολογιστές, έχει δώσει μία νέα οπτική στη δομή τέτοιων αντικειμένων. Η ουσιαστική ιδιότητα των fractals είναι αυτή της αυτο-ομοιότητας.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ	i
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	ii
ΕΙΣΑΓΩΓΗ	iii
Κεφάλαιο 1: Τι είναι τα Fractals	1
1.1. Οι ιδιότητες των Fractals	2
1.2. Τα Fractals στη Φύση	3
1.3. Τα Fractals στη Φυσική και την Βιολογία.....	5
1.4. Τα Fractals στη Φυσιολογία.....	5
Κεφάλαιο 2: Η Θεωρία του Χάους	7
2.1. Χαοτική Κίνηση	8
2.2. Δυναμικά Συστήματα και Χάος.....	9
2.2. DNA και Χάος.....	11
Κεφάλαιο 3: Μαθηματικό υπόβαθρο των Fractals	12
Κεφάλαιο 4: Είδη των Fractals	18
4.1. Διάσημα Fractals	22
4.1.1. Cantor Set ή σύνολο του Cantor ή σκόνη του Cantor	22
4.1.2. Τρίγωνο του Sierpinski ή Sierpinski Gasket,(Πλέγμα του Sierpinski)	24
4.1.3. Χαλί του Sierpinski (Sierpinski Carpet).....	25
4.1.4. Καμπύλη του Koch (Curve Koch).....	27
4.1.5. Guiseppe Peano curve ή καμπύλη του Peano.....	29
4.2. Το ζήτημα της Διάστασης.....	30
4.2.2. Υπολογισμός της διάστασης του τριγώνου Sierpinski.....	33
4.2.3. Υπολογισμός της διάστασης του Sierpinski Carpet.....	33
4.2.4. Υπολογισμός της διάστασης της νιφάδας του Koch.....	34
4.2.5. Υπολογισμός της διάστασης της καμπύλης του Peano	35
Κεφάλαιο 5: Εφαρμογές Fractal για προσομοίωση φυσικών φαινομένων	37
5.1. Κώδικας προσομοίωσης φυσικών φαινομένων.....	38
5.1.1. Παράδειγμα δέντρου διακλάδωσης.....	38
5.2. Αναδρομική Συνάρτηση δέντρου	43

5.3. Αναδρομή στο σύνολο του Cantor.....	47
5.4. Η καμπύλη Koch και η Τεχνική ArrayList.....	55
5.5.Γενικεύοντας τη χρησιμότητα των ΣΕΣ (Συστήματα Επαναλαμβανομένων Συναρτήσεων):Κωδικοποίηση εικόνων.....	61
Κεφάλαιο 6: Εφαρμογές των Fractals στα γραφικά Η/Υ	63
6.1. Το σύνολο του Mandelbrot και η ανάλυσή του στα γραφικά Η/Υ.....	63
6.2. Το σύνολο Julia και η αλληλεξάρτησή του από το σύνολο του Mandelbrot σε εικόνες γραφικών	69
6.3. Διατάξεις οπτικοποίησης των χρωμάτων που συναντάμε σε fractal εικόνες	76
6.4. Παραδείγματα Fractal εικόνων φλογών (Fractal flames images)	79
6.5. Παραδείγματα Fractal εικόνων λόγω πυκνότητας (Log-Density Display)	80
6.5. Χρωματισμός (Coloring).....	81
6.6. Ο παράγοντας Γάμμα (The Gamma Factor).....	82
6.7. Συμμετρία (Symmetry).....	82
6.8. Φιλτράρισμα (Filtering)	83
Κεφάλαιο 7: Συμπεράσματα Επίλογος.....	87
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ-ΑΝΑΦΟΡΕΣ.....	88

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Όλοι μας λίγο ή πολύ έχουμε θαυμάσει διάφορες εικόνες, τοπία που υπάρχουν γύρω μας και γενικότερα στη φύση, χωρίς όμως να δίνουμε ιδιαίτερη προσοχή. Τα fractals είναι στην ουσία αυτά που κρύβονται πίσω από όλα αυτά, είναι δηλαδή αυτά τα αντικείμενα που επαναλαμβάνονται συνεχώς και εμφανίζουν αυτοομοιότητα σε σχέση με το αρχικό αντικείμενο. Μερικοί έχουν ακούσει πως υπάρχει κάποια σύνδεσή τους με ορισμένα φυσικά αντικείμενα δίχως να αντιλαμβάνονται ποια σύνδεση εννοείται.

Τα fractals είναι ένας νέος κλάδος των Μαθηματικών και της Τέχνης. Είναι ο λόγος που οι περισσότεροι άνθρωποι αναγνωρίζουν τα fractals μόνο σαν όμορφες εικόνες χρήσιμα ως φόντο στη επιφάνεια εργασίας του Η/Υ ή ως πρότυπα στα καρτ-ποστάλ. Στη φύση γύρω μας επικρατούν άλλου είδους σχήματα: τα σύννεφα, οι κεραυνοί, οι παγοκρύσταλλοι, τα σφουγγάρια, οι ακτογραμμές παρουσιάζουν μια πολυπλοκότητα που δεν μοιάζει καθόλου με τα απλά γεωμετρικά αντικείμενα της κλασσικής Γεωμετρίας.

Στόχος μας είναι στην εργασία αυτή να ορίσουμε αρχικά στο 1^ο Κεφάλαιο τι είναι τα fractals, να μπούμε δηλαδή στον πολύπλοκο αυτό κόσμο και να εξετάσουμε το πώς δημιουργήθηκαν, πώς και από ποίον προήλθε η ονομασία τους αλλά και το πώς λειτουργούν στις διάφορες εκφάνσεις τους. Στην συνέχεια στο 2^ο Κεφάλαιο θα αναφερθούμε στην πολύ σημαντική θεωρία του χάους και το πώς αυτή σχετίζεται με τα fractals, καθώς θεωρείται, όχι άδικα, ως η τρίτη μεγαλύτερη επιστημονική επανάσταση του 21^{ου} αιώνα, από όλο τον επιστημονικό κόσμο. Στο 3^ο Κεφάλαιο θα επικεντρωθούμε κυρίως στο μαθηματικό υπόβαθρο των fractals. Ένα εξίσου σημαντικό κομμάτι είναι αυτό που θα αναλύσουμε στο 4^ο Κεφάλαιο που είναι τα είδη των fractals και πως αυτά συμπεριφέρονται ανάλογα κάθε φορά τον χρόνο, το μήκος και την διάσταση τους.

Πέρα όμως απ' όλα αυτά θα ήταν σκόπιμο να αναφερθούμε στο 5^ο Κεφάλαιο και στις εφαρμογές των fractals για προσομοίωση φυσικών φαινομένων καθώς και στον κώδικα που χρησιμοποιείται, ώστε μέσα από μια σειρά εντολών να βλέπουμε στον Η/Υ το τελικό αποτέλεσμα. Στο 6^ο Κεφάλαιο θα αναφερθούμε στις πολύ σημαντικές εφαρμογές των fractals στα γραφικά Ηλεκτρονικών Υπολογιστών, όπου εκεί είναι αξιοθαύμαστο να βλέπεις διάφορα σχήματα να παίρνουν μορφή, να εξελίσσονται, να πολλαπλασιάζονται ανάλογα πάντα από την χρονική τους κλίμακα. Και τέλος στο 7^ο Κεφάλαιο θα κλείσουμε με τα συμπεράσματα μας και τον επίλογο.

Κεφάλαιο 1: Τι είναι τα Fractals

Ο διεθνής όρος fractal¹ (μορφόκλασμα ή μορφοκλασματικό σύνολο) προέρχεται από την λατινική λέξη fractus που σημαίνει σπασμένος, κατακερματισμένος. Ιδρυτής του όρου αυτού θεωρείται ο Γάλλος μαθηματικός της IBM, Benoit Mandelbrot, ο οποίος το 1960 άρχισε να ερευνά την αυτοομοιότητα σε εργασίες όπως "Τι μήκος έχει η ακτή της Βρετανίας;" Ο Mandelbrot στηρίχτηκε σε προηγούμενη εργασία του Fry Richardson αλλά έκανε την υπέρβαση να αναγνωρίσει τη σύνδεση με τις σχετικές προηγηθείσες εργασίες των μαθηματικών και να δώσει έτσι νόημα σε αφηρημένες μαθηματικές έννοιες.

Ο Άγγλος μετεωρολόγος Richardson (1880-1953) είχε ήδη διαπιστώσει ότι δεν μπορούσε να βρει το ακριβές μήκος μιας ακτής, αφού όποτε προσπαθούσε να μετρήσει το μήκος μιας ακτογραμμής πάνω σε διαφορετικούς χάρτες με αυξανόμενη λεπτομέρεια, έβρισκε κάθε τόσο διαφορετικό αποτέλεσμα. Η αιτία ήταν ότι έφτανε κάποια στιγμή που έπρεπε να λάβει υπόψη τους μικρούς κολπίσκους, ρυάκια και χερσονήσους, στοιχεία τα οποία δεν λαμβάνονταν υπόψη σε πιο τραχείς χάρτες.

Η απάντηση που έδωσε ο Mandelbrot στο ερώτημα του Richardson του χάρισε μεγάλη φήμη. Απέδειξε ότι εφόσον μετράμε συνεχώς με ολοένα και μικρότερη μονάδα μέτρησης, το μετρούμενο μήκος μεγαλώνει απεριόριστα. Συμπέρανε λοιπόν ότι οι ακτές είναι ένα παράδειγμα αντικειμένων για τα οποία η απόλυτη μέτρηση του μήκους δεν έχει νόημα και επιπλέον ότι το σχήμα των ακτών με την τόσο πλούσια δομή του είναι σίγουρα κάτι παραπάνω από μονοδιάστατη καμπύλη και κάτι λιγότερο από τμήμα του δισδιάστατου επιπέδου, αφού δεν περιέχει καθόλου επιφάνεια.

Αυτή η διαφορετική διάσταση² είναι η κλασματική διάσταση ή διάσταση ομοιότητας ή χωρητικότητας, περισσότερο γνωστή σαν box-διάσταση (Box counting or capacity dimension), και με τη βοήθεια της μπόρεσε ο Mandelbrot και μετρήσε την «οδόντωση» της ακτογραμμής. Για την βρετανική ακτή, ο αριθμός αυτός έβγαλε ότι ήταν ίσος κατά προσέγγιση με 1,58 και για την πιο «άγρια» νορβηγική ακτή ήταν περίπου ίσος με 1,70. Την διάσταση αυτή ο Mandelbrot την ονόμασε φράκταλ διάσταση και τα αυτοόμοια (self-similar) αντικείμενα, όπως τις ακτογραμμές και τις περίεργες μαθηματικές κατασκευές, αντικείμενα fractal.

Πράγματι, όπως στα Μαθηματικά, τη Φυσική αλλά και σε πολλές επιστήμες ο όρος fractal περιγράφεται σαν ένα γεωμετρικό σχήμα που επαναλαμβάνεται αυτούσιο σε άπειρο βαθμό μεγέθυνσης και έτσι συχνά αναφέρεται σαν "απείρως περίπλοκο", δηλαδή εμφανίζει ανωμαλίες στη μορφή σε σχέση με τα συμβατικά γεωμετρικά σχήματα και αυτός είναι και ο λόγος που δεν μπορεί να οριστεί με την ευκλείδεια γεωμετρία αλλά με την 'άλλη' γεωμετρία, που εφεύρε ο Benoit Mandelbrot το 1975, η οποία μας επιτρέπει να μετρήσουμε την αταξία και το ακανόνιστο ενός αντικειμένου, τους ελκυστές των δυναμικών συστημάτων.

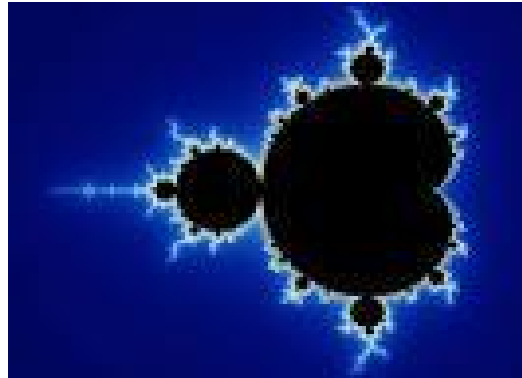
Η γεωμετρία των fractals, είναι μια νέα γεωμετρία που ενώνει τα μαθηματικά και την τεχνολογία με την πραγματικότητα της φύσης και όπως δήλωσε ο Mandelbrot στο αλησμόνητο μανιφέστο του³ (The fractal Geometry of Nature) "Τα σύννεφα δεν είναι σφαίρες, τα βουνά δεν είναι κώνοι, οι ακρογιαλιές δεν είναι κύκλοι και ο φλοιός της Γης δεν είναι λείος, ούτε οι κερανοί ταξιδεύουν ευθύγραμμα με την πραγματικότητα της φύσης.

¹ How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension, P.P:636-638.

² Ο θαυμαστός κόσμος των Fractals, P.P:66-75.

³ Εισαγωγή στη χαοτική δυναμική και στα Fractals, P:102.

Γενικότερα, ισχυρίζομαι ότι πολλά πρότυπα της φύσης είναι τόσο ακανόνιστα και αποσπασματικά, ώστε συγκρινόμενη με την ευκλείδεια-την καθιερωμένη γεωμετρία- η φύση έχει όχι μόνο έναν υψηλότερο βαθμό αλλά και μια εντελώς διαφορετική στάθμη πολυπλοκότητας.



Εικόνα 1.1. Mandelbrot set

(Ο θαυμαστός κόσμος των Fractals, Μπούντης. Α., P:31)

Η μεγάλη «νήσος του Mandelbrot», με μικρές κυκλικές χερσονήσους επάνω της, που φέρουν ακόμα μικρότερες γύρω τους, σε μια αλληλουχία που δεν τελειώνει ποτέ. Η ιδιαίτερα πολύπλοκη «παραλία» (μεταξύ του μαύρου και του μπλε) έχει κλασματική διάσταση μεταξύ 1 και 2, αφού είναι κάτι παραπάνω από καμπύλη και κάτι λιγότερο από επιφάνεια.

1.1. Οι ιδιότητες των Fractals

a) Ακριβής Αυτοομοιότητα (Self-Similarity)

Τα fractals¹ είναι αντικείμενα που εμφανίζουν ομοιότητες σε μέρη(κομμάτια)του αντικειμένου και στα γενικά χαρακτηριστικά του. Κάθε κομμάτι αποτελεί ένα αντίγραφο ολόκληρου του αντικειμένου. Η αυτό-ομοιότητα είναι ένα από τα παράδοξα του άπειρου, μια πηγή έντονης συζήτησης και εκπληκτικών εφαρμογών στον πεπερασμένο κόσμο μας. Ένα δένδρο, για παράδειγμα, ή ένα φύλλο φτέρης, ένα κουνουπίδι, το αρτηριακό σύστημα, μια θαλασσογραφία, όλα είναι παραδείγματα της αυτό-ομοιότητας στη φύση. Η έννοια της αυτοομοιότητας δεν συναντάται όμως μόνο στη φύση, καθώς τείνει να συμβαίνει και σε τεχνητά-κατασκευασμένα ή παράγωγα –περιβάλλοντα, καθώς και σε άλλους τομείς, διαστάσεις ή συστήματα του κόσμου μας. Αυτό-ομοιότητα παρατηρείται στα φαινόμενα του χρόνου και την ιστορία, στις λειτουργίες του ανθρώπινου εγκεφάλου όπως η μνήμη, στη δομή της κοινωνίας, στην ανάπτυξη της οικονομίας, στην κατανομή της εργασίας και στη δομή του κτισμένου χώρου μεταξύ άλλων. Έτσι, πολλοί μελετητές τα τελευταία χρόνια έχουν διερευνήσει τη σκοπιμότητα εφαρμογής της έννοιας της αυτό-ομοιότητας βρίσκεται στο επίκεντρο όλο και περισσότερων μελετών και θεωρείται ότι αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα ερευνητικά εργαλεία.

¹ Υπολογιστικοί αλγόριθμοι σε μορφοκλασματικά σύνολα, ρ.Koutsakis.pdf,P.P:7-8

b) Ημί-αυτο-ομοιότητα (Semi-Self-Similarity)

Είναι μια πιο χαλαρή μορφή αυτο-ομοιότητας. Όταν υπάρχει αυτή, ένα fractal εμφανίζεται περίπου(αλλά όχι ακριβώς) ίδιο σε διάφορες κλίμακες. Στα ημι-αυτο-όμοια fractals γίνεται φανερό μετά από μεγεθύνσεις ότι περιέχουν σε μικρά αντίγραφα την απεικόνιση που περιλαμβάνει ολόκληρο το fractal σε διαστρεβλωμένες μορφές. Fractals που ορίζονται από εφαρμογή αναδρομικών σχέσεων σε διάστημα εμφανίζουν συνήθως ημι-αυτο-ομοιότητα.

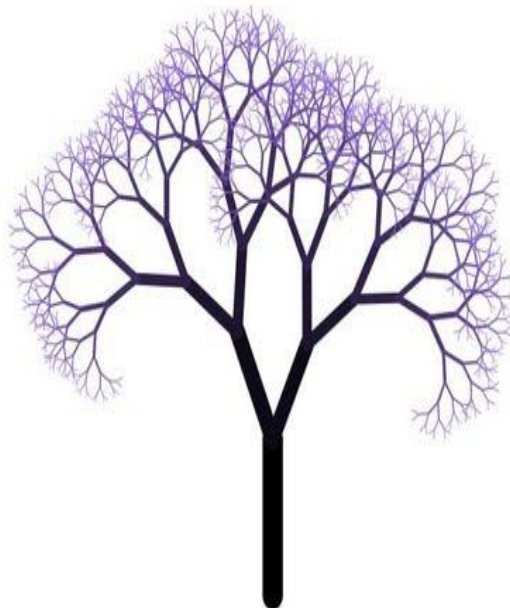
c) Στατιστική αυτοομοιότητα (Statistic-Self-Similarity)

Είναι ο πιο αδύνατος τύπος αυτο-ομοιότητας. Όταν την εμφανίζει ένα fractal, διατηρούνται αριθμητικά ή στατιστικά μεγέθη ανά τις κλίμακες μεγέθυνσης. Οι περισσότεροι λογικοί ορισμοί για τον όρο "fractal" υπονοούν σιωπηρά κάποια μορφή στατιστικής αυτο-ομοιότητας, η ίδια η διάσταση fractal είναι ένα αριθμητικό μέτρο που διατηρείται σε κάθε κλίμακα.

Τα τυχαία fractals είναι παραδείγματα fractals που δεν είναι στατιστικά αυτο-όμοια, αλλά ούτε ακριβώς ούτε ημι-αυτο-όμοια. Επειδή τα fractal εμφανίζουν τεράστια λεπτομέρεια σε όποια κλίμακα και αν τα μεγεθύνουμε, είναι λογικό το συμπέρασμα ότι κανένα φυσικό αντικείμενο δεν είναι fractal. Εντούτοις, πολλά φυσικά αντικείμενα εμφανίζουν ιδιότητες παρόμοιες με τα διάφορα είδη fractal για κάποιο περιορισμένο εύρος της κλίμακας αυτο-ομοιότητας.

1.2. Τα Fractals στη Φύση

Fractals απαντώνται και στη φύση, χωρίς όμως να υπάρχει άπειρη λεπτομέρεια στη μεγέθυνση όπως στα fractals που προκύπτουν από μαθηματικές σχέσεις. Ως παραδείγματα fractals στη φύση, αναφέρονται το σχέδιο των νιφάδων του χιονιού, τα φύλλα των φυτών ή οι διακλαδώσεις των αιμοφόρων αγγείων.



Εικόνα 1.2. Fractal φύσης δέντρο

(www.moschonas.gr)



Εικόνα 1.2.1. Fractal φτέρη Barnsley

(eineken.pblogs.gr)



Εικόνα 1.2.2. Fractal φύσης κουνουπίδι

(www.moschonas.gr)



Εικόνα 1.2.3. Fractal φύσης λουλούδια

(www.gizmocrazed.com)



Εικόνα 1.2.4. Fractal φύσης αγγεία

(paidio.blogspot.com)

Φαίνεται ότι τα fractals είναι μια από τις δημιουργικές δυνάμεις στη φύση. Και εννοούμε αυτή την τάση της αυτο-ομοιότητας που υπάρχει διάχυτη είτε σε φανερό είτε σε αφαιρετικό επίπεδο.

1.3. Τα Fractals στη Φυσική και την Βιολογία

Η πρώτη εφαρμογή των fractals ήταν η λύση του προβλήματος του ηχητικών παράσιτων που δημιουργούνται κατά τις τηλεφωνικές συνομιλίες. Αυτά τα παράσιτα διαπίστωσε ο Mandelbrot ότι είναι ηλεκτρικές διαταραχές που εμφανίζονται ομαδοποιημένες. Ανάλογη ομαδοποίηση παρατήρησε και στα λάθη κατά την ηλεκτρική μεταβίβαση των δεδομένων των υπολογιστών.

Η διαπίστωση ήταν ότι οι ομαδοποιήσεις αυτές και τα κενά μεταξύ τους θύμιζαν καταπληκτικά την δομή του συνόλου Cantor. Ο Mandelbrot απέδωσε και στο σύμπαν ένα μοντέλο δομής ενός τρισδιάστατου συνόλου Cantor. Το μοντέλο αυτό σίγουρα δεν είναι καθόλου ρεαλιστικό όμως κατάφερε να ερμηνεύσει με επιτυχία την μέχρι τώρα ανεξήγητη κατανομή της αστρικής ύλης στο σύμπαν μας¹.

1.4. Τα Fractals στη Φυσιολογία

Η επιστημονική γοητεία των fractals είναι αναμφισβήτητη. Υπάρχουν θεωρίες που υποδηλώνουν ότι οι ιδιότητες των fractals μπορεί να καθορίζουν ακόμη και την αισθητική μας. Ο μηχανικός υπολογιστών Homer Smith σημειώνει «Εάν σας αρέσουν τα fractals, είναι επειδή είστε φτιαγμένοι από αυτά. Εάν δεν αντέχετε τα fractals, είναι επειδή δεν αντέχετε τον εαυτό σας. Συμβαίνει». Η φράση του είναι αληθινή².

Πολλά από τα συστήματα του οργανισμού μας εμφανίζουν χαρακτηριστικά fractal. Οι πνεύμονες των ενηλίκων έχουν μια εσωτερική επιφάνεια μεγαλύτερη από ένα γήπεδο τένις. Το έντερο έχει επιφάνεια 300 τετραγωνικών μέτρων. Προφανώς, χρειάζεται ένα άκρως αποτελεσματικό σύστημα πακεταρίσματος για τέτοιες συμπτώξεις και η γεωμετρία των fractal είναι ένα τέτοιο σύστημα. Η αυτο-ομοιότητα σε κάθε κλίμακα αυξάνει σημαντικά την

¹ Fractal Geometry Mandelbrot Set.pdf.

² www.iatrikionline.gr.

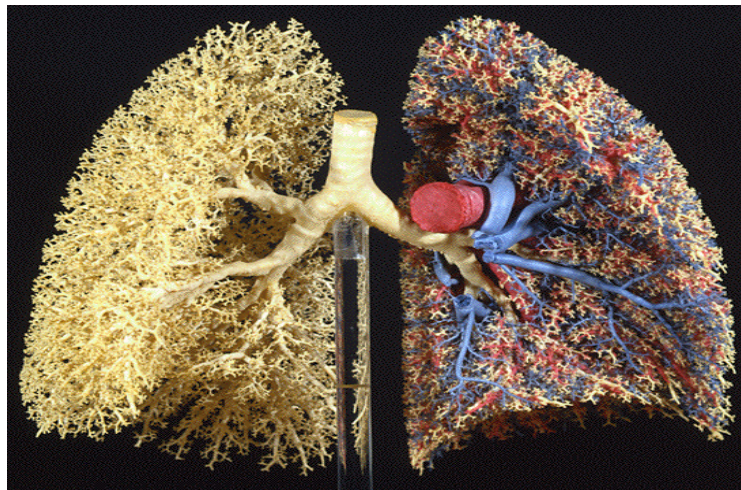
επιφάνεια χωρίς να αυξάνει τον όγκο. Προφανώς, χρειάζεται ένα άκρως αποτελεσματικό σύστημα πακεταρίσματος για τέτοιες συμπτώξεις και η γεωμετρία των fractal είναι ένα τέτοιο σύστημα.

Η αυτο-ομοιότητα σε κάθε κλίμακα αυξάνει σημαντικά την επιφάνεια χωρίς να αυξάνει τον όγκο. Τα fractals είναι ένας τρόπος σύμπτυξης ενός συστήματος χωρίς να μειωθεί η αποτελεσματική λειτουργία του. Το ανθρώπινο αγγειακό δέντρο είναι τόσο πολύ πακεταρισμένο που εμφανίζει μια δραστική fractal διάσταση της τάξης του 3 .

Το σύστημα των αρτηριών έχει μια διάσταση της τάξης του 2.7. Αυτό σημαίνει ότι το αγγειακό σύστημα είναι τόσο compact όσο μια απλή γραμμή που περιστρέφεται στον εαυτό της σε μια τέλεια σφαίρα διατηρώντας την επιφάνεια ολόκληρης της γραμμής. Τα fractals είναι επίσης ένας πολύ αποτελεσματικός τρόπος κατανομής. Μια φάλαινα είναι 10 εκατομμύρια φορές βαρύτερη από ένα ποντίκι, ωστόσο χρειάζεται μόνο 70% περισσότερους κλάδους στο κυκλοφορικό της σύστημα.

Τα συστήματα κατανομής του σώματος, καρδιαγγειακό, αναπνευστικό, λεμφαγγειακό, πεπτικό όλα διαθέτουν χαρακτηριστικά fractals. Για παράδειγμα, η διακλάδωση των αρτηριών, των φλεβών και των τριχοειδών στο καρδιαγγειακό σύστημα είναι τυχαία, εμφανίζει αυτο-ομοιότητα και μάλιστα σε κάθε κλίμακα. Εκτός από αποτελεσματική, η γεωμετρία fractal είναι επίσης απλή. Οι εκθετικές ερμηνείες των διακλαδώσεων στο σώμα απαιτούν περισσότερες πολυπαραγοντικές εξισώσεις από τις μη γραμμικές περιγραφές.

Οι fractal διακλαδώσεις όλων των συστημάτων του σώματος, από τους χοληφόρους πόρους στο ήπαρ μέχρι τις ίνες του κολποκοιλιακού δεματίου στην καρδιά, μπορεί να περιγραφούν με μικρό αριθμό δεδομένων. Είναι εύκολο για το DNA να εξειδικεύσει μια απλή επαναληπτική διαδικασία διακλάδωσης και ανάπτυξης των ποικίλων συστημάτων που διαθέτουν παρόμοια δομή. Τα σώματά μας είναι fractals απλώς επειδή αποτελούν την απλούστερη, την πλέον αποτελεσματική, δυνατή επιλογή.



Εικόνα 1.4. Οι ανθρώπινοι πνεύμονες ως fractal

(ceftcool.blogspot.com)

Κεφάλαιο 2: Η Θεωρία του Χάους

Η θεωρία του Χάους¹ ή της χαοτικής δυναμικής, που ευρέως αναφέρεται ως το φαινόμενο της πεταλούδας, αποτελεί έναν ιδιαίτερο κλάδο των θετικών επιστημών, όπου όλο και περισσότεροι επιστήμονες από διάφορα επιστημονικά πεδία (Ιατρικής, Γεωλογίας, Θερμοδυναμικής, Κοινωνιολογίας, Βιολογίας, Αεροδυναμικής, κλπ.) βρίσκουν λύσεις σε πολλά από τα μέχρι τώρα άλυτα ερωτήματά τους.

Ένα σημαντικό μέρος του επιστημονικού κόσμου δηλώνει ότι η επιστημονική ανάπτυξη του 20ου αιώνα θα περάσει στην ιστορία κυρίως για τρία πράγματα: τη θεωρία της Σχετικότητας, την Κβαντομηχανική και τη θεωρία του Χάους, που θεωρείται ως η τρίτη μεγάλη επιστημονική επανάσταση αυτού του αιώνα. Αλλά τι είναι η θεωρία του Χάους ;

Η θεωρία του Χάους είναι μια καινούρια θεωρία, που αμφισβητεί την κλασική νευτώνεια θεωρία, η οποία έχει σαν θεμέλιο λίθο τη βεβαιότητα ότι με κατάλληλες συνθήκες η εξέλιξη κάθε συστήματος είναι πλήρως προβλέψιμη. Μελετά το ζήτημα αν μπορούμε ή όχι (και γιατί) να κάνουμε προβλέψεις σε μεγάλο βάθος χρόνου για τη συμπεριφορά ενός συστήματος και μας βοηθά να συνδέσουμε το προβλέψιμο με το απρόβλεπτο και το κανονικό με το τυχαίο, αποκαλύπτοντας τελικά μια κρυμμένη τάξη στην εξέλιξη ενός συστήματος.

Η θεωρία αυτή δίνει στη λέξη Χάος ένα ειδικό νόημα, το οποίο διαφέρει από την καθημερινή σημασία της λέξης. Η ονομασία Χάος όπως τη χρησιμοποιούμε σήμερα πρωτοχρησιμοποιήθηκε από τον μαθηματικό James A. Yorke τη δεκαετία του 1960, πρωτοπόρος όμως και εμπνευστής του ντετερμινιστικού χάους ή απλά χάους είναι ο Έντουαρντ Λόρεντζ και συνοψίζει την έννοια του Χάους ως εξής:²

“Όταν το παρόν καθορίζει το μέλλον, αλλά η προσέγγιση του παρόντος δεν προσδιορίζει κατά προσέγγιση το μέλλον”.

Χαοτική συμπεριφορά μπορεί να παρατηρηθεί σε πολλά φυσικά συστήματα, όπως ο καιρός, η ατμόσφαιρα, το ηλιακό σύστημα και η εξέλιξη(μεταβολή)των πληθυσμών. Τα συστήματα που παρουσιάζουν μαθηματικό χάος είναι ντετερμινιστικά και επομένως εύτακτα υπό μια έννοια. Αυτή η τεχνική χρήση του όρου “Χάους” διαφωνεί με την καθομιλουμένη, στην οποία το χάος υποδηλώνει την παντελή έλλειψη τάξης.

Όταν λέγεται ότι η θεωρία του Χάους μελετά ντετερμινιστικά συστήματα, είναι απαραίτητο να αναφέρεται και το συγγενές πεδίο της Φυσικής που λέγεται Κβαντική θεωρία του Χάους και μελετά μη αιτιοκρατικά συστήματα σύμφωνα με τους νόμους της Κβαντομηχανικής. Με την εμφάνιση της θεωρίας του Χάους συντελείται μια σημαντική αλλαγή στον τρόπο με τον οποίο προσεγγίζεται ο κόσμος. Η φιλοσοφία της επιστήμης δεν είναι δυνατόν να παραμείνει ανεπηρέαστη από αυτή την αλλαγή.

Χωρίς επιφύλαξη θα μπορούσαμε να πούμε ότι η εμφάνιση αυτής της θεωρίας αποτελεί το τέλος του αναγωγικού προσανατολισμού στην επιστήμη. Η προβληματική που εισάγει η θεωρία του χάους δεν φαίνεται να είναι ξένη προς αυτή των κλασικών του Μαρξισμού. Η διαλεκτική λογική και η θεωρία του Χάους, παρά τις περί του αντιθέτου απόψεις, έχουν κοινά πλαίσια αναφοράς. Η επιστήμη του Χάους αποτελεί όμως ένα δυναμικά εξελισσόμενο

¹ Η ονομασία οφείλεται στο Μαθηματικό του Πανεπιστημίου του Maryland, Jim York και δόθηκε μόλις το 1975(Ένας οδηγός του Χάους σε αρχάριους-Σαν ιστορία, στο <http://www.physics.4u.gr>.

² Chaos in an Atmosphere Hanging on a Wall,P:47.

ερευνητικό πρόγραμμα. Τα αποτελέσματα της έρευνας των τρόπων με τους οποίους η τάξη αποδιοργανώνεται σε χάος, των τρόπων με τους οποίους το χάος δημιουργεί τάξη, της μετατόπισης από τα ποσοτικά γνωρίσματα των δυναμικών συστημάτων στις ποιοτικές τους ιδιότητες θα απασχολήσουν στο μέλλον τις κοινότητες των επιστημόνων και των φιλοσόφων της επιστήμης.

Διάσημα ρητά για το Χάος:

Για ένα καρφί χάθηκε το πέταλο

Για ένα πέταλο χάθηκε ένα άλογο

Για ένα άλογο χάθηκε ένας ιππότης

Για έναν ιππότη χάθηκε ένα μήνυμα

Για ένα μήνυμα χάθηκε μια μάχη

Για μια μάχη χάθηκε ένας πόλεμος

Για ένα πόλεμο χάθηκε ένα βασίλειο

Για ένα βασίλειο χάθηκε μια αυτοκρατορία.¹

Το πέταγμα μιας πεταλούδας στην Ινδία μπορεί να έχει ως αποτέλεσμα έναν τυφώνα στο Τέξας.

2.1. Χαστική Κίνηση

Δεν υπάρχει γενικώς αποδεκτός ορισμός της χαστικής κίνησης. Ο πιο διαδεδομένος είναι αυτός του Devaney, που διατυπώνεται ως εξής: Για να χαρακτηριστεί η συμπεριφορά ενός συστήματος ως χαστική, το σύστημα πρέπει να παρουσιάζει τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Πρέπει να παρουσιάζει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες
2. Πρέπει να είναι τοπολογικά μεταβατικό
3. Το σύνολο των περιοδικών του τροχιών πρέπει να είναι πυκνό

Ευαίσθησία στις αρχικές συνθήκες σημαίνει ότι δύο σημεία σε ένα τέτοιο σύστημα μπορούν να ακολουθήσουν ριζικά διαφορετικές τροχιές στον φασικό χώρο, ακόμα και αν η διαφορά στις αρχικές συνθήκες είναι εξαιρετικά μικρή. Τα συστήματα συμπεριφέρονται με τον ίδιο τρόπο μόνο όταν η αρχική διαμόρφωση είναι ακριβώς η ίδια.

Ουσιαστικά, αυτό σημαίνει ότι χρειάζεται κανείς να προσδιορίσει τις αρχικές συνθήκες με απεριόριστη ακρίβεια, προκειμένου να προβλέψει πώς θα συμπεριφερθεί το σύστημα πέρα από έναν περιορισμένο χρονικό ορίζοντα. Στην πράξη, βέβαια, μπορούμε να προσδιορίσουμε τις αρχικές συνθήκες με περιορισμένη μόνο ακρίβεια.

Μεταβατικότητα σημαίνει ότι εάν επιφέρουμε μια μετατροπή σε κάποιο διάστημα I_1 , τότε το διάστημα εκτείνεται μέχρι να επικαλύψει οποιοδήποτε άλλο δεδομένο διάστημα I_2 .^H

¹ Χάος Μια νέα Επιστήμη,Ρ:25.

μεταβατικότητα, τα πυκνά περιοδικά σημεία και η ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες μπορούν να επεκταθούν σε έναν αυθαίρετο μετρικό χώρο. Ο J. Banks και οι συνεργάτες του έδειξαν το 1992 ότι στα πλαίσια ενός γενικού μετρικού χώρου, η μεταβατικότητα και τα πυκνά περιοδικά σημεία υπονοούν την ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες.



Εικόνα 2.1. Ο Ελκυστής του Lorenz

(estarian.blogspot.com)

(Αυτή η εικόνα έγινε το σύμβολο του Χάους στα πρώτα χρόνια. Αποκαλύπτει τη μικροσκοπική δομή που ήταν κρυμμένη μέσα σε μια άτακτη ροή δεδομένων. Η απεικόνιση αυτή εμφανίζει ένα είδος άπειρης πολυπλοκότητας και μοιάζει σαν δυο φτερά μιας πεταλούδας ή σαν ένα είδος διπλής έλικας. Το σχήμα φανερώνει μια καθαρή αταξία, αλλά και ένα νέο είδος τάξης).

2.2. Δυναμικά Συστήματα και Χάος

Δυναμικό Σύστημα¹, είναι ένα οποιοδήποτε σύνολο αλληλεπιδρώντων μεταβλητών π.χ. φυσικών, χημικών, βιολογικών, οικονομικών κ.λ.π. που εξελίσσονται στο χρόνο σύμφωνα με συγκεκριμένους νόμους ή κανόνες. Η μόνη ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος που μπορεί να είναι συνεχής ή διακριτός. Στην πρώτη περίπτωση η μεταβλητή του χρόνου παίρνει οποιαδήποτε τιμή από το $-\infty$ (απώτερο παρελθόν) έως το $+\infty$ (απώτερο μέλλον).

Το δυναμικό σύστημα χαρακτηρίζεται τότε σαν σύστημα συνεχούς χρόνου και απαιτεί για την επίλυση του διαφορικές εξισώσεις. Στην δεύτερη περίπτωση η μεταβλητή του χρόνου είναι διακριτή, που σημαίνει ότι οι τιμές του χρόνου δεν έχουν συνεχή ροή αλλά είναι απομονωμένες μεταξύ τους, δηλαδή οι παρατηρήσεις γίνονται κατά τακτά χρονικά διαστήματα. Στην τελευταία περίπτωση η μαθηματική μελέτη είναι κατά πολύ απλούστερη της πρώτης αλλά χωρίς όμως αυτή η απλή μαθηματική περιγραφή να στερεί από τα προβλήματα που μελετώνται την πλούσια συμπεριφορά των δυναμικών συστημάτων. Στην κλασική μηχανική η συμπεριφορά ενός συστήματος που μεταβάλλεται στο χρόνο, ενός δυναμικού συστήματος, μπορεί να περιγραφεί γεωμετρικά ως κίνηση προς μια θέση ισορροπίας που αποτελεί τον ελκυστή του συστήματος.

Ας πάρουμε την κίνηση ενός ιδανικού εκκρεμούς που είναι το κλασικό παράδειγμα στο μάθημα της Φυσικής. Μετά από μια ώθηση, κινείται μπρός –πίσω μέχρι να ηρεμήσει και

¹ Ο Θαυμαστός κόσμος των Fractal, P:158

πάλι στο κέντρο. Η κεντρική αυτή θέση είναι το σημείο έλξης του συστήματος, ο ελκυστής του. Σε όποια θέση κι αν αφήσουμε το εκκρεμές, αυτό θα έλκεται από αυτό το σημείο, θα ισορροπεί σε αυτό το σημείο. Δεν διαθέτουν όλα τα συστήματα ένα τέτοιο σημείο. Στα μαθηματικά της κλασικής μηχανικής ήταν γνωστοί τρεις τύποι ελκυστών: **μεμονωμένα σημεία**(που χαρακτηρίζουν σταθερές καταστάσεις, όπως το ιδανικό εκκρεμές που προαναφέρθηκε), **κλειστοί βρόχοι**(περιοδικές κινήσεις σε «κύκλους») και **δακτύλιοι**(συνδυασμοί διαφόρων κύκλων).

Για να αντιληφθούμε καλύτερα την έννοια του ελκυστή, θα αναφερθούμε στις παραμέτρους που επηρεάζουν την κίνηση, με άλλα λόγια τις διαστάσεις της κίνησης. Στο παράδειγμα του ιδανικού εκκρεμούς οι διάφορες παράμετροι της συμπεριφοράς της κίνησης του είναι τέσσερις, οι τρεις του χώρου(x, y, z) και ο χρόνος.

Αν όμως το ίδιο το εκκρεμές είναι μια ανεστραμμένη αλατιέρα, τότε το βάρος του θα αλλάζει, καθώς θα χύνεται το αλάτι. Αυτή η συνεχώς νέα πληροφορία της τιμής του βάρους επανεισάγεται συνεχώς στο σύστημα επηρεάζοντας την κίνηση και αυτή με τη σειρά της τον ρυθμό απώλειας του βάρους κ.ο.κ. με αποτέλεσμα το βάρος να γίνεται η πέμπτη διάσταση. Αν θεωρήσουμε τον πενταδιάστατο αυτό χώρο σαν σύστημα αναφοράς, τότε η συμπεριφορά του συστήματος θα περιγράφεται σαν μια τροχιά που διαγράφεται σε αυτόν τον ιδεατό χώρο.

Αν παρατηρήσουμε και μελετήσουμε τα δυναμικά συστήματα που εμφανίζονται στη φύση, θα βρεθούμε μπροστά σε ένα Χάος. Μερικά έχουν τόσο πολύπλοκη δόμηση και συμπεριφορά, ώστε να καταλήγουμε να μιλάμε για παράξενους ελκυστές και μάλιστα για "χώρους" έλξης αφού αυτά έλκονται προς παράξενα και περίπλοκα σχήματα. Γι'αυτό αυτά τα συστήματα ονομάζονται χαοτικά και παρόλο που συνήθως καθορίζονται από ένα σύνολο απλών κανόνων, λόγω συνθηκών αναδράσεως, ανατροφοδότησης δεδομένων, αναπτύσσονται κατά τρόπο περίπλοκο και ασαφή και χωρίς την χρήση των H/Y , θα ήταν αδύνατο να αντιληφτούμε τι συμβαίνει.

Στη θεωρία λοιπόν του Χάους, έχουμε γενίκευση των ελκυστών, των καταστάσεων δηλαδή ισορροπίας του συστήματος με αποτέλεσμα τελικά η θεωρία του Χάους να είναι μια θεωρία γενικής ισορροπίας. Ισορροπία τώρα δεν είναι εξορισμού η τάση επιστροφής του συστήματος σε ένα απλό σημείο αλλά σε ένα σύνολο σημείων, σύνολο το οποίο καλείται ελκυστής(attractor). Εάν το σύνολο των σημείων ισορροπίας συρρικνωθεί σε ένα μόνο σημείο, τότε έχουμε την κλασική έννοια του σημείου ισορροπίας(point attractor).

Οι ελκυστές δεν είναι μόνο οι αναμενόμενοι, αυτοί της κλασικής μηχανικής, αλλά και διάφορες καμπύλες ή και μια ολόκληρη επιφάνεια χωρίς συγκεκριμένη διάταξη, που λέγεται μάλιστα παράξενος ελκυστής(strange attractor). Η ύπαρξη αυτού του παράξενου ελκυστή προκαλεί το απρόβλεπτο της συμπεριφοράς του συστήματος. Αυτή η νέα τάξη παράξενων ελκυστών, προς τους οποίους η δυναμική είναι χαοτική, δηλαδή απρόβλεπτη, ανακαλύφθηκε κατά τη δεκαετία του 1960 από τον Αμερικανό μαθηματικό Stephen Smale. Αργότερα διαπιστώθηκε ότι αυτοί οι ελκυστές έχουν λεπτομερή αλλά και την ίδια δομή σε όλες τις κλίμακες μεγέθυνσης(αυτοομοιότητα).

Εμφανίζονται λοιπόν πάλι τα fractals όχι πια σαν ένα μαθηματικό κατασκεύασμα αλλά σαν ένα σύνολο έλξης των χαοτικών τροχιών ενός δυναμικού συστήματος. Η πολυπλοκότητα τους που διέπεται από την ιδιότητα της αυτοομοιότητας υπό αλλαγή κλίμακας 'παντρεύει' μόνιμα τον χώρο και το χρόνο συνδέοντας τους γραφικά στην κλίνη της οθόνης του H/Y . Σήμερα ξέρουμε ότι ο παράξενος ελκυστής του Lorenz που παρουσιάζει μια τόσο σύνθετη δομή κάτω από συνεχείς μεγεθύνσεις δίνοντας την εντύπωση ότι εκτείνεται πέραν των δυο διαστάσεων, χωρίς όμως να γεμίζει ένα τμήμα του 3-διάστατου χώρου, είναι ένα fractal.

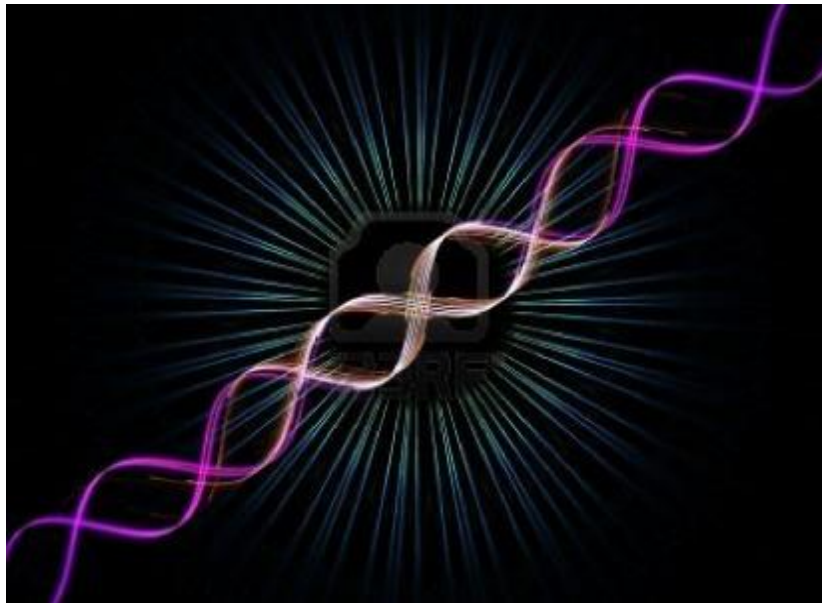
Η εύρεση των ελκυστών ενός δυναμικού συστήματος είναι σημαντική γιατί είναι κατάσταση στην οποία τελικά θα ισορροπήσει το σύστημα, επομένως η εύρεση τους ισοδυναμεί με πρόβλεψη της τελικής κατάληξης. Είναι εύκολο να κατανοήσουμε τη σπουδαιότητα αυτής της

εύρεσης αν σκεφτούμε ότι δυναμικά συστήματα είναι η κίνηση των πλανητών, το μετεωρολογικό σύστημα, οι αυξομειώσεις πληθυσμού, η ροή υγρού κ.λ.π.

2.2. DNA και Χάος

Η θεωρία του χάους έφερε μεγάλη αναταραχή σε όλες τις επιστήμες. Είναι μια γενική αρχή που επηρεάζει όλους τους τομείς της σύγχρονης επιστήμης. Τώρα όλοι οι επιστήμονες αρχίζουν και επανεξετάζουν τα αποτελέσματά τους και δείχνουν μία δυσπιστία στην ακρίβεια των κλασικών μεθόδων. Η μελέτη των αλληλουχιών του DNA διαφόρων οργανισμών είναι ένα νέο πεδίο επιστημονικής έρευνας. Έχει ανακαλυφθεί ότι πολλές από αυτές τις αλληλουχίες είναι πολύ δύσκολο να αναλυθούν και για αυτό πρέπει να αναπτυχθούν νέα εργαλεία που να ερευνήσουν τους μηχανισμούς σύμφωνα με τους οποίους η πληροφορία αποθηκεύεται στην αλυσίδα του DNA.

Πιστεύεται ότι πολλά υποσχόμενες τεχνικές για την ανάλυση του γονιδιώματος θα προέλθουν από άλλα πεδία της επιστημονικής έρευνας συμπεριλαμβανομένου και της Γεωμετρίας των fractals. Ανακαλύπτοντας το χαοτικό πρότυπο που ακολουθεί η ανάπτυξη των αιματικών αγγείων και των νευρώνων καθώς και το χαοτικό τρόπο με τον οποίο εμφανίζονται αυτές οι πληροφορίες στην αλληλουχία του DNA, θα μπορούμε στο μέλλον να κατευθύνουμε την ανάπτυξη των αιματικών αγγείων και ακόμα και του ίδιου του εγκεφάλου¹.



Εικόνα 2.2. DNA Fractal

(www.iatrikionline.gr)

¹ www.iatrikionline.gr

Κεφάλαιο 3: Μαθηματικό υπόβαθρο των Fractals

Μία από τις πιο σημαντικές ανακαλύψεις στα μαθηματικά του προηγούμενου αιώνα που εξακολουθεί να απασχολεί πολλούς μαθηματικούς ακόμη και σήμερα είναι η αντίληψη ότι ακόμη και τα πιο απλά δυναμικά συστήματα μπορεί να εμφανίζουν εξαιρετική δυσκολία στην πρόβλεψη της εξέλιξης τους στο χρόνο. Ας πάρουμε για παράδειγμα τις εξισώσεις¹:

$$y = x^2 + c \quad (3.1)$$

$$\text{και } x = y \quad (3.2)$$

με $x, y, c \in \mathbb{R}$. Οι εξισώσεις αυτές αποτελούν τις εκφράσεις μιας παραβολής και μιας ευθείας αντίστοιχα. Πολλά από τα δημοφιλή μαθηματικά του παρόντος μπορούν να περιγραφούν με τη βοήθεια των δυο παραπάνω, ή αντίστοιχων εξισώσεων. Ένας τρόπος για να ερμηνευθούν οι εξισώσεις που μας απασχολούν είναι ως δυο καμπύλες στο επίπεδο. Ένας άλλος όμως περισσότερο ενδιαφέρον είναι να τις δει κάποιος σαν ένα σύνολο οδηγιών (όπως σε έναν αλγόριθμο):

Δοθέντος πραγματικού αριθμού x υπολογίστε το τετράγωνο του και προσθέστε τη σταθερά c . Έστω το αποτέλεσμα y . Με το y αμετάβλητο, ονομάστε το αποτέλεσμα x . Επαναλάβετε το βήμα 1 με την τιμή που βρέθηκε στο βήμα 2.

Οι πρώτες δυο οδηγίες μαζί, δίνουν μια απεικόνιση του ενός αριθμού στον άλλον:

$$f: x \rightarrow x^2 + c \quad (3.3)$$

Αν πραγματοποιήσουμε το παραπάνω για όλους τους πραγματικούς θα έχουμε μια απεικόνιση των πραγματικών στους πραγματικούς που θα εμφανίζεται ως $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Η προσθήκη του τρίτου βήματος μας δίνει μια απεικόνιση επαναληπτικής διαδικασίας (iterated mapping) που έχει ως χαρακτηριστικό ένα fractal. Θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό $f^n(x)$ για να εφαρμόσουμε τη n -οστή επανάληψη (αυτή δηλαδή που προκύπτει μετά από n εφαρμογές του αλγόριθμου της επανάληψης, στην αρχική τιμή μας, τη x). Έτσι έχουμε τη σειρά αριθμών: $x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots, f^n(x), \dots$, η οποία καλείται τροχιά (orbit).

Η αρχική συνθήκη για το x έχει καθιερωθεί κυρίως από εφαρμογές στην επιστήμη των υπολογιστών να λέγεται σπόρος (seed) της τροχιάς. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει συνθήκη στον αλγόριθμο που να υποδεικνύει πότε σταματάει η εκτέλεση του. Αν όμως ένας άνθρωπος εκτελέσει τον αλγόριθμο και όχι ένας υπολογιστής, θα εφεύρει ενδεχομένως κάποτε μια συνθήκη που θα τερματίζει τον αλγόριθμο. Η συνθήκη αυτή θα προκύψει από ένα δείγμα τιμών που θα λάβει. Για να κατανοηθεί καλύτερα αυτό ας εξετάσουμε τις διάφορες περιπτώσεις:

$$\text{Για } c=0 \text{ από την εξίσωση} \quad (3.1)$$

$f: x \rightarrow x^2 + c$, εύκολα συμπεραίνουμε το αποτέλεσμα:

Για $|x| > 1$, θα είναι $f^n \rightarrow \infty$, Για $x = 1$, $f^n \rightarrow 1$ και

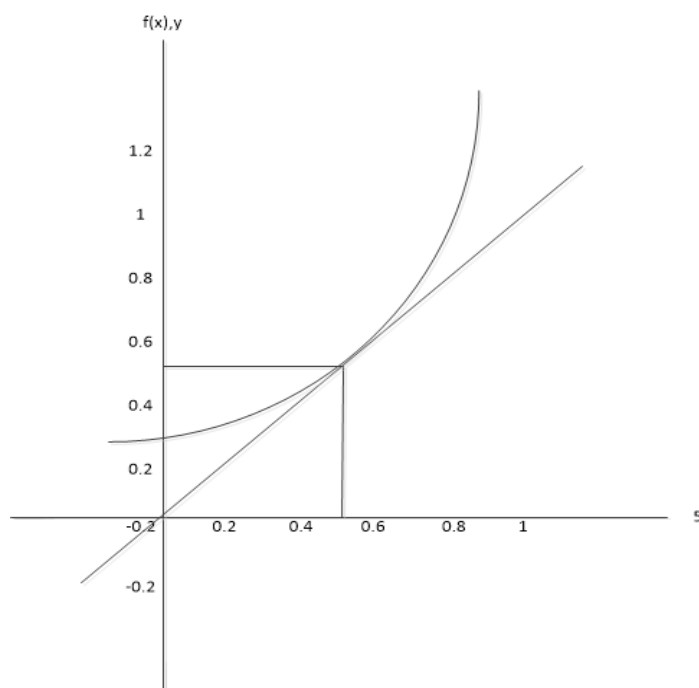
Για $|x| < 1$, θα είναι $f^n \rightarrow 0$, που συνοψίζονται παρακάτω:

¹ Υπολογιστικοί αλγόριθμοι σε μορφοκλασματικά σύνολα, p.Koutsakis.pdf, P.P:9-14.

$$f^n \begin{cases} \infty, & |x| > 1 \\ 0, & |x| < 1 \\ 1, & |x| = 1 \end{cases} \quad \text{για } n \rightarrow \infty$$

Όλες οι τροχιές φτάνουν στο μηδέν ή στο άπειρο εκτός από αυτές με σπόρο $x = \pm 1$. Τα σημεία μηδέν και άπειρο, λέγονται ελκυστές (attractors) ή λεκάνες έλξης (sinks, basins of attraction) επειδή έλκουν τις τροχιές των σημείων γύρω τους, ενώ τα σημεία $x = \pm 1$, λέγονται απωθητές (repellers) για τον αντίθετο λόγο.

Όταν το $c = 1/4$ η παραβολή που δίνεται από την εξίσωση (3.1), $y = x^2 + c$, είναι εφαπτόμενη και πάνω από την ευθεία (3.2), $x = y$, όπως φαίνεται στο διάγραμμα στο σχήμα (3.1).



Διάγραμμα 3.1. Η παραβολή είναι πλήρως πάνω από την ευθεία για $c = 1/4$

(Υπολογιστικοί αλγόριθμοι σε μορφοκλασματικά σύνολα, P.Koutsakis.pdf, P:11)

Στην προκειμένη περίπτωση η παραβολή έχει ένα σημείο τομής με την ευθεία, το οποίο είναι το $P \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$. Στην επαναληπτική διαδικασία τώρα οι αρχικές συνθήκες με απόλυτη τιμή μεγαλύτερη από το $\frac{1}{2}$ θα φτάσουν στο άπειρο, ενώ αυτές στο διάστημα $0 \leq |x| \leq \frac{1}{2}$ πλησιάζουν ασυμπτωματικά το $\frac{1}{2}$. Μετά από 700 επαναλήψεις οι τροχιές τους φτάνουν στο 0.499. Τα αποτελέσματα των πρώτων επαναλήψεων φαίνονται στον Πίνακα 3.1. παρακάτω:

n	-1	-0.75	-0.5	-0.25	-0.1	0
1	1.25	0.812	1/2	1/3	1/4	1/4
2	1.812	0.910	0.5	0.3476	0.3176	0.3125
3	3.535	1.078	0.5	0.3708	0.3508	0.3476
4	12.74	1.412	0.5	0.3875	0.3731	0.3708
5	162.7	2.246	0.5	0.4001	0.3892	0.3875
6	264.9	5.295	0.5	0.4101	0.4014	0.4001
7	701.2	28.29	0.5	0.4182	0.4111	0.4101
8	4.9×10^{17}	800.9	0.5	0.4249	0.4190	0.4182
9	2.4×10^{35}	641.3	0.5	0.4305	0.4256	0.4249
10	5.8×10^{70}	4.1×10^{11}	0.5	0.4353	0.4311	0.4305
11	3.4×10^{141}	1.6×10^{23}	0.5	0.4395	0.4358	0.4353
12	1.1×10^{283}	2.8×10^{45}	0.5	0.4432	0.4400	0.4395
∞	∞	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$

Πίνακας 3.1. Οι τροχιές που δεν οδηγούνται στο άπειρο έλκονται στο +1/2

(Υπολογιστικοί αλγόριθμοι σε μορφοκλασματικά σύνολα, P.Koutsakis.pdf, P:11)

Το σημείο έλξης αλλάζει καθώς αλλάζει και η σταθερά. Αν τώρα η παραβολή έχει δύο σημεία τομής με την ευθεία αυτά θα βρίσκονται από τις τιμές των ριζών της εξίσωσης:

$$x^2 + c = x \quad (3.4)$$

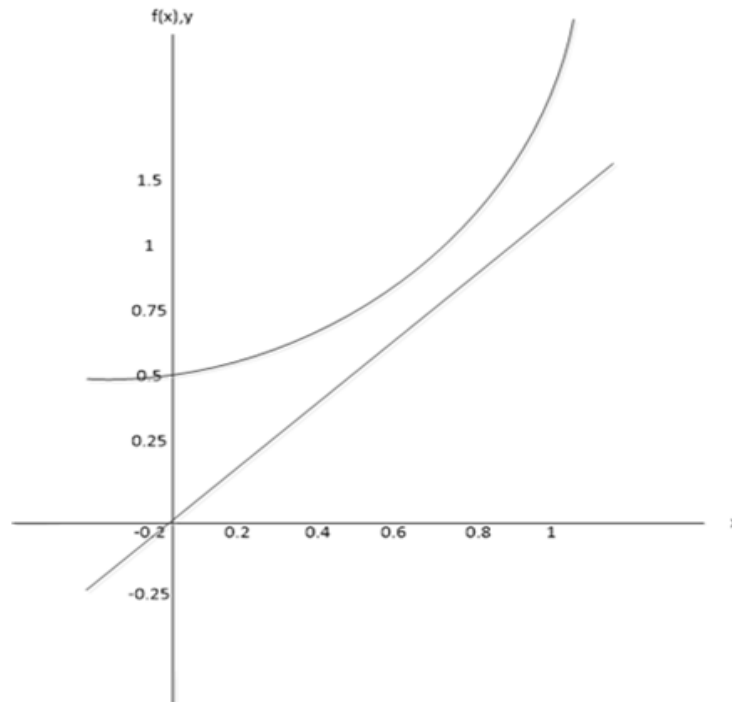
Με περαιτέρω ανάλυση μπορούμε να αποδείξουμε ότι η μικρότερη από τις δυο ρίζες είναι ελκυστής και η μεγαλύτερη απωθητής. Το έχουμε ήδη δείξει για την ειδική περίπτωση $c=0$. Ας δούμε το ίδιο για $c=-\frac{3}{4}$. Εδώ η εξίσωση(3.4) έχει ρίζες τα $x=-\frac{1}{2}$ και $x=+\frac{3}{2}$. Τα αποτελέσματα των πρώτων επαναλήψεων στον Πίνακα 3.2 παρακάτω:

n	1.75	1.5	1	0.75	0.5	0.25
1	2.3125	1.5	0.25	-0.1875	-0.5	-0.6875
2	4.5976	1.5	-0.6875	-0.7148	-0.5	-0.2773
3	20.388	1.5	-0.2773	-0.239	-0.5	-0.6730
4	414.93	1.5	-0.6730	-0.6928	-0.5	-0.2969
5	1721.2	1.5	-0.2969	-0.2699	-0.5	-0.6618
6	296436	1.5	0.66181	-0.6771	-0.5	-0.312
7	787×10^{20}	1.5	-0.312	-0.2914	-0.5	-0.6526
8	772×10^{41}	1.5	-0.65265	-0.6650	-0.5	-0.3240
9	596×10^{83}	1.5	-0.32404	-0.3077	-0.5	-0.645
10	355×10^{167}	1.5	-0.645	-0.6553	-0.5	-0.3339
∞	∞	+3/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2

Πίνακας 3.2. Όπως ειπώθηκε η μεγαλύτερη από τις δυο ρίζες($x=3/2$) είναι σημείο απώθησης και το $x=-1/2$ ελκυστής

(Υπολογιστικοί αλγόριθμοι σε μορφοκλασματικά σύνολα, P.Koutsakis.pdf, P:12)

Παρατηρούμε επίσης πως η τροχιά πλησιάζει το $-\frac{1}{2}$ κάνοντας ταλάντωση μεταξύ θετικών και αρνητικών προσεγγίσεων όπου κάθε μια εξ' αυτών προσεγγίζει το $-\frac{1}{2}$ ασυμπτωματικά. Αυτή η συμπεριφορά φαίνεται καθαρά στον Πίνακα 3.2 και αποτελεί ένδειξη χασοτικής συμπεριφοράς του συστήματος όπως θα φανεί παρακάτω:



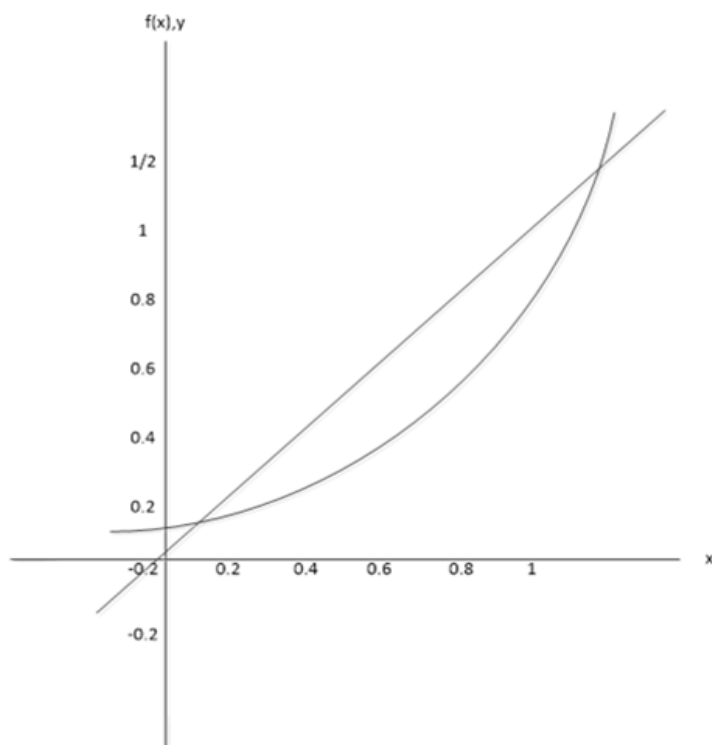
Διάγραμμα 3.2. Οι τροχιές κινούνται στο διάστημα $[-2,2]$ χωρίς κανονικότητα

(Υπολογιστικοί αλγόριθμοι σε μορφοκλασματικά σύνολα, P.Koutsakis.pdf, P:13)

Για τις τιμές της σταθεράς $c < -\frac{3}{4}$, οι τροχιές που προηγουμένως θα πλησίαζαν τη μικρότερη από τις δύο ρίζες, τώρα ταλαντώνονται μεταξύ δυο διακριτών τιμών. Το σημείο που ήταν προηγουμένως ελκυστής έχει τώρα διακλαδωθεί και η τροχιά δεν είναι πλέον σταθερή αλλά περιοδική και εναλλάσσεται μεταξύ δυο τιμών.

Καθώς το c μειώνεται ακόμη περισσότερο, άλλη μια διακλάδωση γίνεται και η περίοδος διπλασιάζεται στο 4 και μετά στο 8 και ούτω καθεξής επ'άπειρον. Έντούτοις, η απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών διακλαδώσεων πλησιάζει το μηδέν με τέτοιο τρόπο, ώστε ο διπλασιασμός της περιόδου φτάνει στο άπειρο για πεπερασμένη τιμή της σταθεράς c , λίγο πιο κάτω από το $-\frac{1}{4}$.

Πέρα από αυτήν τη τιμή, οι τροχιές που προηγουμένως ήταν περιοδικές τώρα κινούνται στο διάστημα $[-2,2]$, χωρίς αυτή η κίνηση να εμφανίζει κάποια κανονικότητα και επισκέπτονται κάθε τιμή του παραπάνω διαστήματος.



Διάγραμμα 3.3. Από αριστερά προς τα δεξιά, $c > 1/4 - 3/4 < c < 1/4$. Σε αυτές τιμές της σταθεράς c , έχουμε κανένα, είναι και τα δυο σημεία ισορροπίας αντίστοιχα

(Υπολογιστικοί αλγόριθμοι σε μορφοκλασματικά σύνολα, P.Koutsakis.pdf, P:13)

Αυτή η συμπεριφορά ονομάζεται χαοτική συμπεριφορά. Επιπλέον, αρχικές συνθήκες που ήταν στις πρώτες επαναλήψεις κοντά μεταξύ τους, μετά από μερικές επιπλέον επαναλήψεις θα ακολουθήσουν πολύ διαφορετικές τροχιές. Αυτή η συμπεριφορά που υπερβαίνει την ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες ονομάζεται χαοτική, επίσης και οι τιμές της παραμέτρου c για τις οποίες συμβαίνει αυτό αποτελούν το χαοτικό καθεστώς (chaotic regime). Η σειρά των διακλαδώσεων που οδηγούν στο χαοτικό καθεστώς είναι γνωστή ως η διαδρομή διπλασιασμού περιόδου που οδηγεί στο χάος (period-doubling route to chaos)¹.

Η μελέτη λοιπόν του χάους και των fractals γενικότερα προϋποθέτει τη χρήση της "γλώσσας" των μαθηματικών. Στη μαθηματική γλώσσα η εύρεση των ελκυστών των διακριτών δυναμικών συστημάτων της φυσικής, μεταφράζεται σε εύρεση ορίου ακολουθιών. Το χάος δεν σχετίζεται κατ'ανάγκη με περίπλοκα συστήματα και αφηρημένες έννοιες. Μπορούμε να βρούμε χαοτική συμπεριφορά και σε απλά συστήματα και έτσι να μελετήσουμε το απροσδιόριστο στη πιο βασική του μορφή.

Ακόμα και στις πιο απλές εξισώσεις δευτέρου βαθμού έχουμε χάος, αρκεί να τις χειριστούμε σαν επαναληπτικές συναρτήσεις, δηλαδή αν έχουμε κάθε τόσο ανατροφοδότηση της τιμής της από το αμέσως προηγούμενο αποτέλεσμα (συνεχής σύνθεση της συνάρτησης με τον εαυτό της).

«Ο επιστήμονας δεν μελετάει τη φύση επειδή είναι χρήσιμη. Την μελετάει επειδή τον ενθουσιάζει και τον ενθουσιάζει επειδή είναι όμορφη».

H.Poincare

¹ The Chaos Hyper Textbook από <http://hypertextbook.com/chaos//22.shtml>.

«Η γεωμετρία φράκταλ υπακούει σε μια μαθηματική Δυναμική, της κίνησης, της αδιάκοπης ροής», όπως την αντιλαμβάνονταν ο προσωκρατικός φιλόσοφος.

Ηράκλειτος

Πέρα λοιπόν από τη μελέτη των δυναμικών συστημάτων, η επιστήμη των μαθηματικών, ακολουθώντας τον δικό της δρόμο, εφοδιάζει με τα κατάλληλα θεωρητικά εργαλεία τη μελέτη αυτών των παράξενων ελκυστών. Βασική αιτία ήταν η προσπάθεια σύνδεσης της Άλγεβρας με τη Γεωμετρία και η αναγωγή όλων των μαθηματικών σε μια μοναδική βάση. Τελικά, στις αρχές του 19^{ου} αιώνα η θεωρία των απειροσυνόλων έγινε το κοινό θεμέλιο της Άλγεβρας και της Γεωμετρίας, του διακριτού και του συνεχούς¹.

Η ιδέα του απείρου στους δυο αυτούς μαθηματικούς κλάδους παρουσιάζεται με διαφορετικές μορφές. Στην Άλγεβρα βρίσκεται ενσωματωμένη στα αριθμητικά απειροσύνολα, ενώ στη Γεωμετρία εμφανίζεται στην απεραντοσύνη του χώρου και, παράλληλα, στη δυνατότητα άπειρης διαίρεσης των σχημάτων. Ο A. Fraenkel(1891-1965), θέτει το ζήτημα ως εξής²:

“Η γεφύρωση του χάσματος ανάμεσα στο διακριτό και το συνεχές, ή ανάμεσα στην αριθμητική και τη γεωμετρία, είναι από τα πιο σημαντικά προβλήματα στα θεμέλια των μαθηματικών, αν όχι το σημαντικότερο. Φυσικά, ο χαρακτήρας του συλλογισμού έχει μεταβληθεί, αλλά, όπως πάντα, οι δυσκολίες οφείλονται στο χάσμα ανάμεσα στο διακριτό και το συνεχές-αυτό το μόνιμο εμπόδιο που διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στα μαθηματικά, τη φιλοσοφία, ακόμη και τη φυσική”.

Πρώτη λοιπόν η επιστήμη των μαθηματικών μας εξοικείωσε με τα μυστικά της πολυπλοκότητας, κύριο χαρακτηριστικό των fractals, που έχουν αποκτήσει πολλούς θαυμαστές και έξω από τον επιστημονικό κόσμο γιατί στηρίζονται σε μια γεωμετρική διαίσθηση, που όλοι λίγο-πολύ διαθέτουμε και επιπλέον επειδή γοητεύουν την αισθητική μας με ελκυστικές εικόνες.

Τα fractals υπήρχαν πάντοτε γύρω μας και δεν τα είχαμε αντιληφθεί τόσο καιρό επειδή βρίσκονται πάνω στο σύνορο ανάμεσα σε έναν ιδεατά απλό κόσμο και στην πολύπλοκη πραγματικότητα που μας περιβάλλει. Διάσημοι Μαθηματικοί παρουσίασαν σχήματα που επαναλαμβάνουν τη δομή τους σε ολοένα μικρότερες κλίμακες εφαρμόζοντας επαναληπτικές διαδικασίες χαρακτηριστικές των δυναμικών συστημάτων.

Τα μαθηματικά λοιπόν των fractals, σε συνδυασμό με την εξέλιξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών μας εφοδίασαν με ένα πανίσχυρο μεγεθυντικό φακό που πάντρεψε τα μαθηματικά με τη φύση και μας βοήθησε να μελετήσουμε τα πάντα γύρω μας και μέσα μας. Πίσω από την πολυπλοκότητα της φύσης κρύβονται κάποια πρότυπα που επαναλαμβάνονται σε διαφορετικές κλίμακες, μέσω συγκεκριμένων αλγορίθμων, συνθέτοντας έτσι την ολική εικόνα της.

¹ Αναζητώντας το άπειρο,P:17.

² Αναζητώντας το άπειρο,P:21.

Κεφάλαιο 4: Είδη των Fractals

Τα fractals διακρίνονται σε δυο μεγάλες κατηγορίες: τα ντετερμινιστικά fractal και τα μη ντετερμινιστικά. Όπως είδαμε και στο κεφάλαιο 2, η αιτιοκρατία(ντετερμινισμός) είναι η φιλοσοφική τάση που επηρέασε ιδιαίτερωσ την επιστημονική σκέψη από την αρχαιότητα μέχρι και σήμερα. Αποδέχεται την ύπαρξη της αιτιότητας, την καθολική αιτιώδη και νομοτελειακή συνάφεια όλων των φαινομένων.

Σύμφωνα με τις αρχές του ντετερμινισμού τα πάντα στον κόσμο γίνονται με αιτιώδη συνάφεια-αιτιοκρατία. Κάθε γεγονός το οποίο εμπειριέχει ανθρώπινη δράση συνδέεται με αιτιώδη αλυσιδωτή σχέση με τις προγενέστερες καταστάσεις. Δεν υπάρχουν ανεξήγητα ή τυχαία γεγονότα. Στο σύγχρονο δυτικό κόσμο η φιλοσοφία του ντετερμινισμού είναι συνδεδεμένη με την Νευτώνεια φυσική.

Η υπόθεση «The billiard ball», προϊόν της νευτώνειας φυσικής, υποστηρίζει ότι οι θεμελιώδεις συνθήκες στο σύμπαν είχαν εγκατασταθεί, η εξέλιξη ήταν αναπόφευκτη και με μονοσήμαντο τρόπο. Αν ήταν δυνατόν να γνωρίζουμε το σύνολο της ύλης και τους νόμους που διέπουν το σύμπαν, θα ήταν εφικτό να προσομοιάσουμε κάθε σημεία σε οποιονδήποτε χρόνο του σύμπαντος. Η νευτώνεια φυσική και η τάξη του ντετερμινισμού υπηρέτησαν και υπηρετούν την επιστήμη και τη θεωρητική σκέψη με μεγάλη επιτυχία, έως ότου τα προβλήματα μεταφέρονται στην κλίμακα του σύμπαντος ή του ατόμου, εκεί όπου η νευτώνεια φυσική αδυνατεί να δώσει λύσεις.

Παρά ταύτα είναι γεγονός πως μόνο επανερχόμενοι στην αρχαία ελληνική σκέψη του χαρακτήρα της αιτιοκρατίας μπορεί ο σημερινός χαρακτηρισμός "Ντετερμινισμός" να διαπεράσει την υποδιαίρεση κατά κλάδο ή θέμα και να μπορέσει κανείς να περιγράψει τον "αιτιώδη ντετερμινισμό", ο οποίος τελικά σημαίνει το θεωρητικό σύστημα με το οποίο οι αρχαίοι Έλληνες πίστευαν ότι τα διάφορα συμβάντα οφείλονται(καθορίζονται) κατά τρόπο αιτιολογικό. Το ευθέως αντίθετο της αιτιοκρατίας πρεσβεύει η αναϊτιοκρατία ή μη ντετερμινισμός.

Χωρίς αμφιβολία το κυρίαρχο ερώτημα που έκανε τον άνθρωπο¹, από καταβολής κόσμου, να προβληματιστεί σχετικά με τους νόμους της φύσης, ήταν η κίνηση των ουράνιων σωμάτων. Κατ'αρχάς, η περιοδικότητα της ανατολής και της δύσης του ηλίου, της τροχιάς της σελήνης, αλλά και των αστέρων στον ουρανό, εδραίωσε την πίστη του ανθρώπου στην αιτιοκρατία. Από την πρόβλεψη της έκλειψης του ηλίου το 585 π.Χ από τον Θαλή τον Μιλήσιο κατά τη μάχη μεταξύ Λυδών και Μηδών, μέχρι την περιγραφή των επικυκλικών τροχιών των πλανητών γύρω από τη γη από τον Πτολεμαίο, το 200 μ.Χ., δημιουργήθηκε η πεποίθηση ότι με μαθηματικούς υπολογισμούς και επιστημονικές μετρήσεις, το μέλλον του ανθρώπου στη γη θα μπορούσε να προβλεφθεί με απόλυτη ακρίβεια.

Χρειάστηκε να περάσουν πολλοί αιώνες για να φτάσουμε στον Κοπέρνικο, ο οποίος, το 1530 μ.Χ., βασιζόμενος στην αρχή του ηλιοκεντρικού συστήματος που είχε διατυπώσει πρώτος ο Αρίσταρχος ο Σάμιος το 280 π.Χ., βελτίωσε σημαντικά το μοντέλο του Πτολεμαίου. Όμως, η πιο σημαντική πρόοδος στο θέμα αυτό έγινε το 1596 από τον Kepler, που πρότεινε το σχήμα της έλλειψης για τις τροχιές των πλανητών, μέσω της οποίας εξηγήθηκαν με θαυμαστή ακρίβεια οι αποκλίσεις του μοντέλου του Κοπέρνικου από τις αστρονομικές παρατηρήσεις της εποχής.

¹ Ο Θαυμαστός κόσμος των Fractal,P.P:146-147.

Τέλος, η ιδιοφυΐα του Isaac Newton(1642-1727) ήρθε να αποδείξει την ύπαρξη ενός παγκόσμιου νόμου για τη βαρυτική έλξη και να προτείνει φαινομενικά απλές μαθηματικές εξισώσεις που διέπουν την κίνηση όλων των σωμάτων, από ένα μήλο που πέφτει στη γη μέχρι τις τροχιές των πιο απομακρυσμένων αστερών του σύμπαντος.

Το μήνυμα του Νεύτωνα ήταν ξεκάθαρο: Δώστε μου τις σωστές αρχικές συνθήκες και θα σας περιγράψω με ακρίβεια τη κίνηση ενός συστήματος μαζών υπολογίζοντας το μέλλον και το παρελθόν του για όσο μεγάλο χρονικό διάστημα θέλετε.

Τα νεότερμινιστικά συστήματα χωρίζονται σε δυο είδη :τα γραμμικά και τα μη γραμμικά συστήματα.

Γραμμικά συστήματα: ¹Μια εξίσωση της μορφής:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b \quad (4.1)$$

καλείται γραμμική εξίσωση n μεταβλητών $x_i, 1 \leq i \leq n$, με σταθερό όρο $b \in \mathbb{R}$ και συντελεστές $a_i \in \mathbb{R}$, όπου το \mathbb{R} θα είναι το σώμα των πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών. Τα στοιχεία του \mathbb{R} καλούνται και μονόμετρα μεγέθη. Η λύση της (1) είναι το σύνολο εκείνων των τιμών S_i των x_i , που καθιστούν την (1) ταυτότητα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Η γραμμική εξίσωση $3x_1 - 5x_2 = 10$ έχει λύση στους πραγματικούς αριθμούς το σύνολο των τιμών :

$$\{S_1, S_2\}, \text{ όπου } \left\{ S_{1,2} = \frac{5s_2 + 10}{3} \in \mathbb{R} \right\}$$

Γραμμικό σύστημα είναι ένα σύνολο $m \leq n$ γραμμικών εξισώσεων της μορφής(1). Η γενική μορφή ενός γραμμικού συστήματος είναι η

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n &= b_m \end{aligned} \quad (4.2)$$

Η λύση (ή το σύνολο των λύσεων) του (4.2) είναι το σύνολο εκείνων των τιμών S_i των x_i , που καθιστούν κάθε μια από τις γραμμικές εξισώσεις που εμπεριέχονται στο (4.2), ταυτότητα.

Συστήματα που έχουν $m > n$ θα λέμε ότι έχουν λύση(είναι συμβατά) αν και μόνον αν η λύση που προκύπτει από τις n οποιεσδήποτε εξισώσεις, πληροί και τις υπόλοιπες $m-n$ εξισώσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Το σύστημα :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ x_1 - 4x_3 = -7 \end{array} \right\}$$

¹ Γραμμικά συστήματα εξισώσεων, Applied Mathematics/linear-systems.pdf.

έχει λύση το σύνολο των τιμών S_1, S_2, S_3 , όπου

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1 = \frac{85}{22} - S_2, S_3 = \frac{1}{11} + S_2, S_2, S_3 \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Δυο γραμμικά συστήματα που έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων καλούνται ισοδύναμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Να βρεθεί η λύση του συστήματος:

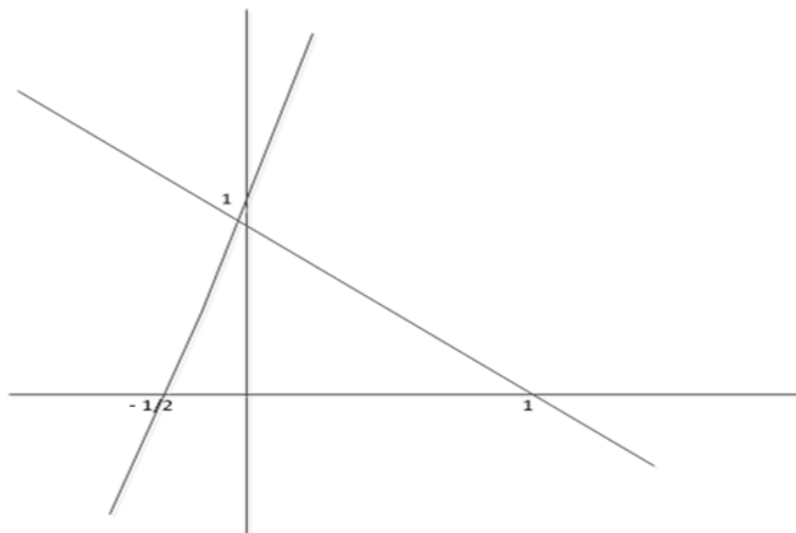
$$2x_1 - x_2 = -1$$

$$x_1 + 2x_2 = 1$$

Παρατηρούμε ότι κάθε μια από τις παραπάνω εξισώσεις του συστήματος, στο καρτεσιανό επίπεδο απεικονίζει μια ευθεία γραμμή. Το σημείο τομής των ευθειών αυτών, πληροί και τις δυο και συνεπώς αποτελεί λύση του ανωτέρου συστήματος. Το σημείο αυτό είναι το :

$$(S_1, S_2) = \left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5} \right)$$

Δυο ευθείες στο επίπεδο είτε τέμνονται, είτε είναι παράλληλες, είτε συμπίπτουν. Οι τρεις αυτές περιπτώσεις οδηγούν στο συμπέρασμα ότι ένα γραμμικό σύστημα είναι δυνατόν είτε να έχει μια και μοναδική λύση, είτε να μην έχει καμία λύση, είτε να έχει άπειρες λύσεις.



Διάγραμμα 4.1

(Γραμμικά συστήματα εξισώσεων, Applied_Mathematics/linear-systems.pdf.)

Συμβολισμός. Το σύστημα (4.2) το γράφουμε ισοδύναμα στην μορφή ενός $m \times n$ πίνακα ως εξής:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} \cdots \cdots \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \cdots \cdots \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots \cdots \cdots \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots \cdots \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right\} \quad (4.3)$$

Ο πίνακας (4.3) καλείται επαυξημένος πίνακας (augmented matrix) του συστήματος. Ο πίνακας αυτός, περιέχει όλες τις πληροφορίες που το σύστημα (4.2) μας παρέχει.

Μη Γραμμικά συστήματα: Η εύρεση λύσης για την εξίσωση

$$f(x)=0, \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

είναι ένα από τα πιο συνηθισμένα προβλήματα στο πεδίο των εφαρμοσμένων μαθηματικών. Το πρόβλημα αυτό προκύπτει συχνά και κατά φυσικό τρόπο από τη μελέτη ενός μεγάλου αριθμού πρακτικών προβλημάτων.

Το πρόβλημα μπορεί να περιλαμβάνει ένα σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων με πολλές μεταβλητές ή μια μη γραμμική εξίσωση μιας μόνο μεταβλητής. Στις περισσότερες περιπτώσεις η παραπάνω εξίσωση, όπου η f είναι μη γραμμική, δεν μπορεί να λυθεί με ακρίβεια, δηλαδή αναλυτικά.

Ακόμα και όταν δίνεται η λύση σε κλειστή μορφή ενός ειδικού τύπου, ο τύπος αυτός απαιτεί πολλές φορές περισσότερο χρόνο για τον υπολογισμό του από γενικότερες αριθμητικές μεθόδους. Δηλαδή συχνά είναι πιο εύκολο να καταλήγουμε σε μια προσεγγιστική λύση, ακόμα και όταν είναι διαθέσιμη μια αναλυτική έκφραση για τη λύση.

Μια γενική κατηγορία μεθόδων που προσεγγίζουν ρίζες μη γραμμικών εξισώσεων είναι επαναληπτικές μέθοδοι. Οι προσεγγιστικές λύσεις είναι της μορφής $x_{k+1}=g(x_k)$ όπου η ακολουθία $x_k \rightarrow \infty, k = 1$ συγκλίνει με κατάλληλες υποθέσεις,

σε μια ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$. Η ταχύτητα της σύγκλισης εξαρτάται από τις ιδιότητες της συνάρτησης και από τη μέθοδο που χρησιμοποιούμε. Μια καλή πρακτική για την ακριβέστερη προσέγγιση κάποιας ρίζας είναι η εφαρμογή μιας μεθόδου που θα "εντοπίζει" περίπου τη ρίζα και στη συνέχεια η εφαρμογή μιας ταχύτερης μεθόδου για μεγαλύτερη ακρίβεια. Η τιμή του x ονομάζεται λύση ή ρίζα της εξίσωσης και μπορεί να είναι μια από τις πολλές λύσεις. Άρα τα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα χαρακτηρίζονται από μια "εκλεπτυσμένη" αλληλεπίδραση ντετερμινιστικών νόμων και τυχαιότητας, η οποία εξηγεί από

τη μια τη περιορισμένη προβλεψιμότητα χαοτικών συστημάτων και από την άλλη τις δομές που εμφανίζονται σε φράκταλ σχηματισμούς καθώς και σε συστήματα αυτοοργάνωσης. Για το λόγο αυτό τα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα αποτελούν εδώ και χρόνια πλέον ένα νέο πεδίο έρευνας στα πλαίσια των σύγχρονων Φυσικών Επιστημών, καθώς μέσα από τη μελέτη τους οι έννοιες όπως ντετερμινισμός, προβλεψιμότητα, τυχαιότητα, απέκτησαν μια νέα διάσταση.

4.1. Διάσημα Fractals

“Pathological monsters! cried the terrified mathematician. Every one of them a splinter in my eye. I hate the Peano Space and the Koch Curve. I fear the Cantor Ternary Set. The Sierpinski Gasket makes me wanna cry. And a million miles away a butterfly flapped its wings. On a cold November day a man named Benoit Mandelbort was born”¹.

-Jonathan Coulton, lyrics from “Mandelbrot Set”.

“Παθολογικά τέρατα! Φώναξε ο τρομοκρατημένος μαθηματικός. Κάθε ένα από αυτά μια ακίδα στο μάτι μου. Μισώ το διάστημα του Peano και τη καμπύλη του Koch φοβάμαι το σύνολο του Cantor. Το πλέγμα του Sierpinski με κάνει να θέλω να φωνάξω και ένα εκατομμύριο μίλια μακριά μια πεταλούδα χτύπησε τα φτερά μου. Σε μια κρύα ημέρα του Νοεμβρίου ένας άντρας που ονομάστηκε Benoit Mandelbrot γεννήθηκε”.

-Jonathan Coulton, στίχοι από το “Mandelbrot Set”.

Τα πιο διάσημα fractal όπως προαναφέρθηκαν και στο Mandelbrot Set είναι το σύνολο του Cantor ή σκόνη του Cantor, το τρίγωνο του Sierpinski ή πλέγμα του Sierpinski, η καμπύλη του Koch και η καμπύλη του Peano.

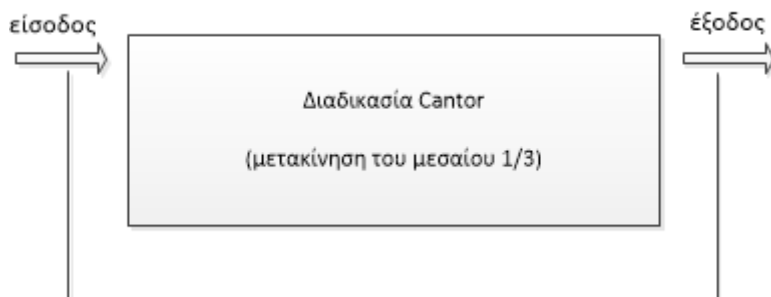
4.1.1. Cantor Set ή σύνολο του Cantor ή σκόνη του Cantor

Το πιθανότερο είναι ότι αυτό είναι το πρώτο μαθηματικό φράκταλ² αφού δημιουργήθηκε από τον Georg Cantor, το 1872. Είναι ένα πολύ απλό φράκταλ, κατασκευάζεται από έναν απλό επαναληπτικό κανόνα και εμφανίζει αυτοομοιότητα όπως όλα τα φράκταλς. Αυτή η επαναληπτική διαδικασία είναι χαρακτηριστικό των δυναμικών συστημάτων αλλά αποτελεί και μια από τις αποτελεσματικότερες τεχνικές του προγραμματισμού των Η/Υ όπου αποκαλείται βρόχος επαναλήψεων.

Για να κατασκευάσουμε αυτό το σύνολο, αρχίζουμε με ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους π.χ. μιας μονάδας. Το πρώτο βήμα είναι να το χωρίσουμε σε τρία ίσα μέρη και να απαλείψουμε το μεσαίο τμήμα. Στο δεύτερο βήμα επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία στο καθένα από τα τμήματα που απέμειναν, δεξιά και αριστερά. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται συνέχεια και περιγράφεται σύντομα με το παρακάτω σχεδιάγραμμα:

¹ The nature of code,P:65.

² Γνωριμία με τα φράκταλς-πρόταση διδασκαλίας τους στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, diplomatiki.pdf,P.P:52-56



Σχήμα 4.1.1

Ο αλγόριθμος αυτός μπορεί να περιγραφεί με τα εξής βήματα που βοηθούν στην κατασκευή του αντίστοιχου προγράμματος στον υπολογιστή:

- Αρχισε με το σύνολο $[0, 1]$.
- Χώρισε τα υπάρχοντα τμήματα σε τρία
- Αφαίρεσε το μεσαίο ένα τρίτο.
- Πήγαινε στο βήμα #2.



Εικόνα 4.1.1

(The nature of code,P:365)

Ο αριθμός των ευθύγραμμων τμημάτων που παράγονται με αυτή την διαδικασία είναι άπειρος. Υποθέτοντας ότι το αρχικό ευθύγραμμο τμήμα έχει μήκος 1, θα βρούμε το μήκος αυτού που απέμεινε μετά από άπειρα βήματα. Το μήκος του τμήματος που απαλείφουμε στο πρώτο βήμα της διαδικασίας είναι $\frac{1}{3}$. Απομένουν δυο τμήματα, το δεξιό και το αριστερό. Από αυτά, στο δεύτερο βήμα, πάλι απαλείφουμε το $\frac{1}{3}$ του μήκους τους. Το απαλειφόμενο τότε τμήμα του αρχικού μήκους είναι $\frac{2}{9}$, από $\frac{1}{9}$ για κάθε κομμάτι. Κατά την ίδια διαδικασία στο επόμενο βήμα απαλείφουμε συνολικά μήκος ίσο με $\frac{4}{27}$, εφόσον καθένα από τα τέσσερα κομμάτια του συνόλου χάνει το $\frac{1}{27}$ του ολόκληρου αρχικού μήκους και αυτό συνεχίζεται ως το άπειρο. Τελικά, πόσο μήκος απαλείψαμε και πόσο απέμεινε από το αρχικό σύνολο; Μπορούμε να βρούμε πόσο απαλείψαμε. Αντιστοιχεί στο άθροισμα³⁴:

$$S = \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \dots =$$

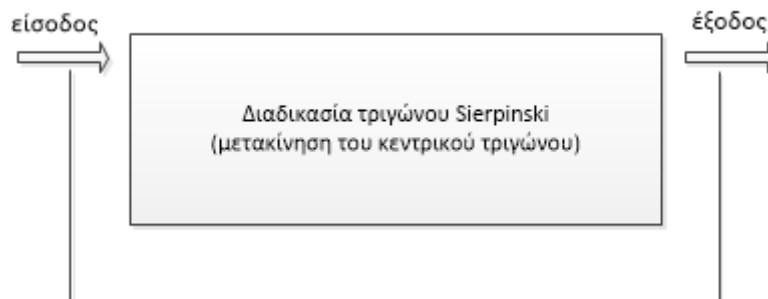
$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + \dots = \frac{1/3}{1-2/3} = 1$$

Επομένως το μέρος που απαλείφθηκε είναι ίσο με το συνολικό μήκος του αρχικού ευθύγραμμου τμήματος και επομένως αυτό που παραμένει τελικά έχει μήκος 0. Το σύνολο του Cantor λοιπόν είναι ένα αξιοσημείωτο σύνολο άπειρων διακεκριμένων σημείων (ή άπειρων πραγματικών αριθμών αν παίρναμε το διάστημα [0,1]) που γι' αυτό το λόγο αποκαλείται και σκόνη του Cantor. Ίσως με την πρώτη ματιά βγάλει κάποιος το λανθασμένο συμπέρασμα ότι δεν έχει μείνει απολύτως τίποτε.

Όμως τα ευθύγραμμα τμήματα που μετακινούνται σε κάθε βήμα είναι ανοικτά διαστήματα, που σημαίνει ότι σε κάθε στάδιο μετακινούμε όλα τα σημεία μεταξύ του $\frac{1}{3}$ και του $\frac{2}{3}$ και αφήνουμε τα άκρα. Αν προσέξουμε την κατασκευή, θα δούμε ότι αυτά τα άκρα που αφήνουμε πίσω μας δεν μετακινούνται ποτέ. Άρα το σύνολο Cantor δεν είναι το κενό σύνολο αφού περιέχει σίγουρα τα σημεία $0, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, \frac{1}{27}$ κ.ο.κ.

4.1.2. Τρίγωνο του Sierpinski ή Sierpinski Gasket, (Πλέγμα του Sierpinski)

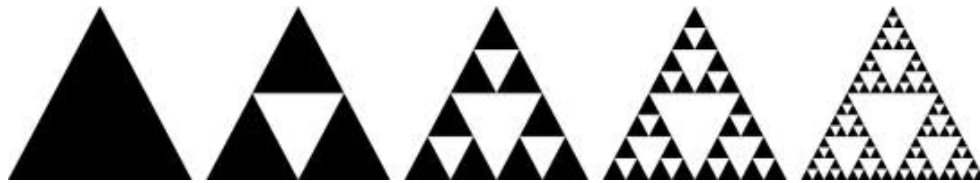
Για να κατασκευάσουμε αυτό το σύνολο, αρχίζουμε με ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς π.χ. μιας μονάδας. Το πρώτο βήμα είναι να βρούμε τα μέσα των πλευρών του και να τα ενώσουμε. Στο δεύτερο βήμα επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία στο καθένα από τα τρία τρίγωνα που σχηματίστηκαν. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται συνέχεια και περιγράφεται σύντομα με το παρακάτω σχεδιάγραμμα:



Σχήμα 4.1.2

Ο αλγόριθμος αυτός μπορεί να περιγραφεί και με τα εξής βήματα που βοηθούν στην κατασκευή του αντίστοιχου προγράμματος στον υπολογιστή:

- Αρχισε με το ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 1
- Σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο βρες τα μέσα των πλευρών του και ένωσέ τα.
- Αφαίρεσαι το μεσαίο τρίγωνο.
- Πήγαινε στο βήμα #2.



Εικόνα 4.1.2

(www.reourceaholic.com)

Βήμα No.	2	3	4	...	v	...
----------	---	---	---	-----	---	-----

Μέρος του εμβαδού που απομένει	$\frac{9}{16} =$	$\frac{27}{64} =$	$\frac{81}{256} =$...	$(\frac{3}{4})^v$...
	$(\frac{3}{4})^2$	$(\frac{3}{4})^3$	$(\frac{3}{4})^4$

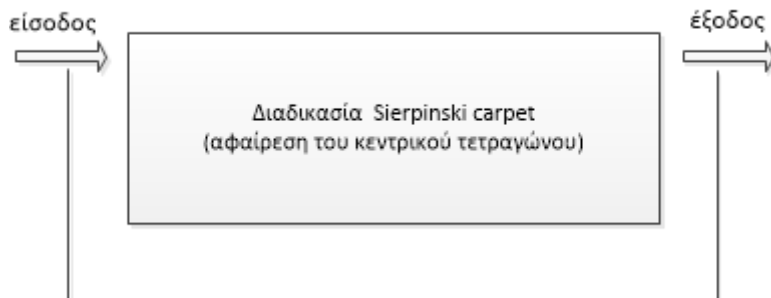
Πίνακας 4.1.2

(diplomatiiki.pdf,P:43-44)

Το εμβαδό που απομένει είναι το όριο της ακολουθίας $(\frac{3}{4})^v$ που είναι 0, άρα δεν έχει απομείνει καθόλου εμβαδόν. Το σύνολο λοιπόν αυτό δεν είναι μια επιφάνεια και βέβαια δεν είναι ένα σύνολο σημείων αφού περιέχει πλευρές τριγώνων. Είναι όμως γραμμή; Μπορούμε να σχεδιάσουμε ένα μέρος του αποτελούμενου από γραμμές, αρκεί να είναι πεπερασμένο μέρος του. Όμως εδώ έχουμε πλευρές άπειρων τριγώνων, που σχηματίζονται συνεχώς μέσα σε τρίγωνα που κι αυτά είναι μέσα σε άλλα τρίγωνα κλπ. Και είναι ακριβώς αυτή η απειρία των τριγώνων και των πλευρών τους που μας εμποδίζει να αποφασίσουμε αν είναι τελικά γραμμή αυτό που προκύπτει.

4.1.3. Χαλί του Sierpinski (Sierpinski Carpet)

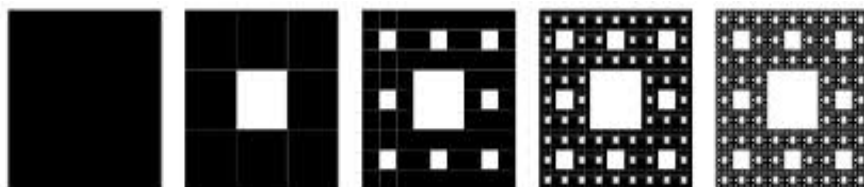
Για να κατασκευάσουμε αυτό το σύνολο, αρχίζουμε με ένα τετράγωνο. Το πρώτο βήμα είναι να αφαιρέσουμε το κεντρικό τετράγωνο χωρίζοντας την πλευρά του αρχικού τετραγώνου σε τρία ίσα μέρη. Στο δεύτερο βήμα επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία στο καθένα από τα 8 τετράγωνα που απέμειναν. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται συνέχεια και περιγράφεται σύντομα με το παρακάτω σχεδιάγραμμα:



Σχήμα 4.1.3

Ο αλγόριθμος αυτός μπορεί να περιγραφεί και με τα εξής βήματα που βοηθούν στην κατασκευή του αντίστοιχου προγράμματος στον υπολογιστή:

- Άρχισε με το τετράγωνο της πλευράς 1.
- Σε κάθε τετράγωνο χώρισε την πλευρά του σε τρία ίσα μέρη και κατασκεύασε το πλέγμα του τετραγώνου.
- Αφαίρεσαι το κεντρικό τετράγωνο.
- Πήγαινε στο βήμα #2.



Εικόνα 4.1.3

(mathworld.wolfram.com)

Αφαιρώντας συνεχώς το κεντρικό τετράγωνο, παίρνουμε ένα σύνολο στο επίπεδο, το οποίο περιέχει τις πλευρές όλων των τετραγώνων που έχουμε αφαιρέσει και το οποίο έχει μηδενικό εμβαδό αφού το όριο της ακολουθίας $(\frac{8}{9})^n$, είναι το 0.

Βήμα No.	2	3	4	n
----------	---	---	---	-------	-----	-------

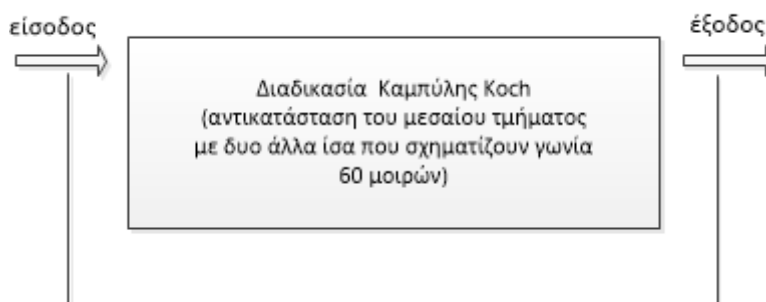
Μέρος του εμβαδού που απομένει	$(\frac{8}{9})^2$	$(\frac{8}{9})^3$	$(\frac{8}{9})^4$	$(\frac{8}{9})^n$
--------------------------------	-------------------	-------------------	-------------------	-------	-------------------	-------

Πίνακας 4.1.3

(diplomatiki.pdf,P:45)

4.1.4. Καμπύλη του Koch (Curve Koch)

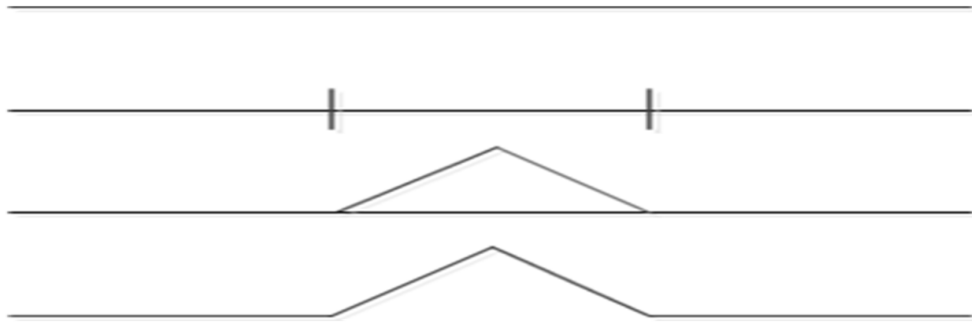
Η καμπύλη του Koch είναι από τις πρώτες καμπύλες φράκταλς που κατασκευάστηκαν. Για την ιστορία αναφέρουμε ότι εμφανίστηκε το 1904 σε εργασία με τίτλο: "Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction geometrique elementaire" από τον Σουηδό μαθηματικό Helge von Koch. Για να κατασκευάσουμε αυτό το σύνολο, αρχίζουμε με ένα ευθύγραμμο τμήμα. Το πρώτο βήμα είναι να χωρίσουμε το ευθύγραμμο τμήμα σε τρία ίσα μέρη. Στο δεύτερο βήμα κατασκευάζουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο με βάση το μεσαίο τμήμα. Στο τρίτο βήμα αφαιρούμε τη βάση του τριγώνου που σχηματίσαμε. Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία στο καθένα από τα 4 ευθύγραμμα τμήματα που σχηματίστηκαν. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται συνέχεια και περιγράφεται σύντομα με το παρακάτω σχεδιάγραμμα:



Σχήμα 4.1.4

Ο αριθμός αυτός μπορεί να περιγραφεί και με τα εξής βήματα:

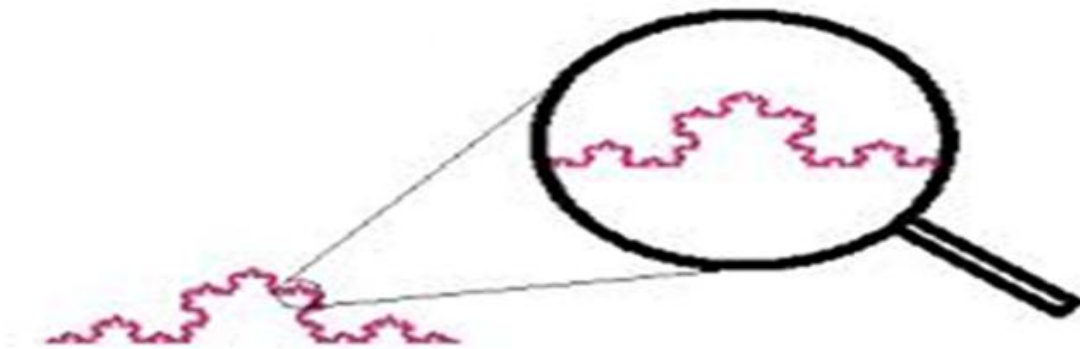
- Άρχισε με το ευθύγραμμο τμήμα μήκους 1.
- Χώρισε κάθε τμήμα σε τρία ίσα μέρη.
- Σχεδίασε ένα ισόπλευρο τρίγωνο με βάση το μεσαίο ευθύγραμμο τμήμα του βήματος 2.
- Αφαίρεσε το ευθύγραμμο τμήμα της βάσης του βήματος 3.
- Πήγαινε στο βήμα #2.



Εικόνα 4.1.4.α

(The nature of code, P:367)

Αυτοομοιότητα



Εικόνα 4.1.4.β

(Koch.gif)

Η καμπύλη αυτή είναι συνεχής αλλά πουθενά διαφορίσιμη και το μήκος της είναι άπειρο αφού σε κάθε βήμα κάθε υπάρχον ευθύγραμμο τμήμα «γεννάει» αλλά 4 και έτσι αυξάνεται κατά το $1/3$ του.



Εικόνα 4.1.4.γ

Βήμα No.	2	3	v
Μήκος	$(\frac{4}{3})^2$	$(\frac{4}{3})^3$	$(\frac{4}{3})^v$

Πίνακας 4.1.4. Το όριο της ακολουθίας $(4/3)^v$ είναι το άπειρο

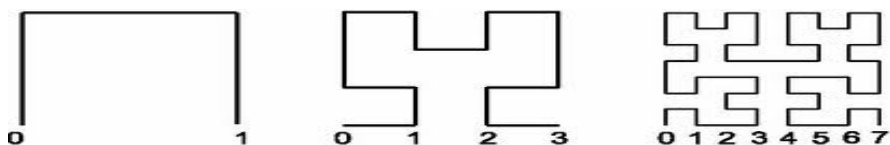
(diplomatiki.pdf,P:47)

Η νιφάδα του Koch ή Koch snowflake κατασκευάζεται σαν τη καμπύλη μόνο που αρχίζουμε εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία όχι σε ένα ευθύγραμμο τμήμα αλλά σε τρία, που είναι οι πλευρές ενός ισόπλευρου τριγώνου. Η περίμετρος της νιφάδας είναι άπειρη. Το εμβαδό βέβαια της περιοχής που περικλείει είναι πεπερασμένο αφού όλη η νιφάδα μπορεί να εγκλειστεί σε ένα κύκλο και επομένως αυτό το εμβαδό δεν μπορεί να ξεπεράσει μια ορισμένη τιμή.

4.1.5. Guiseppe Peano curve ή καμπύλη του Peano

Ο Peano είναι γνωστός για τη σημαντική δουλειά του στη συμβολική λογική¹, την αξιωματική μέθοδο αλλά και για τις σημαντικές συμβολές του στη μαθηματική ανάλυση. Ειδικεύτηκε επάνω στη μαθηματική Λογική. Ο Peano καθιέρωσε τους συμβολισμούς της Θεωρίας των Συνόλων. Εισηγάγε το 1889 το σύστημα αξιωμάτων με το οποίο εισάγονται οι φυσικοί αριθμοί. Τα αξιώματα αυτά αποτέλεσαν και το βασικότερο λόγο διάκρισης του. Ο Peano στα αξιώματά του, άρχιζε από τους φυσικούς αριθμούς από το 1.

Στη συνέχεια χρησιμοποιείτε το ίδιο σύστημα αξιωμάτων με τη μόνη διαφορά ότι οι φυσικοί αριθμοί αρχίζουν από το 0. Αυτό γίνεται για να διευκολυνθεί ο ορισμός των πράξεων και η κατασκευή του N ως πληθαρθμωv. Όλα τα θεωρήματα της αριθμητικής, της άλγεβρας και της ανάλυσης προέρχονται από τα αξιώματα του Peano και τους ορισμούς όλων αυτών των μαθηματικών όρων που δεν είναι βασικοί στο σύστημα του Peano. Το 1890 ο Peano παρουσίασε μια καμπύλη που όχι μόνο μπορούσε να «χωρέσει» σε μια πεπερασμένη περιοχή του επιπέδου αλλά ταυτόχρονα περνούσε και από όλα τα σημεία αυτής της περιοχής.



¹ www.math.uoc.gr.1080/Members/asirokot/Peano.doc.

Εικόνα 4.1.5

(pc.ua.com.ua)

Αξίζει να σημειωθεί ότι αργότερα από την ανακάλυψη της καμπύλης του Peano ακολούθησε η εξέλιξη της καμπύλης αυτής από τον δάσκαλο της λογικής τον Hilbert.

Τα αξιώματα του Peano είναι:

1) Το 0 είναι ένας φυσικός αριθμός.

2) Για κάθε n ισχύει ότι, αν το n είναι ένας φυσικός αριθμός, τότε είναι και ο επόμενος του ένας φυσικός αριθμός.

3) Αν δυο αριθμοί έχουν το ίδιο επόμενο αριθμό, τότε αυτοί οι δυο είναι ταυτόσημοι.

Το μηδέν δεν είναι επόμενο ενός φυσικού αριθμού.

Αν για ένα υποσύνολο A του \mathbb{N} ισχύει ότι:

a) Το (μηδέν) 0 ανήκει στο A

b) αν για κάθε n που ανήκει στο A συνεπάγεται ότι $n+1$ ανήκει στο A .

4.2. Το ζήτημα της Διάστασης

Είναι γνωστό ότι μια γραμμή έχει διάσταση 1, ένα επίπεδο σχήμα διάσταση 2 και ένας π.χ. κύβος 3. Αλλά γιατί ισχύει αυτό; Η πρώτη μας σκέψη είναι ότι η γραμμή έχει διάσταση 1 επειδή υπάρχει μόνο ένας τρόπος να κινηθείς πάνω σ'αυτήν και όμοια ένα επίπεδο έχει διάσταση 2 γιατί υπάρχουν 2 κατευθύνσεις για να κινηθείς κ.λ.π. Βέβαια στην πραγματικότητα υπάρχουν 2 τρόποι να μετακινηθείς σε μια γραμμή,-μπροστά και πίσω- και άπειροι τρόποι σ'ένα επίπεδο. Αυτό που υπονοείται στη σκέψη μας είναι ότι υπάρχουν 2 γραμμικά ανεξάρτητες διευθύνσεις σ'ένα επίπεδο.

Διαισθητικά λοιπόν, η διάσταση ενός συνόλου(ενός υποσυνόλου του ευκλείδιου χώρου), είναι ο αριθμός των ανεξάρτητων παραμέτρων που χρειαζόμαστε για να περιγράψουμε τη θέση ενός σημείου του αντικειμένου και επομένως, αυτές οι διαστάσεις είναι φυσικοί αριθμοί. Για παράδειγμα, ένα σημείο ενός επιπέδου περιγράφεται από δυο ανεξάρτητες παραμέτρους(είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες του σημείου), επομένως το επίπεδο έχει διάσταση 2. Αν το εξετάσουμε το θέμα από τη μεριά των μετρήσεων, θα δούμε πως με μια ευθεία γραμμή κάποιος μετρά την απόσταση ανάμεσα σε δυο σημεία.

Για να μετρήσουμε όμως την περιοχή που καταλαμβάνει ένα τρίγωνο χρειαζόμαστε δυο μετρήσεις αποστάσεων, της βάσης και του ύψους. Για να μετρήσουμε τον όγκο μιας πυραμίδας, χρειαζόμαστε και μια επιπλέον μέτρηση, αυτήν του ύψους της. Επομένως, ένας άλλος διαισθητικός ορισμός που έχουμε όλοι μας είναι ότι η διάσταση είναι αριθμός των μετρήσεων που χρειάζονται για να πούμε πόσο χώρο καταλαμβάνει ένα αντικείμενο γύρω μας. Η μαθηματική έννοια που αναπτύσσει αυτή την ιδέα είναι αυτή της τοπολογικής διάστασης ή όπως συνηθίζουμε να λέμε της ευκλείδιας διάστασης.

Πρώτος ο αρχαίος φιλόσοφος και γεωμέτρης Ευκλείδης, προσπάθησε να περιγράψει τον χώρο που μας περιβάλλει και τα γεωμετρικά αντικείμενα μέσα σ'αυτόν, δηλαδή τα σημεία, τις γραμμές, τις επιφάνειες και τα κομμάτια του χώρου που έχουν όγκο. Κατά τα λεγόμενα του Ευκλείδη: 'Σημείον εστί ο ού μέρος ουδέν', δηλαδή ένα σημείο δεν κατέχει όγκο μέσα στον χώρο και δεν έχει ούτε μήκος ούτε εμβαδόν, γι'αυτό λέμε ότι έχει διάσταση μηδέν.

Με τις γραμμές τα πράγματα είναι κάπως πιο περίπλοκα. Υπάρχουν γραμμές απλές αλλά και πιο περίπλοκες, όπως θηλιές και κόμποι, όπως επίσης και γραμμές που ορίζονται μόνο στον τρισδιάστατο χώρο όπως είναι η κυλινδρική έλικα. Μια γραμμή όμως δεν έχει ούτε εμβαδόν ούτε όγκο. Έχει μόνο σημεία και ορίζεται από την κίνηση ενός σημείου, αποτελώντας την τροχιά του. Επομένως, λέμε ότι μια γραμμή είναι ένα μονοδιάστατο γεωμετρικό αντικείμενο, δηλαδή έχει διάσταση ένα κατά τον Ευκλείδη: "Γραμμή εστί μήκος άνευ πλάτους".

Οι επιφάνειες περιέχουν σημεία και γραμμές αλλά κυρίως περιέχουν εμβαδόν, κάτι που δεν συμβαίνει με τις γραμμές, δεν έχουν βέβαια όγκο. Πάντως, τα λογικά βήματα είναι ξεκάθαρα και μας πηγαίνουν σταδιακά από την μηδενική έως στις τρεις διαστάσεις. Μετακινώντας μια γραμμή προκύπτει μια επιφάνεια και ακολούθως μετακινώντας μια επιφάνεια προκύπτει μια γεωμετρική οντότητα που έχει όγκο.

Άρα μπορούμε να πούμε ότι η διάσταση ενός γεωμετρικού αντικειμένου μπορεί να είναι μόνο ένας από τους ακέραιους 0,1,2, ή 3. Όμως το σύνολο Cantor, το τρίγωνο και το χαλί του Sierpinski, είναι λίγο πιο περίπλοκα από αυτά που συνηθίσαμε να αντιμετωπίζουμε στην κλασική Γεωμετρία. Αποτελούνται όπως είδαμε από ένα σύνολο σημείων (ή σύνολο γραμμών) τα οποία δημιουργήθηκαν με μια απλή επαναληπτική διαδικασία και εμφανίζουν αυτοομοιότητα, είναι δηλαδή fractals.

Είναι δύσκολο να αποφασίσουμε τι διάσταση έχουν αυτά τα σύνολα. Π.χ. το τρίγωνο του Sierpinski φαίνεται καθαρά ότι δεν μπορεί να έχει διάσταση δυο αφού δεν του έχει απομείνει καθόλου εμβαδόν αλλά δυσκολευόμαστε να αποφασίσουμε ότι έχει και διάσταση ένα, σαν να ήταν απλά μια μονοδιάστατη γραμμή. Είδαμε ότι πρώτος ο Mandelbort μίλησε για κλασματική(φράκταλ) διάσταση. Την καινούργια αυτή «ανάγνωση» της έννοιας της διάστασης μπορούμε να τη συλλάβουμε διαισθητικά σκεπτόμενοι κάπως έτσι: μια οδοντωτή γραμμή (διάσταση ένα) «πιάνει περισσότερο χώρο» πάνω στο επίπεδο (διάσταση δυο) από μια που είναι πιο ομαλή.

Όσο περισσότερο συστρέφεται και κάμπτεται η καμπύλη μας, τόσο περισσότερο χώρο πιάνει πάνω στο επίπεδο. Επομένως, η διάσταση της πλησιάζει όλο και πιο κοντά στο 2. Όμοια, ένα τσαλακωμένο χαρτί πιάνει περισσότερο χώρο από ένα επίπεδο χαρτί, αλλά λιγότερο χώρο από ότι μια σφαίρα. Άρα όσο πιο τσαλακωμένο είναι το χαρτί, τόσο πιο κοντά στο 3 είναι η φράκταλ διάσταση του. Είναι επομένως απαραίτητο να έχουμε έναν εναλλακτικό ορισμό διάστασης που να μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε αντικείμενο ευκλείδιο ή φράκταλ. Αυτός βασίζεται στην έννοια της «ικανότητας» (box dimension ή capacity dimension) δηλαδή στο πως ένα αντικείμενο γεμίζει το χώρο και προτάθηκε αρχικά από τον Ρώσο μαθηματικό Andrei Kolmogorov(1903-1987).

Είναι γνωστή σαν εντροπία του Kolmogorov, διάσταση εντροπίας, διάσταση πληροφορίας, λογαριθμική πυκνότητα, διάσταση Minkowski. Το 1919 ο Γερμανός μαθηματικός Felix Hausdorff ανέπτυξε έναν αυστηρό ορισμό της διάστασης ενός συνόλου εμπνεόμενος και από μια μέθοδο που ανέπτυξε ο Έλληνας μαθηματικός Κ.Καραθεοδωρής, τον οποίο ορισμό επεξεργάστηκε και ο Besikovitch¹. Η διάσταση Hausdorff-Besikovitch-Καραθεοδωρής είναι τεχνικά δύσκολη γιατί υπολογίζεται μόνο με μαθηματικές μεθόδους, είναι θεωρητική γενίκευση της box dimension και χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό διάστασης αντικειμένων που εμφανίζουν «διαφορετική πυκνότητα»².

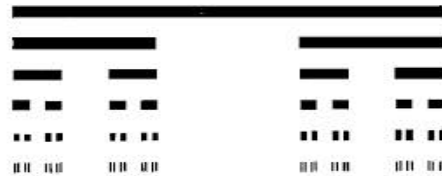
Η box dimension, μετά την επεξεργασία της παραμελήθηκε για να αξιοποιηθεί πολύ αργότερα το 1975, από τον Mandelbrot στο βιβλίο του: Η μορφολογική Γεωμετρία της Φύσης. Αυτή η εύχρηστη διάσταση είναι ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός, επεκτείνει

¹ Ο θαυμαστός κόσμος των Fractal,P:65.

² Ο θαυμαστός κόσμος των Fractal,P:77.

την έννοια της ευκλείδειας διάστασης συσχετίζοντας την και με άλλες μετρικές ιδιότητες του χώρου, όπως το εμβαδό ή τον όγκο και υπολογίζεται κατά προσέγγιση και με τη χρήση Η/Υ.

4.2.1. Υπολογισμός της διάστασης του συνόλου Cantor



Εικόνα 4.2.1

(The nature of code,P:365)

Προηγουμένως είδαμε πως κατασκευάζεται το σύνολο Cantor¹. Αν παρατηρήσουμε το σχήμα θα δούμε ότι το αριστερό κομμάτι είναι όμοιο με το δεξί και μάλιστα έχουν ίσα μήκη. Καθώς τα βήματα της διαδικασίας επαναλαμβάνονται, ότι αλλαγές συμβαίνουν στο ένα από τα δυο μέρη συμβαίνουν ακριβώς ίδιες και στο άλλο. Αυτό ισχύει για κάθε επαναλαμβανόμενο βήμα της διαδικασίας, αλλά το πιο σημαντικό, ισχύει και μετά από άπειρα βήματα.

Και μάλιστα μετά από άπειρο πλήθος βημάτων παρατηρούμε και κάτι πολύ βασικό: Το καθένα από τα δυο μέρη είναι όμοιο με ολόκληρο το σύνολο. Τα δυο μεγάλα υποσύνολα που εξετάσαμε παραπάνω, το αριστερό και το δεξί, περιέχουν με τη σειρά τους, το καθένα το δικό του αριστερό και δεξί μέρος. Έχουμε λοιπόν τέσσερα μικρότερα υποσύνολα. Εφόσον η διαδικασία συνεχίζεται είναι αναμφισβήτητο γεγονός ότι το σύνολο Cantor περιέχει έναν άπειρο αριθμό από υποσύνολα όλο και πιο μικρά, αλλά πανομοιότυπα προς το αρχικό σύνολο.

Κάθε ένα από αυτά, οσοδήποτε μικρό, είναι ένα πλήρες σύνολο Cantor γι'αυτό όπως λέχθηκε το σύνολο Cantor είναι αυτοόμοιο και αποτελεί ένα fractal. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να βρούμε το λόγο ομοιότητας που το χαρακτηρίζει. Είναι φανερό ότι $\lambda = 3$, αφού όλο το σύνολο είναι τρεις φορές πιο μεγάλο από το αριστερό του μέρος και αυτό οφείλεται στον κανόνα σχηματισμού του. Όπως αποδείχτηκε προηγουμένως το σύνολο Cantor δεν έχει μήκος με τη συνηθισμένη έννοια αφού στο τέλος δεν απομένει τίποτε άλλο παρά μεμονωμένα σημεία («σκόνη του Cantor»).

Αν το σύνολο Cantor έχει κάποιο «μέτρο», τότε αυτό το μέτρο θα πρέπει να διαμοιράζεται εξίσου ανάμεσα στα δυο μέρη του συνόλου, το αριστερό και το δεξί, αφού αποτελείται από δυο κομμάτια. Το καθένα από αυτά περιέχει το μισό από το "μέτρο" ολόκληρου του σχήματος, άρα $N = (\text{Μέτρο του όλου})/(\text{Μέτρο του αριστερού ή δεξιού κομματιού}) = \text{αριθμός κομματιών} = 2$

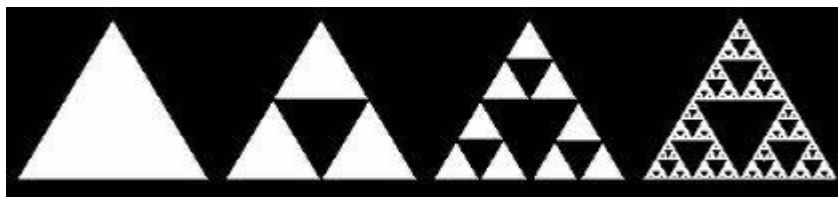
$N = \lambda^D$, $2 = 3^D$, $\log 2 = \log 3^D$ και τελικά:

$$D = [(\log 2) / (\log 3)] = 0,6039$$

Και αυτή είναι η διάσταση ομοιότητας του συνόλου Cantor, δηλαδή η fractal διάσταση του συνόλου Cantor.

¹ Γνωριμία με τα φράκταλς- πρόταση διδασκαλίας τους στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, diplomatiki.pdf,P.P:52-56

4.2.2. Υπολογισμός της διάστασης του τριγώνου Sierpinski



Εικόνα 4.2.2

(sepia.ac-reims.fr)

Στο πρώτο βήμα παρατηρούμε ότι το σύνολο που προκύπτει (το τρύπιο τρίγωνο) αποτελείται από 3 κομμάτια, 3 μινιατούρες του αρχικού τριγώνου, άρα $N = 3$ (το μέτρο του όλου συνόλου είναι τρεις φορές εκείνο του υποσυνόλου). Επίσης κάθε ένα από αυτά τα τρίγωνα μινιατούρες είναι όμοιο με το αρχικό τρίγωνο και μάλιστα παρατηρούμε ότι πρέπει να διπλασιαστεί η πλευρά του για να πάρουμε το αρχικό τρίγωνο, άρα $\lambda = 2$.

Η σχέση $N = \lambda^D$ γίνεται $3 = 2^D$, $\log 3 = \log 2^D$, $\log 3 = D \log 2$ και

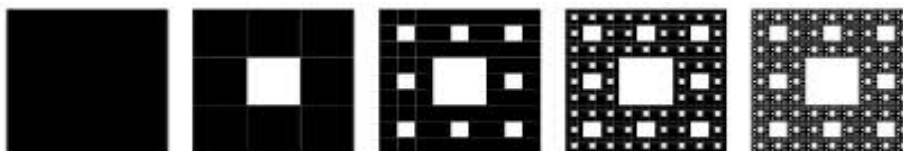
τελικά: $D = \frac{(\log 3)}{(\log 2)} = 1,585$

Παρατηρούμε ότι αν εφαρμόσουμε τον παραπάνω τύπο σε οποιοδήποτε βήμα θα βρούμε τον ίδιο αριθμό D αφού κάθε τόσο ο αριθμός των μικρών τριγώνων (κομματιών) που δημιουργούνται και ο συντελεστής με τον οποίο πρέπει να πολλαπλασιαστεί η πλευρά τους για να δώσει την αρχική πλευρά αυξάνονται εκθετικά κατά ίσο συντελεστή. Π.χ. στην επόμενη φάση έχουμε ότι το μεγάλο τρίγωνο αποτελείται από 9 τρίγωνα και η πλευρά του είναι 4 φορές η πλευρά του μικρού.

$N = \lambda^D$, $9 = 4^D$, $\log 9 = \log 4^D$, $\log 9 = D \log 4$, $\log 3^2 = D \log 2^2$,

$2 \log 3 = 2 D \log 2$ και τελικά: $D = \frac{(\log 3)}{(\log 2)}$.

4.2.3. Υπολογισμός της διάστασης του Sierpinski Carpet



Εικόνα 4.2.3

(mathworld.wolfram.com)

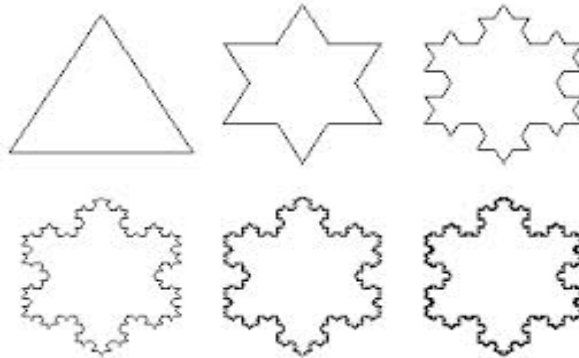
Στο πρώτο βήμα παρατηρούμε ότι η επιφάνεια που προκύπτει καλύπτεται από 8 κομμάτια, 8 μινιατούρες του αρχικού τετραγώνου, άρα $N = 8$. Επίσης κάθε ένα από αυτά τα μικρά τετράγωνα είναι φυσικά όμοιο με το αρχικό τετράγωνο και μάλιστα παρατηρούμε ότι πρέπει να τριπλασιαστεί η πλευρά του για να πάρουμε το αρχικό τετράγωνο, άρα $\lambda = 3$.

Η σχέση $N = \lambda^D$ γίνεται $8 = 3^D$, $\log 8 = \log 3^D$, $\log 8 = D \log 3$ και

τελικά: $D = (\log 8) / \log 3 = 3(\log 2) / (\log 3)$

Άρα, η fractal διάσταση του χαλιού του Sierpinski, είναι τρεις φορές εκείνη του συνόλου Cantor.

4.2.4. Υπολογισμός της διάστασης της νιφάδας του Koch



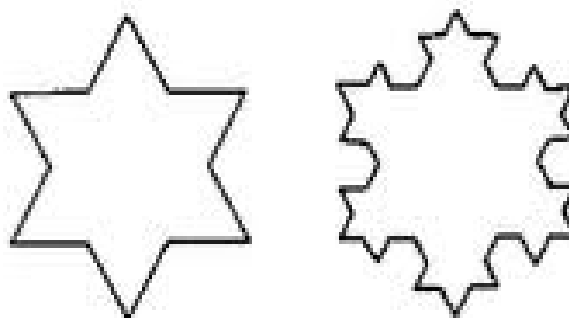
Εικόνα 4.2.4.α

(www.oxfordmathcenter.com)

Ο υπολογισμός της διάστασης αυτής φαίνεται δυσκολότερη, γιατί η νιφάδα δεν δείχνει να αποτελείται από αντίγραφα του εαυτού της. Υπάρχει επομένως μια σχετική δυσκολία να βρούμε τις τιμές του τύπου που δίνει τη διάσταση. Καταρχήν σκεφτόμαστε ότι κάθε μέρος της νιφάδας θα έχει την ίδια διάσταση με τη νιφάδα.

Αυτό είναι εύκολο να το αντιληφθούμε, αν πάρουμε ένα κομμάτι οποιουδήποτε μεγέθους από μια ευθεία, ένα ευθύγραμμο τμήμα, αυτό έχει διάσταση 1. Όμοια αν πάρουμε ένα κομμάτι από ένα τετράγωνο, αυτό θα έχει διάσταση 2 και αν κόψουμε ένα κομμάτι από ένα κύβο, αυτό θα έχει διάσταση 3. Έχοντας στο μυαλό μας ότι μόνο η γραμμή είναι μέρος της νιφάδας και όχι το εμβαδό που περικλείεται, συμπεραίνουμε ότι αν βρούμε τη διάσταση μιας πλευράς που σχηματίζει το φράκταλ, τότε όλη η νιφάδα θα έχει την ίδια διάσταση.

Παρατηρούμε ότι κάθε ευθύγραμμο τμήμα μετασχηματίζεται σε άλλα 4 ίσα ευθύγραμμα τμήματα που το καθένα έχει μήκος ίσο με το $\frac{1}{3}$ του αρχικού. Με άλλα λόγια, κάθε πλευρά έχει μετασχηματιστεί σε 4 αυτοόμοια αντίγραφα με συντελεστή ομοιότητας 3 αφού πρέπει να πολλαπλασιαστεί επί 3 για να πάρουμε το αρχικό μήκος. Άρα $N = 4$ και $\lambda = 3$. Ένας άλλος τρόπος να βρούμε τα μεγέθη N και λ είναι να παρατηρήσουμε την επόμενη φάση:



Εικόνα 4.2.4.β

12 ευθύγραμμα τμήματα

48 ευθύγραμμα τμήματα

Αν το αρχικό ισόπλευρο τρίγωνο είχε πλευρά 9 εκατοστών, στο 1^ο βήμα προκύπτει ένα αστέρι που αποτελείται από 12 ευθύγραμμα τμήματα μήκους 3cm και στο 2^ο βήμα προκύπτουν 48 ευθύγραμμα τμήματα μήκους 1cm. Δηλαδή το αστέρι που προκύπτει κάθε τόσο έχει τετραπλάσια ευθύγραμμα τμήματα από το προηγούμενο και το καθένα από αυτά πρέπει να 3/σιαστεί για να δώσει το ευθύγραμμο τμήμα του προηγούμενου βήματος.

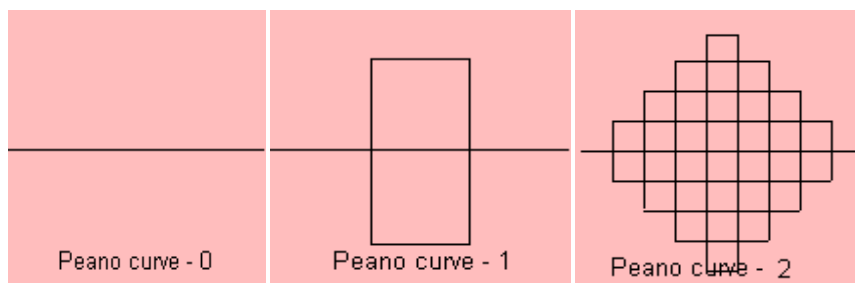
Άρα, $N = 4$ και $\lambda = 3$

Η σχέση $N = \lambda^D$ γίνεται $4 = 3^D$, $\log 4 = \log 3^D$, $\log 4 = D \log 3$ και τελικά:

$D \log(\log 4) / (\log 3) = 2(\log 2) / (\log 3) \cong 1,26185$.

4.2.5. Υπολογισμός της διάστασης της καμπύλης του Peano

Ο Peano το 1890 κατασκεύασε παράδειγμα γραμμής που περνούσε από όλα τα σημεία ενός τετραγώνου, δηλαδή μια καμπύλη που όχι μόνο μπορούσε να «χωρέσει» σε μια πεπερασμένη περιοχή του επιπέδου, αλλά ταυτόχρονα περνούσε και από όλα τα σημεία αυτής της περιοχής.



Εικόνα 4.2.5

(www.2dcurves.com)

Οι μαθηματικοί δεν μπορούσαν να δεχθούν ότι ένα (πλήρες) τετράγωνο είναι μια καμπύλη. Όντως παρατηρώντας τα παραπάνω σχήματα είναι λίγο δύσκολο να κατανοήσουμε πως μια γραμμή γίνεται τελικά τετράγωνο. Αργότερα όμως κι άλλοι μαθηματικοί ανακάλυψαν τέτοιες γραμμές, που σήμερα ονομάζονται γραμμές Peano. Αξιοσημείωτο είναι μάλιστα, ότι ο μεγάλος Γάλλος μαθηματικός Henri Poincare (1854-1912), χαρακτήρισε όλες αυτές τις παράξενες καμπύλες ως «γαλαρία τεράτων»¹.

Αυτό λοιπόν που δημιούργησε ο Peano ήταν μια καμπύλη, η οποία ήταν ένα φράκταλ μοτίβο βάσης, η οποία χρησιμοποιεί ένα τμήμα της γραμμής ως βάση. Το μοτίβο είναι ότι μοιράζει το ευθύγραμμο τμήμα σε τρία μέρη και κάνοντας ένα τετράγωνο πάνω και κάτω από το μεσαίο τμήμα. Αυτό οδηγεί σε ένα γεμάτο τετράγωνο, έτσι ώστε η καμπύλη είναι μια καμπύλη πλήρωσης χώρου. Η κλασματική διάσταση της καμπύλης Peano είναι ίσο με

¹ [PDF], Ο Guiseppe Peano αφηφά την κοινή λογική και αντίληψη.

2¹. Αργότερα το όνομα της καμπύλης Peano δόθηκε σε κάθε φράκταλ, του οποίου fractal διάσταση είναι ίσο με 2. Άρα, fractal διάσταση= $\log N / \log e$, όπου N είναι ο αριθμός των τμημάτων και e η μεγέθυνση. Επομένως έχουμε για την καμπύλη του Peano:

Άρα, fractal διάσταση= $\log N / \log e$, όπου N είναι ο αριθμός των τμημάτων και e η μεγέθυνση. Επομένως έχουμε για την καμπύλη του Peano:

$N = 9$, $e = 3$, άρα $D = \log 9 / \log 3$.

Κεφάλαιο 5: Εφαρμογές Fractal για προσομοίωση φυσικών φαινομένων

Φαίνεται ότι τα fractals, εκτός όλων αυτών των εξαιρετικών ιδιοτήτων που έχουν, είναι μια από τις δημιουργικές δυνάμεις στη Φύση¹. Και εννοούμε αυτή τη τάση της αυτό-ομοιότητας που υπάρχει διάχυτη είτε σε φανερό είτε σε αφαιρετικό επίπεδο. Αυτά λοιπόν τα γοητευτικά γεωμετρικά αντικείμενα είναι ο λόγος που απασχόλησαν και συνεχίζουν να απασχολούν τους διαφορετικούς κλάδους της επιστήμης, που είναι η μικροφυσική μέχρι την κυτταρική βιολογία και η αστροφυσική μέχρι την ανθρώπινη ανατομία.

Τα fractals είναι μια γενίκευση των κλασικών γεωμετρικών σχημάτων (τρίγωνα, ορθογώνια, παραλληλόγραμμα, πυραμίδες κ.λ.π), σε μη κανονικά και συχνά πολύπλοκα «γεωμετρικά» σχήματα, τα οποία είτε βρίσκονται στη φύση είτε κατασκευάζονται από τον άνθρωπο για διάφορες εφαρμογές ή απλώς για την ομορφιά τους. Έτσι, η fractal γεωμετρία μας επιτρέπει να περιγράψουμε ικανοποιητικά και να απεικονίζουμε πολύπλοκες φυσικές δομές όπως τα φύλλα των δέντρων, τα φτερά των πουλιών, το νεφρό του ανθρώπου, μονοκύτταρους οργανισμούς, πυρήνες κυττάρων αλλά και σύννεφα, ποτάμια, γαλαξίες.

Ένα κλαδί ενός δένδρου είναι όμοιο με το δένδρο, μια λεπτομέρεια ενός βουνού είναι όμοια με το βουνό κοιτώντας το από μακριά, μια ριπή του ανέμου δημιουργεί κυματάκια όμοια με το μεγάλο κύμα που το κουβαλάει και άλλα πολλά φαινόμενα κουβαλάνε την ιδιότητα της αυτό-ομοιότητας, το οποίο εν τέλει μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η φύση δημιουργεί αντιγράφοντας και η απόδειξη αυτού είναι ότι όλα στη φύση παράγονται από ένα απλό κανόνα, μια απλή πληροφορία που εφαρμόζεται κάθε φορά σε διαφορετική κλίμακα.

Οι σημαντικές πληροφορίες στη φύση, αυτές που αξίζει οι οργανισμοί να μεταδίδουν στους απογόνους τους, αυτές που περιέχονται στους σπόρους των φυτών και καθορίζουν πως το φυτό θα αναπτυχθεί πρέπει τελικά να είναι πολύ λίγες. Οι καλύτερες συνταγές στη φύση είναι αυτές που εφαρμόζονται σε πολλές κλίμακες. Άρα αυτό-όμοιες, δηλαδή fractal.

Όπως στην κλασική Γεωμετρία, που το ενδιαφέρον της βρίσκεται στις εφαρμογές που αυτή έχει στη φύση, π.χ. ελλείψεις που περιγράφουν τις τροχιές των πλανητών (κατά προσέγγιση), η σφαίρα που περιγράφει το σχήμα της γης, το ίδιο συμβαίνει και με την fractal Γεωμετρία. Εκτός όμως από την φυσική και την Βιολογία η θεωρία των fractals βρίσκει εφαρμογές στη Γεωλογία, την Αρχιτεκτονική, την Αστρονομία, την Οικονομία, την Μουσική και την Ζωγραφική, επειδή οι δομές τους προσομοιάζουν αρκετά με τις δομές των στοιχείων του φυσικού κόσμου.

Αναμφισβήτητα τα fractals ξεκίνησαν σαν ένα αντικείμενο των καθαρών μαθηματικών, επινόημα της ανθρώπινης φαντασίας. Δεν πέρασε πολύς καιρός όμως για να αναδειχτούν ως ένα από τα σημαντικότερα εργαλεία για την κατανόηση πολλών μηχανισμών του Φυσικού κόσμου και την επιτυχή μίμηση τους μέσω των Η/Υ. Ο Mandelbort, ο "πατέρας" των fractals, απέδωσε στο σύμπαν ένα μοντέλο δομής ενός τρισδιάστατου συνόλου Cantor.

Το μοντέλο αυτό σίγουρα δεν είναι καθόλου ρεαλιστικό, όμως κατάφερε να ερμηνεύσει με επιτυχία την μέχρι τώρα ανεξήγητη κατανομή της αστρικής ύλης στο σύμπαν μας. Για πολλά χρόνια μας απασχολούσε το ερώτημα για το πώς όμοια σωματίδια συνενώνονται για να δημιουργήσουν διάφορες δομές. Για παράδειγμα, πως ενώνονται οι κρύσταλλοι από τις σταγόνες της βροχής για να σχηματίσουν μια χιονονιφάδα; Γιατί αυτή έχει εξαγωνικό σχήμα; Με τη χρήση των fractals αναπτύχθηκαν διάφορα μοντέλα που προσεγγίζουν αυτές τις

¹ Fractal Geometry Mandelbrot Set.pdf.

μορφές. Έγινε φανερό το ότι αν το σχήμα θα είναι πιο πυκνό και σφαιρικό ή πιο αραιό και διακλαδιζόμενο, εξαρτάται από τον τρόπο κίνησης των σωματιδίων.

Με τη χρήση των fractals αναπτύχθηκαν διάφορα μοντέλα που προσεγγίζουν αυτές τις μορφές. Έγινε φανερό το ότι αν το σχήμα θα είναι πιο πυκνό και σφαιρικό ή πιο αραιό και διακλαδιζόμενο, εξαρτάται από τον τρόπο κίνησης των σωματιδίων. Υπάρχουν προβλήματα διάχυσης πολύ σημαντικά για τη ζωή μας που παρουσιάζουν fractal συμπεριφορά και αυτά είναι η εξάπλωση των επιδημιών σε ένα πληθυσμό(π.χ. σε ένα φυτώριο δέντρων), η εξάπλωση των πυρκαγιών στα δάση, ακόμα και ο τρόπος διάλυσης κάποιων ουσιών μέσα σε κάποιες άλλες όπως είναι η διάλυση των κόκκων του καφέ στο νερό. Στους ζωντανούς οργανισμούς τα fractals δίνουν κανόνες και μοντέλα για το πώς αναπτύσσεται το νευρικό τους σύστημα, ο εγκέφαλος, ή ακόμα και το σύστημα των αρτηριών και φλεβών.

5.1. Κώδικας προσομοίωσης φυσικών φαινομένων

Ένας άλλος σημαντικός παράγοντας των fractals, εκτός από την κατασκευή τους και τον υπολογισμό της διάστασης τους, είναι ο κώδικας που στηρίζονται μέσω Η/Υ, ώστε να κατανοήσουμε καλύτερα τον τρόπο δημιουργίας τους αλλά και την έννοια της αυτοομοιότητας που τα αντιπροσωπεύει¹.

5.1.1. Παράδειγμα δέντρου διακλάδωσης



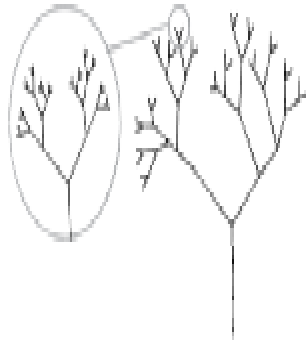
Εικόνα 5.1.1

(The nature of code, P:357)

Αν πάρουμε για παράδειγμα τη δομή ενός δέντρου διακλάδωσης, θα παρατηρήσουμε πως το δέντρο έχει μια ρίζα με δύο κλάδους που συνδέονται στο άκρο του. Καθένας από αυτούς τους κλάδους έχει δυο κλάδους στο τέλος και αυτοί με τη σειρά τους να διακλαδίζονται και ούτω καθεξής.

Εξετάζοντας λεπτομερή ένα δεδομένο τμήμα του δέντρου, διαπιστώνουμε ότι η μορφή αυτού του κλάδου μοιάζει με το ίδιο το δέντρο. Αυτό είναι γνωστό ως αυτοομοιότητα όπως δήλωσε ο Mandelbort «κάθε μέρος είναι αντίγραφο του συνόλου».

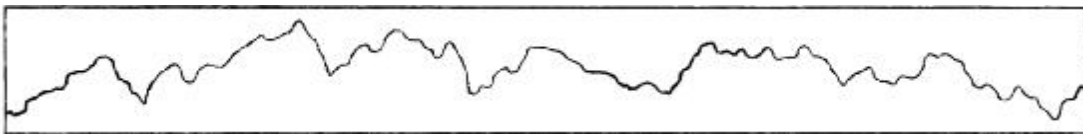
¹ The nature of code,PP:356-382.



Εικόνα 5.1.2

(The nature of code, P:357)

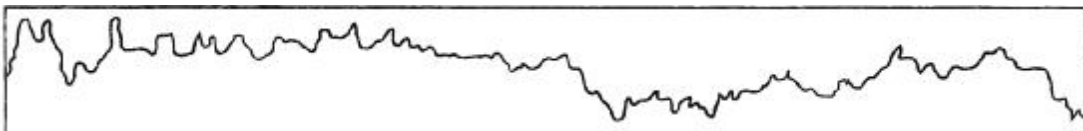
Το παραπάνω δέντρο είναι απόλυτα συμμετρικό και τα μέρη του είναι στην πραγματικότητα τα ακριβή αντίγραφα του συνόλου. Εντούτοις, τα fractals δεν είναι απαραίτητο να είναι τέλεια αυτοόμοια. Αν ρίξουμε μια ματιά σε ένα γράφημα της χρηματιστηριακής αγοράς (προσαρμοσμένο από πραγματικά δεδομένα της μετοχής της Apple) θα δούμε το παρακάτω διάγραμμα:



Εικόνα 5.1.3. Γραφική Παράσταση Α

Κι ένα ακόμα:

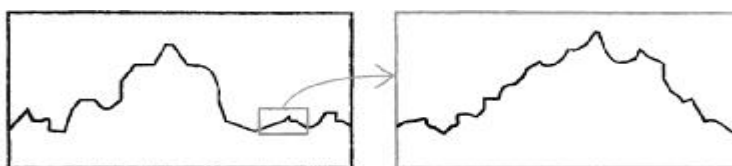
(The nature of code, P:357)



Εικόνα 5.1.4. Γραφική Παράσταση Β

(The nature of code, P:358)

Στις παραστάσεις αυτές η x – άξονας είναι ο χρόνος και ο άξονας y είναι η αξία της μετοχής. Διαγράμματα των δεδομένων της χρηματιστηριακής αγοράς είναι παραδείγματα fractals , επειδή φαίνονται το ίδιο σε οποιαδήποτε κλίμακα. Είναι αυτά τα γραφήματα του αποθέματος πάνω από ένα χρόνο; Μία μέρα; Μία ώρα; Δεν υπάρχει κανένας τρόπος για να ξέρεις χωρίς ετικέτα. (Το διάγραμμα Α δείχνει έξι μήνες αξίας των στοιχείων και η γραφική παράσταση Β, κάνοντας ζουμ σε ένα μικρό μέρος του γραφήματος Α, δείχνει έξι ώρες).



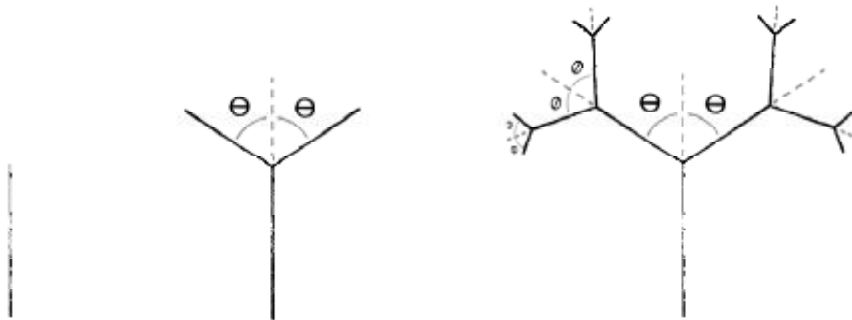
Εικόνα 5.1.5

(The nature of code, P:358)

Αυτό είναι ένα παράδειγμα πιθανολογικού fractal, που σημαίνει ότι χτίζεται από τις πιθανότητες και την τυχαιότητα. Αντίθετα από την αιτιοκρατική δέντρου-διακλάδωση, είναι στατιστικά αυτοόμοια. Ενώ η αυτοομοιότητα είναι ένα βασικό χαρακτηριστικό των fractals, είναι σημαντικό να συνειδητοποιήσουμε ότι η αυτοομοιότητα μόνη της δεν κάνει ένα φράκταλ. Για παράδειγμα μια γραμμή είναι αυτοόμοια, γιατί εξετάζει η ίδια οποιαδήποτε κλίμακα και μπορεί να θεωρηθεί ως συμπερίληψη των μερών των μικρών γραμμών. Αλλά δεν είναι φράκταλ. Τα fractals χαρακτηρίζονται από μια λεπτή δομή στις μικρές κλίμακες και δεν μπορεί να περιγραφεί με την Ευκλείδεια γεωμετρία. Αν μπορούμε να πούμε «Είναι μια γραμμή», τότε δεν είναι ένα φράκταλ.

Για να δημιουργήσουμε λοιπόν μια ντετερμινιστική εκδοχή της διακλάδωσης ενός δέντρου θα πρέπει να ακολουθήσουμε κάποιους συγκεκριμένους κανόνες παραγωγής και αυτοί είναι οι εξής:

- Σχεδίασε μια γραμμή
- Στο τέλος της γραμμής α) περιστρέψου προς τα αριστερά και β) περιστρέψου προς τα δεξιά και σχεδίασε μια πιο κοντή γραμμή.
- Επανάλαβε το 2^ο βήμα για τις καινούργιες γραμμές ξανά και ξανά.



Εικόνα 5.1.6

(The nature of code, P:375)

Πάλι έχουμε ένα συμπαθητικό fractal με έναν επαναλαμβανόμενο καθορισμό. Ένας κλάδος είναι μια γραμμή με δυο κλάδους συνδεδεμένοι με αυτό.



Εικόνα 5.1.7

(The nature of code, P:375)

Αυτό που είναι λίγο δυσκολότερο εδώ από τα προηγούμενα fractals βρίσκεται στη χρήση της λέξης "περιστρέφεται", στους fractal κανόνες. Κάθε νέος κλάδος πρέπει να περιστρέφεται σε σχέση με τον προηγούμενο κλάδο, ο οποίος περιστρέφεται σε σχέση με όλους τους προηγούμενους κλάδους του. Η μήτρα μετασχηματισμού είναι ο μηχανισμός αυτός που θα μας βοηθήσει στην παρακολούθηση των εναλλαγών.

Ξεκινώντας με την κατάρτιση ενός ενιαίου κλάδου, τον κορμό του δέντρου, που θα περιλαμβάνει την περιστροφή, θα πρέπει να σιγουρευτούμε ότι μεταφράζουμε συνεχώς κατά μήκος των κλάδων, ενώ σχεδιάζουμε το δέντρο. Και δεδομένου ότι η ρίζα αρχίζει στο κάτω μέρος του παραθύρου, το πρώτο βήμα απαιτεί μετάφραση σε εκείνο το σημείο:

μετάφραση (πλάτος / 2, ύψος)?

Ακολουθούμενος να σύρει μια γραμμή προς τα πάνω(Σχ.5.1.8)

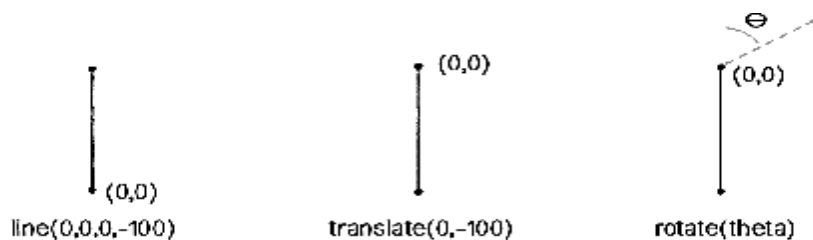


Εικόνα 5.1.8

(The nature of code, P:376)

γραμμή (0, 0, 0, - 100)?

Μόλις τελειώσει τη ρίζα, πρέπει ακριβώς να μεταφράσει στο τέλος και να περιστραφεί προκειμένου να σύρει τον επόμενο κλάδο. Όλο αυτό που έχει δημιουργηθεί πρέπει να συσκευαστεί σε μια επαναλαμβανόμενη λειτουργία, αφού πρώτα ταξινομήσουμε τα βήματα.



Εικόνα 5.1.9

(The nature of code, P:376)

Σημαντικό είναι να θυμόμαστε ότι όταν περιστρέφεται στην επεξεργασία πρέπει να περιστρέφεται γύρω από το σημείο προέλευσης, το οποίο πρέπει πάντα να μεταφραστεί στο τέλος του τρέχοντος κλάδου μας.

μετάφραση (0, - 100)?
περιστροφή ($\pi / 6$)?
γραμμή (0, 0, 0, - 100)?

Τώρα που έχουμε ένα κλάδο που πηγαίνει προς τα δεξιά, χρειαζόμαστε ακόμη έναν να πηγαίνει προς τα αριστερά. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε `pushMatrix()`, για να αποκαταστήσει αυτή την κατάσταση και να επιστήσει τη διακλάδωση προς τα αριστερά.



Εικόνα 5.1.10

(The nature of code, P:377)



Εικόνα 5.1.11

(The nature of code, P:377)

μετάφραση (πλάτος / 2, ύψος)? γραμμή (0, 0, 0, - 100)? μετάφραση (0, - 100)?	Η ρίζα.
pushMatrix ()? περιστροφή (PI / 6)? γραμμή (0, 0, 0, - 100)?	Διακλάδωση προς τα δεξιά.
popMatrix ()? περιστροφή (- PI / 6)? γραμμή (0, 0, 0, - 100)?	Διακλάδωση προς τα αριστερά.

Θα μπορούσαμε να συνεχίσουμε να προσθέτουμε όλο και περισσότερες κλίσεις στην γραμμή για όλο και περισσότερους κλάδους, αλλά ο κώδικας θα ήταν εξαιρετικά πολύπλοκος και δυσκίνητος. Μπορούμε όμως να κινηθούμε πάνω στην ίδια λογική, ώστε να γράψουμε μια αναδρομική συνάρτηση αντικαθιστώντας τις απευθείας κλίσεις στη γραμμή με τις δική μας λειτουργία που ονομάζεται κλάδος.

5.2. Αναδρομική Συνάρτηση δέντρου

void κλάδο () { γραμμή (0, 0, 0, - 100)? μετάφραση (0, - 100)? το τέλος.	Σχεδιάστε τον ίδιο τον κλάδο. Μετάφραση μέχρι
pushMatrix ()? περιστροφή (PI / 6)? κλάδος ()? popMatrix ()?	Περιστροφή προς τα δεξιά και πάλι κλάδος.
pushMatrix ()? περιστροφή (- PI / 6)? κλάδος ()? popMatrix ()? }	Περιστροφή προς τα αριστερά και πάλι κλάδος.

Σύμφωνα με τον παραπάνω κώδικα παρατηρούμε ότι εάν ενεργοποιήσουμε τον εαυτό μας σε επεξεργασία για μια στιγμή και προσπαθήσουμε να ακολουθήσουμε την αναδρομική συνάρτηση με μολύβι και χαρτί, θα παρατηρήσουμε ότι αντλεί το σύνολο των κλάδων προς

τα δεξιά πρώτα. Όταν φτάσει στο τέλος, popMatrix θα μας πετάξει πίσω κατά μήκος όλων των κλάδων που έχουμε και θα αρχίσουν να στέλνουν κλαδιά προς τα αριστερά.



Εικόνα 5.2

(The nature of code, P:378)

Μετά από όλα αυτά όμως, επειδή δεν υπάρχει καμία συνθήκη εξόδου και θα κολλήσουν στο άπειρο αναδρομικές κλήσεις για την ίδια, θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι τα κλαδιά του δέντρου πρέπει να είναι μικρότερα σε κάθε επίπεδο. Για το λόγο αυτό θα δούμε πως μπορεί να συρρικνωθεί το μήκος των γραμμών, καθώς το δέντρο σύρεται και να σταματήσει η διακλάδωση μόλις οι γραμμές γίνουν πάρα πολύ κοντές.

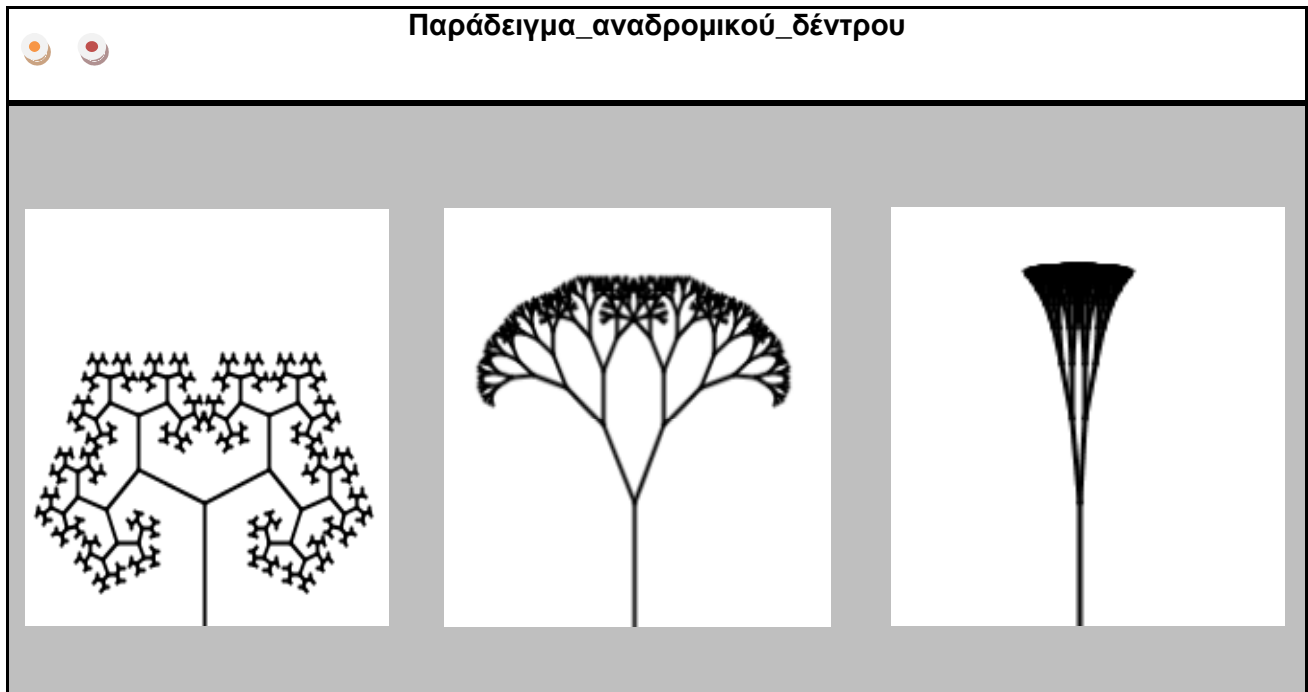
```
void κλάδος (len float) {   Κάθε κλάδος λαμβάνει πλέον το μήκος του ως
επιχείρημα.

γραμμή (0, 0, 0, - len)?
μετάφραση (0, - len)?
len * = 0,66?           Μήκος του κάθε κλάδου συρρικνώνεται κατά τα δύο τρίτα.

if (len > 2) {
pushMatrix ()?
περιστροφή (θήτα)?
κλάδος (len)?   Μεταγενέστερες κλήσεις στον κλάδο() περιλαμβάνουν το
επιχείρημα μήκους.
popMatrix ()?

pushMatrix ()?
περιστροφή (- θήτα)?
κλάδος (len)?
popMatrix ()?
}
}
```

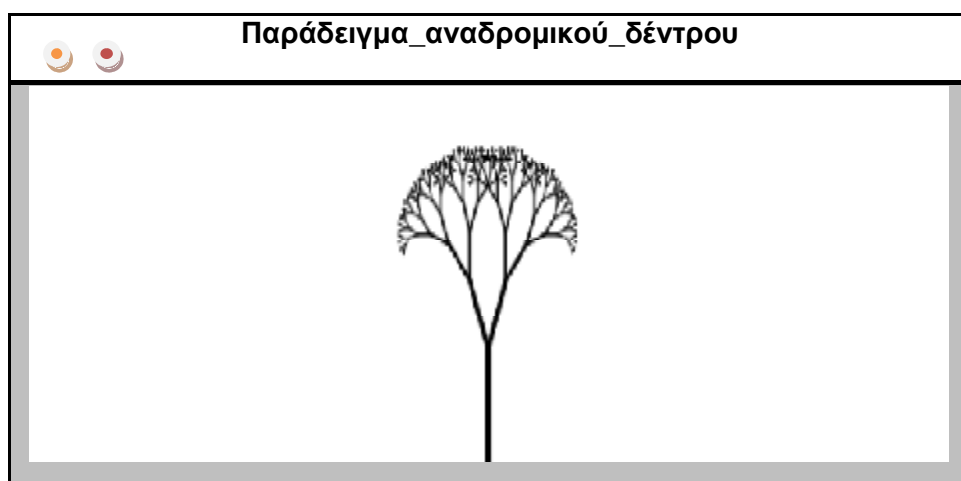
Έχουμε επίσης συμπεριλάβει μια μεταβλητή για θήτα που μας επιτρέπει, όταν γράφοντας το υπόλοιπο του κώδικα με το να οργανώσει και να σύρει για να μεταβάλλει τη γωνία διακλάδωσης σύμφωνα με την mouseX θέση.



Εικόνα 5.2.1

(The nature of code, P:379)

Αν κάνουμε τη ρίζα πιο παχιά και κάθε επόμενο κλάδο, τότε θα δούμε την παρακάτω εικόνα:



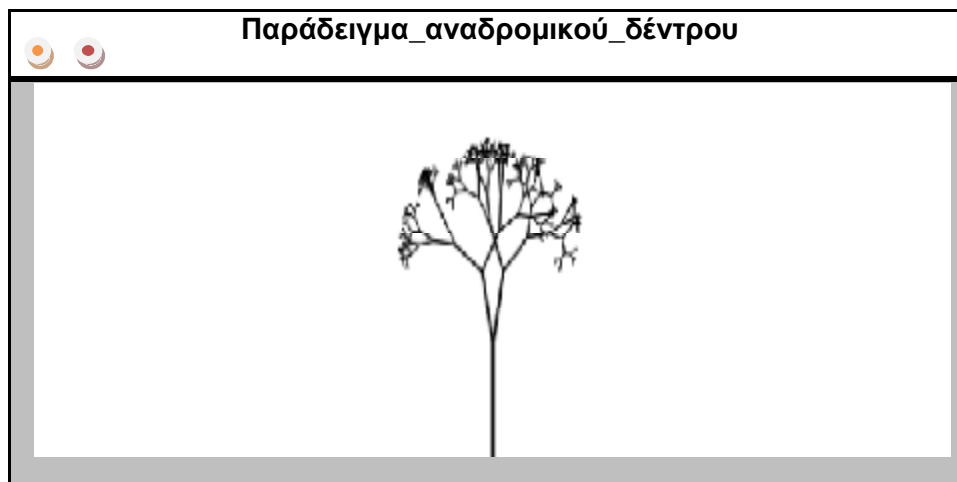
Εικόνα 5.2.2

(The nature of code, P:380)

Η δομή του δέντρου μπορεί επίσης να παραχθεί με τη χρήση της ArrayList, τεχνική που επιδεικνύεται με την καμπύλη Koch. Το αναδρομικό φράκταλ δέντρο είναι ένα ωραίο παράδειγμα για ένα σενάριο στο οποίο προσθέτοντας λίγο τυχαιότητα μπορεί να κάνει το δέντρο να φαίνεται περισσότερο φυσικό.

Αν παρατηρήσουμε μόνοι μας έξω στη φύση ένα δέντρο, θα δούμε ότι τα μήκη και οι γωνίες διακλάδωσης διαφέρουν από τον ένα κλάδο στον άλλο και εκτός αυτού οι κλάδοι δεν έχουν ακριβώς τον ίδιο αριθμό μικρότερων κλάδων.

Στο επόμενο σχήμα θα δούμε τι γίνεται όταν μεταβάλλεται η γωνία και το μήκος, το οποίο είναι πολύ εύκολο δεδομένου ότι μπορούμε απλά να επεξεργαστούμε έναν τυχαίο αριθμό κάθε φορά που θα σχεδιάζουμε το δέντρο.

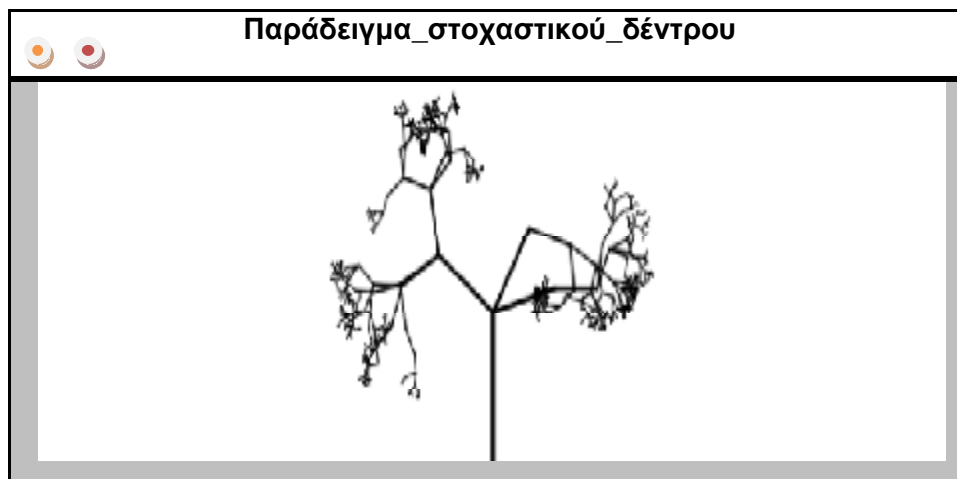


Εικόνα 5.2.3

(The nature of code, P:381)

```
Void κλάδος ( float len ) {  
float θήτα = τυχαία ( 0 , PI / 3 ) ?  
Ξεκινήστε επιλέγοντας μια τυχαία γωνία για κάθε κλάδο.  
  
γραμμή ( 0 , 0 , 0 , - len ) ?  
μετάφραση ( 0 , - len ) ?  
len *= 0,66 ?  
εάν ( len > 2 ) {  
pushMatrix ();  
περιστροφή ( theta );  
κλάδος ( len );  
popMatrix ();  
pushMatrix ();  
περιστροφή ( - theta );  
κλάδος ( len );  
popMatrix ();  
}
```

Στην παραπάνω λειτουργία ζητάμε πάντα κλάδους δυο φορές, βλέποντας όμως την παρακάτω εικόνα παίρνει ένα τυχαίο αριθμό κλάδων.



Εικόνα 5.2.4

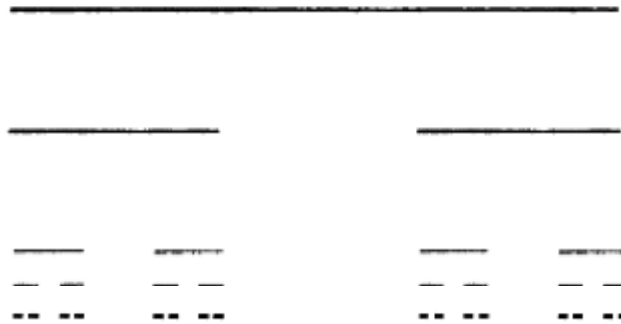
(The nature of code, P:381)

```
void κλάδος ( float len ) {  
    γραμμή ( 0 , 0 , 0 , - len ) ?  
    μετάφραση ( 0 , - len ) ?  
  
    αν ( len > 2 ) {  
  
        int n = int ( τυχαία ( 1 , 4 )) ?  
        Καλέστε κλάδο ( ) ένας τυχαίος αριθμός των στιγμών.  
        για ( int i = 0 ? i < n ? i ++ ) {  
  
            float θήτα = τυχαία ( - PI / 2 , PI / 2 ) ?  
            Κάθε κλάδος έχει τη δική του τυχαία γωνία.  
  
            pushMatrix () ?  
            περιστροφή ( θήτα ) ?  
            υποκατάστημα ( h ) ?  
            popMatrix () ?  
        }  
    }  
}
```

5.3. Αναδρομή στο σύνολο του Cantor

Εξετάζοντας την πρώτη εμφάνιση των fractals στα σύγχρονα μαθηματικά, παρατηρούμε ότι η αναδρομή υπάρχει και στο διάσημο σύνολο του Cantor, όπου το 1883 ο Γερμανός μαθηματικός George Cantor ανέπτυξε απλούς κανόνες για να δημιουργήσει ένα άπειρο σύνολο:

1. Άρχισε με μια γραμμή
2. Χώρισε σε δυο ίσα μέρη τη γραμμή
3. Επανάλαβε το βήμα 2 για τις επόμενες γραμμές ξανά και ξανά και ξανά



Εικόνα 5.3

(The nature of code, P:359)

Στο σημείο αυτό παρατηρούμε ότι υπάρχει ένας βρόχος ανάδρασης, γιατί εάν πάρουμε μια γραμμή και τη σπάσουμε σε δυο ίσα μέρη και στη συνέχεια επιστρέψουμε σε αυτές τις γραμμές και εφαρμόσουμε τον ίδιο κανόνα, σπάζοντας κάθε γραμμή σε δυο, θα έχουμε στο αριστερό μέρος τέσσερις γραμμές και εφαρμόζοντας πάλι τον ίδιο κανόνα θα έχουμε οκτώ γραμμές. Αυτή η διαδικασία είναι γνωστή ως αναδρομή: η επαναλαμβανόμενη εφαρμογή ενός κανόνα σε διαδοχικά αποτελέσματα.

Το σύνολο του Cantor είναι ενδιαφέρον για το τι συμβαίνει όταν εφαρμόζουμε τους παρόντες κανόνες άπειρες φορές, λόγω όμως ότι εργαζόμαστε σε ένα πεπερασμένο χώρο pixel και μπορεί να αγνοήσει ως επί το πλείστον τις ερωτήσεις και τα παράδοξα που προκύπτουν από άπειρη αναδρομή, θα κατασκευάσουμε τον κώδικα μας με τέτοιο τρόπο , ώστε να μην εφαρμόζουμε τους κανόνες για πάντα. Αναδρομή στον κώδικα σημαίνει ότι καλούμε μια συνάρτηση μέσα σε μια άλλη λειτουργία.

```

άκυρη someFunction () {
  υπόβαθρο (0)?           Καλώντας το φόντο λειτουργίας () στον ορισμό του
  someFunction ()
}

```

Τι θα συμβεί όμως αν ζητήσουμε να ορίσουμε τη λειτουργία μέσα στην ίδια τη λειτουργία;

```
άκυρη someFunction () {
  someFunction ()?
}
```

Στην πραγματικότητα αυτό επιτρέπεται και είναι αρκετά κοινό. Λειτουργίες που αυτοαποκαλούνται είναι αναδρομικές και είναι καλές για την επίλυση ορισμένων προβλημάτων. Για παράδειγμα ορισμένοι μαθηματικοί υπολογισμοί εφαρμόζονται επαναληπτικά και το πιο κοινό παράδειγμα είναι το παραγοντικό.

Στην πραγματικότητα αυτό επιτρέπεται και είναι αρκετά κοινό. Λειτουργίες που αυτοαποκαλούνται είναι αναδρομικές και είναι καλές για την επίλυση ορισμένων προβλημάτων. Για παράδειγμα ορισμένοι μαθηματικοί υπολογισμοί εφαρμόζονται επαναληπτικά και το πιο κοινό παράδειγμα είναι το παραγοντικό.

Ο παραγοντικός οποιουδήποτε αριθμού n , που γράφεται συνήθως ως $n!$ ορίζεται ως:

$$n! = n * n - 1 * \dots * 3 * 2 * 1$$
$$0! = 1$$

Εάν γράψουμε μια λειτουργία στην επεξεργασία που χρησιμοποιεί ένα βρόχο για τον υπολογισμό παραγοντικού θα έχουμε:

```
int παραγοντικού (int n) {
  int f = 1?
  for (int i = 0? i <n? i ++ ) { Χρησιμοποιώντας μια τακτική βρόχο για τον υπολογισμό
  παραγοντικού
  f = f * (i + 1)?
  }
  επιστροφή ?
}
```

Μετά από προσεκτική εξέταση, θα παρατηρήσουμε με πολύ ενδιαφέρον το πώς τα fractal λειτουργούν με παραγοντικό.

Ας δούμε τι θα συμβεί με $4!$ Και $3!$

$$4! = 4 * 3 * 2 * 1$$
$$3! = 3 * 2 * 1$$

Ως εκ τούτου

$$4! = 4 * 3!$$

Σε γενικές γραμμές, για κάθε θετικό ακέραιο n :

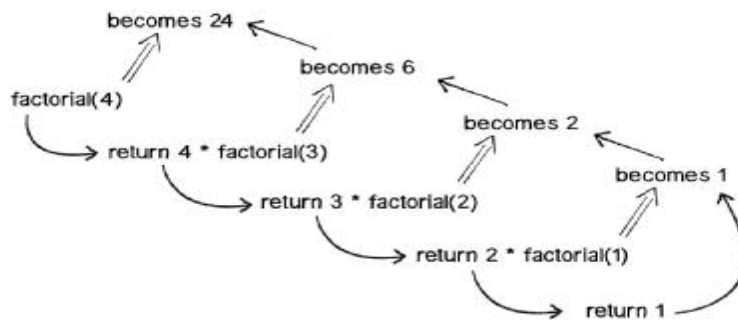
$n! = N * (n-1)!$
 $1! = 1$

Το παραγοντικό του n ορίζεται ως n φορές του παραγοντικού του $N-1$.

Ο ορισμός του παραγοντικού περιλαμβάνει παραγοντικό! Είναι κάτι σαν τον ορισμό "κουρασμένος", όπως το αίσθημα που παίρνουμε όταν είμαστε κουρασμένοι. Η έννοια της αυτοαναφοράς στις λειτουργίες αυτές είναι ένα παράδειγμα αναδρομής και μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε για να γράψουμε μια συνάρτηση παραγοντικού που καλεί τον εαυτό της.

```
int παραγοντικού (int n) {  
  αν (n == 1) {  
    επιστροφή 1?  
  } Else {  
    επιστροφή n * παραγοντικό (n - 1)?  
  }  
}
```

Στο παρακάτω σχήμα παρατηρούμε τα βήματα που συμβαίνουν όταν παραγοντικό (4) καλείται.



Εικόνα 5.3.1

(The nature of code, P:361)

Μπορούμε επίσης να εφαρμόσουμε την ίδια αρχή με γραφικά με ενδιαφέροντα αποτελέσματα, όπως βλέπουμε στο Σχ.5.3.2.



Εικόνα 5.3.2

(The nature of code, P:361)

```
άκυρη drawCircle (int x, int y, ακτίνα float) {  
  έλλειψη (x, y, ακτίνα, ακτίνα)?  
  εάν (ακτίνας > 2) {  
    ακτίνα * = 0.75f? Η λειτουργία drawCircle () είναι η ίδια που ζητά αναδρομικά.  
    drawCircle (x, y, ακτίνα)?  
  }  
}
```



Εικόνα 5.3.3

(The nature of code, P:363)

Το αποτέλεσμα είναι μια σειρά από κύκλους, καθένα από τα οποία έλκεται μέσα στον προηγούμενο κύκλο.


```
void setup () {
  μέγεθος (640, 360)?
}

άκυρη isoπαλία () {
  υπόβαθρο (255)?
  drawCircle (πλάτος / 2, ύψος / 2, 200)?
}

άκυρη drawCircle (float x, y float, ακτίνα float) {
  εγκεφαλικό επεισόδιο (0)?
  noFill ()?
  έλλειψη (x, y, ακτίνα, ακτίνα)?
  εάν (ακτίνας > 2) {
    drawCircle (x + ακτίνα / 2, y, ακτίνας / 2)? ίδια drawCircle () καλεί δύο φορές,
    δημιουργώντας μια διακλάδωση αποτελέσμα. Για κάθε κύκλο, ένας μικρότερος
    κύκλος έλκεται προς τα αριστερά και τα δεξιά.
    drawCircle (x - ακτίνα / 2, y, ακτίνας / 2)?
  }
}
```

Αφού κατανοήσαμε την αναδρομή είμαστε έτοιμοι να απεικονίσουμε το σύνολο του Cantor χρησιμοποιώντας μια αναδρομική συνάρτηση. Είναι γνωστό ότι το σύνολο του Cantor αρχίζει με μια γραμμή. Οπότε αρχίζουμε από εκεί για να γράψει μια λειτουργία που σχεδιάζει μια γραμμή.

```
άκυρη cantor (float x, y float, float len) {
  γραμμή (x, y, x + len, y)?
}
```

Η παραπάνω συνάρτηση Cantor () σχεδιάζει μια γραμμή που ξεκινά από pixel συντεταγμένων(x,y) με μήκος len.(Η γραμμή σύρεται οριζόντια εδώ, αλλά αυτό είναι μια αυθαίρετη απόφαση). Έτσι λέμε ότι η λειτουργία του είναι:

```
cantor (10, 20, πλάτος - 20)?
```

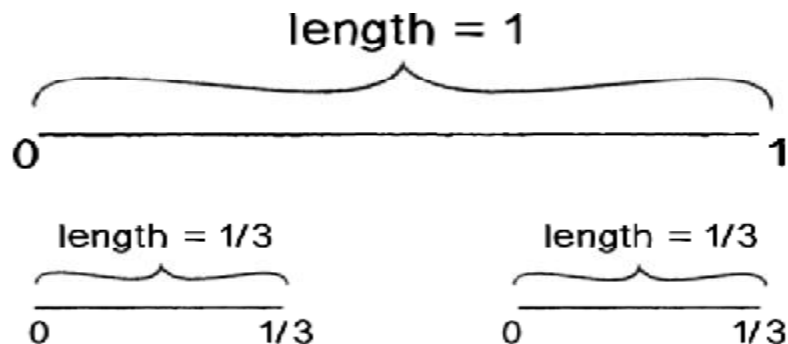
Είχαμε πάρει τα εξής:



Εικόνα 5.3.4

(The nature of code, P:364)

Τώρα ο κανόνας Cantor μας λέει να σβήσει το μεσαίο τρίτο της γραμμής, η οποία μας αφήνει με δύο γραμμές, μια από την αρχή της γραμμής στο ένα τρίτο σημείο και ένα από το σημείο τα δύο τρίτα έως το τέλος της γραμμής.



Εικόνα 5.3.5

(The nature of code, P:364)

Μπορούμε τώρα να προσθέσουμε δυο ακόμη γραμμές κώδικα για να σχεδιάσουμε το δεύτερο ζευγάρι των γραμμών τη μετακίνηση του y -θέση κάτω από πολλά pixels, ώστε να μπορούμε να δούμε το αποτέλεσμα κάτω από την αρχική γραμμή.

```

άκυρη cantor (float x, y float, float len) {
γραμμή (x, y, x + len, y)?

y += 20?
γραμμή (x, y, x + len / 3, y)? Από την αρχή μέχρι το 1/3

γραμμή (x + len * τα 2/3, y, x + len, y)? Από 2/3 μέχρι το τέλος
}

```

Εικόνα 5.3.6

(The nature of code, P:364)

Ενώ αυτό είναι μια καλή αρχή , ένα τέτοιο εγχειρίδιο προσέγγισης της καλούσας γραμμής() για κάθε γραμμή δεν είναι αυτό που θέλουμε, καθώς είναι πολύ δύσκολο και περίπλοκο γιατί θα χρειαστεί τέσσερις, στη συνέχεια οκτώ και δεκαέξι κλήσεις στη γραμμή(). Ένας βρόχος for είναι ο συνηθής τρόπος γύρω από ένα τέτοιο πρόβλημα, αλλά μια δοκιμή θα μας αποδείξει ότι η μόνη λύση είναι η αναδρομή.

Η πρώτη γραμμή από την αρχή έως το 1/3 σήμα περιγράφεται ως εξής:

```
γραμμή (x, y, x + len / 3, y)?
```

Αντί να καλέσουμε τη γραμμή άμεσα, μπορούμε απλά να καλέσουμε την Cantor συνάρτηση, η οποία θα τραβάει μια γραμμή σε μια (x,y) θέση με ένα δεδομένο μήκος και έτσι:

```
γραμμή (x, y, x + len / 3, y)? γίνεται -----> cantor (x, y, len / 3)?
```

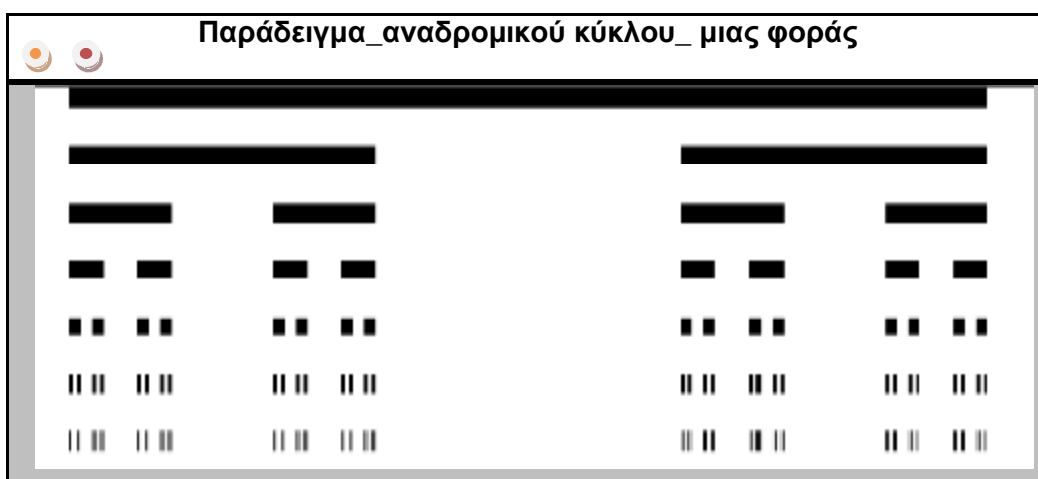
Και για τη δεύτερη γραμμή:

```
γραμμή (x + len * 2.3, y, x + len, y)? γίνεται -----> cantor (x + len * 2.3, y, len / 3)?
```

Αφήνοντας μας με:

```
άκυρη cantor (float x, y float, float len) {  
  γραμμή (x, y, x + len, y)?  
  
  y += 20?  
  
  cantor (x, y, len / 3)?  
  cantor (x + len * 2.3, y, len / 3)?  
}
```

Και δεδομένου ότι η λειτουργία cantor() καλείται αναδρομικά, ο ίδιος κανόνας θα εφαρμοστεί στις επόμενες γραμμές και στο επόμενο και στο επόμενο ως cantor() και θα καλεί τον εαυτό του ξανά και ξανά. Δεν πρέπει όμως να εκτελέσουμε αυτόν τον κώδικα αμέσως γιατί μας λείπει μια συνθήκη εξόδου. Για παράδειγμα θα πρέπει να βεβαιωθούμε αν το μήκος της γραμμής είναι λιγότερο από 1 pixel.



Εικόνα 5.3.7

(The nature of code, P:365)

```

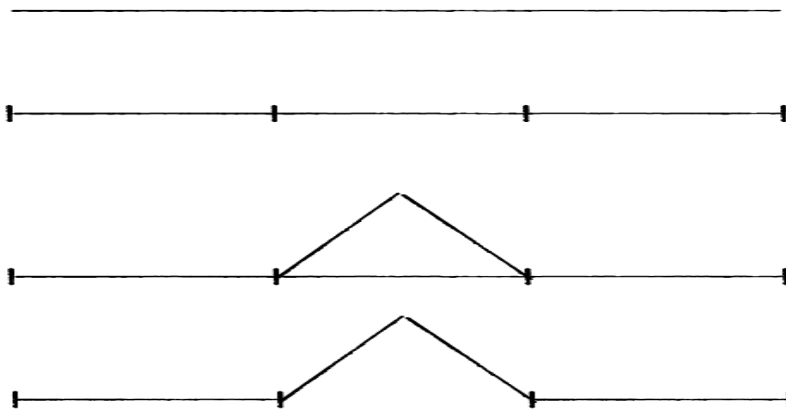
άκυρη cantor (float x, y float, float len) {
if (len >= 1) {      Στάση στο 1 pixel!
γραμμή (x, y, x + len, y)?
y += 20?
ψάλτης (x, y, len / 3)?
ψάλτης (x + len * 2.3, y, len / 3)?
}
}
}

```

5.4. Η καμπύλη Koch και η Τεχνική ArrayList

Η τεχνική ArrayList είναι ένας άλλος τρόπος με τον οποίο μπορεί να εφαρμοστεί αναδρομή που θα μας επιτρέψει να δημιουργήσουμε όχι μόνο ένα φράκταλ μοτίβο αλλά να παρακολουθούμε όλα τα επιμέρους τμήματα της, ως αντικείμενα. Για να αποδείξουμε αυτή την τεχνική θα βασιστούμε σε ένα άλλο διάσημο φράκταλ μοτίβο που ανακαλύφθηκε το 1904 από τον Σουηδό μαθηματικό Helge Von Koch. Αξιοσημείωτο είναι ότι ξεκινά με τον ίδιο τρόπο, όπως και το σύνολο του Cantor, με μια ενιαία γραμμή.

1. Άρχισε με μια γραμμή
2. Χώρισε τη γραμμή σε τρία ίσα μέρη
3. Σχεδίασε ένα ισόπλευρο τρίγωνο με βάση το μεσαίο ευθύγραμμο τμήμα του βήματος
4. Αφαίρεσαι το ευθύγραμμο τμήμα της βάσης του βήματος 3.
5. Επανάλαβε τα βήματα 2 και 4 για τις υπόλοιπες γραμμές ξανά και ξανά και ξανά.



Εικόνα 5.4

(The nature of code, P:367)

Το αποτέλεσμα μοιάζει με:



Εικόνα 5.4.1

(The nature of code, P:367)

Το 'Τέρας' Curve

Η καμπύλη του Koch όπως και άλλα φράκταλ συχνά αποκαλούνται «μαθηματικά τέρατα» και αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι εφαρμόζουν τον αναδρομικό ορισμό άπειρες φορές. Εάν το μήκος της αρχικής γραμμής εκκίνησης είναι η πρώτη επανάληψη της καμπύλης Koch, θα αποδώσει μια γραμμή μήκους τεσσάρων τρίτα(κάθε τμήμα είναι το ένα τρίτο του μήκους της γραμμής εκκίνησης). Εάν το κάνουμε ξανά θα έχουμε μήκος δεκαέξι ένατα. Όταν επαναλαμβάνουμε προς το άπειρο, το μήκος της καμπύλης Koch τείνει στο άπειρο. Η καμπύλη Koch είναι μια σειρά από συνδεδεμένες γραμμές και έτσι θα λέμε κάθε τμήμα ως «KochLine». Κάθε αντικείμενο KochLine έχει ένα σημείο εκκίνησης ("a") και ένα τελικό σημείο ("b"). Αυτά τα σημεία είναι PVector αντικείμενα.

```
Κατηγορία KochLine {  
  
  PVector ξεκίνησε? Μια γραμμή ανάμεσα σε δύο σημεία: αρχή και τέλος  
  Τέλος PVector?  
  
  KochLine (PVector α, PVector β) {  
    start = a πάρει ().?  
    . τέλος = b πάρει ()?  
  }  
  
  άκυρη οθόνη () {  
    χτύπημα(0)?  
    γραμμή (άρχισε x, y άρχισε, τέλος x, y τέλος...)? Τραβήξτε τη γραμμή από PVector  
    μόλις ξεκινήσει μέχρι το τέλος  
  
  }  
}
```

Θα χρειαστούμε μια δομή δεδομένων για να παρακολουθήσουμε ότι θα γίνουν τελικά πολλά αντικείμενα KochLine και ένα ArrayList και έτσι θα έχουμε:

```
ArrayList <KochLine> γραμμές?
```

Στο setup() θέλουμε να δημιουργήσουμε το ArrayList και προσθέτουμε το τμήμα της πρώτης γραμμής σε αυτό, μια γραμμή που εκτείνεται από το 0 έως το πλάτος του σκίτσου.

```

void setup () {
  μέγεθος (600, 300)?
  γραμμές = νέα ArrayList <KochLine> ()? Δημιούργησε το ArrayList.

  PVector start = νέα PVector (0, 200)? Αριστερή πλευρά του παραθύρου

  PVector τέλος = νέα PVector (πλάτος, 200)? Δεξιά πλευρά του παραθύρου

  .γραμμές προσθήκη (νέα KochLine (έναρξη, λήξη))? Το πρώτο αντικείμενο
  KochLine
}

```

Στη συνέχεια όταν σύρουμε(), όλα τα αντικείμενα KochLine μπορούν να εμφανιστούν σε ένα βρόχο:

```

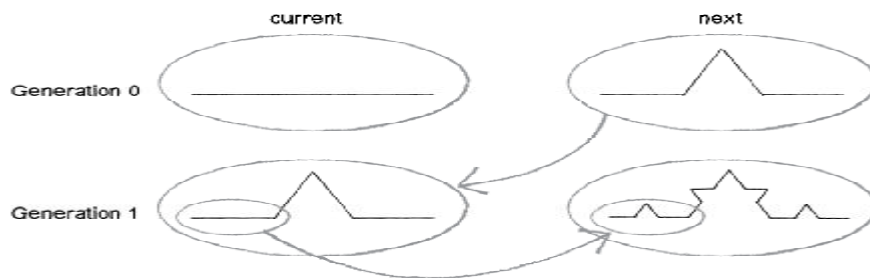
void draw () {
  υπόβαθρο (255)?
  για (KochLine l: γραμμές) {
    l οθόνη ().?
  }
}

```

Άρα μέχρι τώρα έχουμε:

- KochLine κλάση: A class για να παρακολουθούμε μια γραμμή από το σημείο A στο σημείο B.
- ArrayList: Μια λίστα όλων των αντικειμένων KochLine.

Στο σημείο αυτό θα εφαρμόσουμε μια τεχνική που στηρίζεται στο κομμάτι των δυο γενεών: την τρέχουσα και την επόμενη. Έχουμε ένα ArrayList που δημιουργούνται από την εφαρμογή των κανόνων Koch. Για κάθε αντικείμενο KochLine στην τρέχουσα ArrayList, τα τέσσερα νέα αντικείμενα KochLine προσθέτονται στην επόμενη ArrayList. Όταν τελειώσουμε, το επόμενο ArrayList γίνεται η τρέχουσα. Παρακολουθεί το τρέχον σύνολο KochLine αντικειμένων (κατά την έναρξη του προγράμματος υπάρχει μόνο ένα). Θα χρειαστούμε ένα δεύτερο ArrayList, που θα το ονομάσουμε δεύτερο, όπου θα τοποθετούμε όλα τα νέα αντικείμενα KochLine που δημιουργούνται από την εφαρμογή των κανόνων Koch. Για κάθε αντικείμενο KochLine στην τρέχουσα ArrayList, τα τέσσερα νέα αντικείμενα KochLine προσθέτονται στην επόμενη ArrayList. Όταν τελειώσουμε το επόμενο ArrayList γίνεται η τρέχουσα.

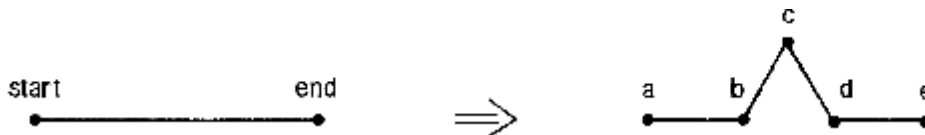


Σχ.5.4.2

(The nature of code, P:369)

```
void παράγου () {
    ArrayList επόμενη = νέα ArrayList <KochLine> ()? Δημιουργήστε το επόμενο
    ArrayList ...
    για (KochLine l: γραμμές) {... Για κάθε τρέχουσα γραμμή.
        Προσθέστε τέσσερις νέες γραμμές. (Θα πρέπει να καταλάβω πώς να υπολογίσει τις
        θέσεις του αυτές τις γραμμές!)
        . επόμενη πρόσθεσε (νέα KochLine (???, ???))?
        . επόμενη πρόσθεσε (νέα KochLine (???, ???))?
        . επόμενη πρόσθεσε (νέα KochLine (???, ???))?
        . επόμενη πρόσθεσε (νέα KochLine (???, ???))?
    }
    γραμμές = επόμενη? Η νέα ArrayList είναι τώρα αυτό που μας ενδιαφέρει!
}
```

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να καθορίσουμε πόσους πόντους θα πρέπει να υπολογίσουμε για κάθε αντικείμενο KochLine.



Εικόνα 5.4.3

(The nature of code, P:370)

Όπως μπορούμε να δούμε από το παραπάνω σχήμα χρειαζόμαστε πέντε σημεία (a, b, c, d και e) για να δημιουργήσει τα νέα αντικείμενα KochLine και να κάνουν τα νέα τμήματα της γραμμής (ab, cb, και de).

```
. επόμενη πρόσθεσε (νέα KochLine (a, b))?
. επόμενη πρόσθεσε (νέα KochLine (b, c))?
. επόμενη πρόσθεσε (νέα KochLine (c, d))?
. επόμενη πρόσθεσε (νέα KochLine (d, e))?
```

Δεδομένου ότι έχουμε ένα αντικείμενο KochLine, θα ζητήσει να υπολογίσει όλα αυτά τα σημεία για μας.

```

void παράγουν () {
ArrayList επόμενη = νέα ArrayList <KochLine> ()?
για (KochLine l: γραμμές) {

PVector a = l.Kocha ().? Το αντικείμενο KochLine έχει πέντε λειτουργίες, καθένα από
τα οποία επιστρέφουν ένα PVector σύμφωνα με τους κανόνες Koch.
. PVector kochB b = l ()?
PVector c = l.kochC ().?
PVector d = l.kochD ().?
PVector e = l.kochE ().?

. επόμενη πρόσθεσε (νέα KochLine (α, β))?
. επόμενη πρόσθεσε (νέα KochLine (b, c))?
. επόμενη πρόσθεσε (νέα KochLine (c, d))?
. επόμενη πρόσθεσε (νέα KochLine (d, e))?
}

γραμμές = επόμενη?
}

```

Τώρα το μόνο που χρειάζεται για να γράψει πέντε νέες λειτουργίες στην κατηγορία KochLine για το καθένα είναι η επιστροφή ενός PVector. Όσον αφορά τα σημεία Kocha() και Koche(), είναι απλά σημεία έναρξης και λήξης της αρχικής γραμμής.

```

PVector Kocha () {
επιστροφή αρχή παίρνει ().? Σημειώστε τη χρήση του get (), η οποία επιστρέφει ένα
αντίγραφο του PVector, αλλά εδώ θα χρειαστεί μια νέα PVector στην περίπτωση που
θέλουμε τα τμήματα να κινούνται ανεξάρτητα το ένα από το άλλο.

}

PVector kochE () {
τέλος επιστροφή παίρνει ().?
}

```

Ας περάσουμε στα σημεία B και D. Το B είναι το ένα τρίτο από το δρόμο κατά μήκος της γραμμής και το D είναι τα δυο τρίτα. Εδώ μπορούμε να κάνουμε μια PVector που δείχνει από την αρχή μέχρι το τέλος και να συρρικνωθεί στο ένα τρίτο του μήκους για την B και τα δυο τρίτα του μήκους για το D για να βρούμε αυτά τα σημεία.

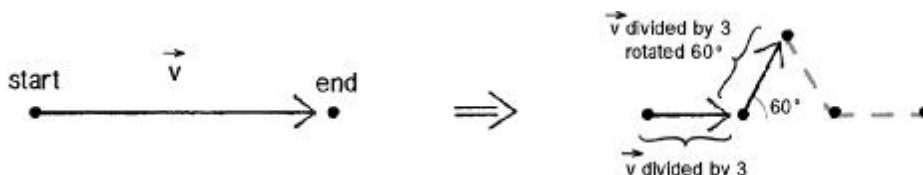


Εικόνα 5.4.4

(The nature of code, P:371)

```
PVector kochB () {  
  . PVector v = PVector sub (τέλος, να αρχίσει)? PVector από την αρχή μέχρι το  
  τέλος  
  
  v. div (3)? Το ένα τρίτο του μήκους  
  v προσθέσει (εκκίνηση).? Πρόσθεσε ότι PVector στην αρχή της γραμμής για να  
  βρείτε το νέο σημείο.  
  επιστροφή v?  
}  
  
PVector kochD () {  
  . PVector v = PVector sub (τέλος, να αρχίσει)?  
  
  v. mult (2 / 3.0)? Το ίδιο πράγμα εδώ, μόνο που χρειαζόμαστε για να  
  προχωρήσουμε τα δύο τρίτα κατά μήκος της γραμμής, αντί του ενός τρίτου.  
  
  v προσθέσει (εκκίνηση).?  
  επιστροφή v?  
}
```

Το τελευταίο σημείο C είναι και το πιο δύσκολο να βρεθεί. Ωστόσο οι γωνίες ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι 60 μοίρες και αυτό το κάνει πιο εύκολο. Παρ'όλα αυτά θα πρέπει να είμαστε στο σημείο C.

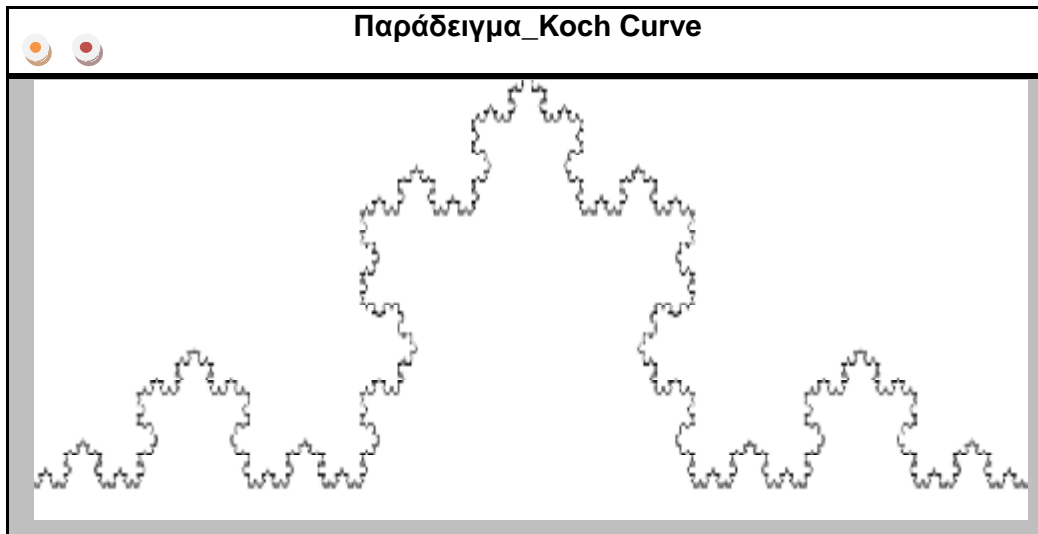


Εικόνα 5.4.5

(The nature of code, P:372)

```
PVector kochC () {  
  PVector a = αρχισε να πάρεις ().? Ξεκίνησε από την αρχή  
  
  . PVector v = PVector sub (τέλος, να αρχίσει)?  
  v. div (3)? Μετακίνηση του 1/3 της διαδρομής προς το σημείο B  
  α. προσθέστε (v)?  
  
  v. περιστροφή (- ακτίνια (60))? Περίστρεψε "πάνω" τη γραμμή 60 μοίρες  
  α. προσθέστε (v)? Μετακίνηση κατά μήκος αυτού του φορέα στο σημείο C.  
  
  επέστρεψε ένα?
```

Καλώντας όλα αυτά θα πάρουμε το παρακάτω αποτέλεσμα:



Εικόνα 5.4.6

(The nature of code, P:373)

```
ArrayList <KochLine> γραμμές?
```

```
void setup () {  
  μέγεθος (600, 300)?  
  υπόβαθρο (255)?  
  γραμμές = νέα ArrayList <KochLine> ()?  
  PVector start = νέα PVector (0, 200)?  
  PVector τέλος = νέα PVector (πλάτος, 200)?  
  . γραμμές πρόσθεσε (νέα KochLine (έναρξη, λήξη))?  
  
  for (int i = 0? i <5? i ++ ) { Αυθαίρετα ισχύουν οι Koch κανόνες πέντε φορές  
    παράγουν ()?  
  }  
}
```

5.5.Γενικεύοντας τη χρησιμότητα των ΣΕΣ (Συστήματα Επαναλαμβανομένων Συναρτήσεων):Κωδικοποίηση εικόνων.

Είναι όλες αυτές οι εικόνες για τις οποίες μιλήσαμε φράκταλ; Εφόσον κατασκευάζονται μέσω ενός ΣΕΣ, ασφαλώς ναι! Το κύριο χαρακτηριστικό κάθε ΣΕΣ είναι η αυτοομοιότητα υπό αλλαγή κλίμακας, ιδιότητα απαραίτητη για να ονομασθεί ένα σχήμα φράκταλ. Και έχουν όλα τα φυσικά αντικείμενα που θέλουμε να σχεδιάσουμε φράκταλ δομή; Όχι βέβαια. Υπάρχουν όμως πολλά που περιέχουν το στοιχείο της αυτοομοιότητας σε μεγάλο βαθμό, ώστε να είναι αποδοτική η προσέγγισή τους μέσω των μετασχηματισμών ενός ΣΕΣ.

Το θέμα είναι να μπορούμε να ανιχνεύσουμε την αυτοομοιότητα μιας εικόνας, ώστε να την χρησιμοποιήσουμε για να σχεδιάσουμε την εικόνα μέσω των επαναλήψεων ενός συγκεκριμένου προτύπου. Το αντίστροφο αυτό πρόβλημα του προσδιορισμού των

μετασχηματισμών που κωδικοποιούν με επιτυχία μια δεδομένη εικόνα δεν είναι πάντα εύκολο. Τα παραδείγματα που περιγράψαμε πιο πάνω του δέντρου και της καμπύλης του Koch, είχαν μια προφανή φράκταλ δομή αυτοομοιότητας. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο και με την εικόνα ενός προσώπου ή ενός τοπίου.

Στις περιπτώσεις αυτές πρέπει να βρούμε τρόπους να διαμερίσουμε την εικόνα σε πολλά μικρά υποτομήματα, ώστε να υπάρχει κάποιας μορφής αυτοομοιότητα στο σχήμα των συνόρων ανάμεσα σε περιοχές με διαφορετική φωτεινότητα. Ούτε το τελικό αποτέλεσμα της κωδικοποιημένης κατασκευής θα περιέχει όλες τις λεπτομέρειες της εικόνας με την οποία ξεκινήσαμε. Αν όμως κάνουμε κάποιες παραχωρήσεις ως προς την ακρίβεια της αναπαράστασης μπορούμε να επιτύχουμε με ΣΕΣ πολύ πιο ικανοποιητική συμπίεση εικόνας από ότι με άλλες μεθόδους.¹

¹ Ο Θαυμαστός κόσμος των Fractal.PP:356-382.

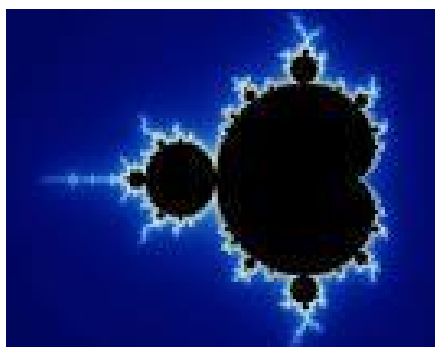
Κεφάλαιο 6: Εφαρμογές των Fractals στα γραφικά Η/Υ

Είναι σίγουρο ότι ο καθένας μας έχει θαυμάσει κάποιες εικόνες fractals από αυτές που κυκλοφορούν κατά χιλιάδες σε ημερολόγια, περιοδικά, ψυχεδελικά σχέδια κλπ. Η χρήση τους επεκτάθηκε από τη στιγμή που μπήκαν εδώ και είκοσι χρόνια τα computers, αφού είναι σύνθετα σχέδια που δημιουργούνται με τη βοήθεια πολύπλοκων υπολογισμών. Αλλά ενώ οι εικόνες είναι πολύπλοκες, το πρόγραμμα (software) που απαιτείται δεν είναι, αφού η σχεδίαση των εικόνων βασίζεται στην επανάληψη ενός μοτίβου, που σχεδιάζεται με τη βοήθεια μιας συνάρτησης.

Πολλοί άνθρωποι τα βλέπουν δίχως να γνωρίζουν τι είναι αυτές οι φανταστικές έγχρωμες εικόνες και πως δημιουργούνται. Μερικοί έχουν ακούσει πως υπάρχει κάποια σύνδεσή τους με ορισμένα φυσικά αντικείμενα δίχως να καταλαβαίνουν ποια σύνδεση εννοείται. Η γεωμετρία fractal με τις έννοιες της αυτοομοιότητας και της μη ακέραιας διάστασης έχει εφαρμοστεί με αυξανόμενη συχνότητα στην στατιστική μηχανική, σε φυσικά συστήματα που δείχνουν φαινομενικά τυχαία χαρακτηριστικά.

Η γεωμετρία fractal συνέβαλε κατά πολύ στα γραφικά με ηλεκτρονικό υπολογιστή, όπου με αλγόριθμους fractal έχουν σχεδιαστεί σχήματα πολύπλοκων, εξαιρετικά ακανόνιστων φυσικών αντικειμένων, όπως είναι μορφολογικά ανώμαλα όρη και περίπλοκα συστήματα κλάδων δέντρων. Επιπλέον με τη χρήση των fractal αναπτύχθηκε και ένας τρόπος για συμπίεση εικόνων που βασίζεται στη χρήση της αυτοομοιότητας που εμφανίζεται πολλές φορές στις ψηφιακές εικόνες.

6.1. Το σύνολο του Mandelbrot και η ανάλυσή του στα γραφικά Η/Υ



Εικόνα 6.1

(Ο θαυμαστός κόσμος των Fractals, Μπούντης. Α., P:31)

Η ύπαρξη της σχέσης μεταξύ χάους και της Γεωμετρίας των Fractals γίνεται αντιληπτή αν εξετάσουμε το σύνολο του Mandelbrot¹. Θεωρείται ως το πολυπλοκότερο και το πιο εντυπωσιακό σύνολο των μαθηματικών. Πρόκειται για ένα παράδειγμα τάξης που επικρατεί

¹ Fractal Geometry Mandelbrot Set.pdf

στο χάος. Το διάσημο πλέον σύνολο του είναι μια περιοχή ορίων. Είναι ένα σύνορο, ανάμεσα στο σκοτεινό εσωτερικό του που αντιπροσωπεύει το 0 και στο γαλάζιο εξωτερικό του που είναι το άπειρο.

Εκεί στο όριο διαδραματίζεται ένας ολόκληρος κόσμος με στροβίλους, πλοκάμια, μαύρες τρύπες και μικρότερα σύνολα Mandelbrot με τα ίδια ακριβώς χαρακτηριστικά. Παρά όμως το πολύπλοκο σχήμα του, ο αλγόριθμος που το παράγει είναι πάρα πολύ απλός. Πώς παράγεται αυτή η άπειρη πολυπλοκότητα; Με έναν απλό τρόπο. Φανταστείτε το καρτεσιανό επίπεδο ή καλύτερα το επίπεδο των μιγαδικών αριθμών. Είναι ακριβώς το ίδιο. Κάθε σημείο του επιπέδου είναι ένας μιγαδικός αριθμός Z_0 .

Εφαρμόζουμε έναν απλό κανόνα μετασχηματισμού, με βάση τον αναδρομικό τύπο της ακολουθίας:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \text{ με } z_n, c \in \mathbb{C}$$

Παράγεται έτσι μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Για την δημιουργία μιας εικόνας του συνόλου Mandelbrot η αφετηρία z_0 τίθεται στο 0, αντιστοιχίζομενη έτσι στην αρχή(0,0) του μιγαδικού επιπέδου. Για κάθε τιμή του μιγαδικού αριθμού C εξετάζουμε την αντίστοιχη ακολουθία που δημιουργείται από τον παραπάνω τύπο ως προς την σύγκλιση. Αν η ακολουθία συγκλίνει και έχει σχέση:

$$|z_n| \leq 2 \text{ Για κάθε } n \geq 0$$

Τότε το σημείο του επιπέδου που αντιστοιχεί στο μιγαδικό αριθμό C βρίσκεται μέσα στο σύνολο Mandelbrot και το βάφουμε με μαύρο χρώμα. Αν όμως η ακολουθία αποκλίνει ή ισχύει η σχέση:

$$|z_n| > 2 \text{ Για κάποιο } n \in \mathbb{N}$$

Τότε το σημείο που αντιστοιχεί στον μιγαδικό C είναι εκτός του συνόλου Mandelbrot και το βάφουμε μπλε χρώμα ή το αφήνουμε λευκό.

Αν για παράδειγμα στον παραπάνω αναδρομικό τύπο

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \text{ με } z_n, c \in \mathbb{C}$$

Πάρουμε $z_0 = 0$ και $c = 1$, τότε η ακολουθία που παράγεται είναι:

0, 1, 2, 5, 26,κ.λ.π, η οποία δεν είναι φραγμένη και τείνει στο άπειρο.

Άρα το σημείο (1,0) ως εικόνα του μιγαδικού $C = 1$ δεν ανήκει στο σύνολο του Mandelbrot.

Αν όμως πάρουμε όπου $Z_0 = 0$ και $C = i$, τότε η ακολουθία που δημιουργείται από την αναδρομική σχέση είναι:

0, i , $(-1 + i)$, $-i$, $(-1 + i)$, $-i$,κ.λ.π. είναι φραγμένη και μάλιστα ισχύει η σχέση:

$$|z_n| \leq 2 \text{ Για κάθε } n \geq 0$$

Άρα το σημείο (0,1) που είναι η εικόνα του μιγαδικού $C = i$ ανήκει στο σύνολο του Mandelbrot.

Δηλαδή το σύνολο του Mandelbrot αναφέρεται στον χώρο των εικόνων των παραμέτρων C της αναδρομικής σχέσης:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \text{ με } z_n, \text{ με } c \in \mathbb{C}$$

Και περιέχεται στον κλειστό κυκλικό δίσκο με κέντρο την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και ακτίνα ίση με 2 μονάδες.

Υπάρχει όμως και η περίπτωση η ακολουθία των αριθμών που προκύπτει μετά την επιλογή του c , να έχει κάποιους αρχικούς όρους της μέσα στον κλειστό κυκλικό δίσκο κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας 2 και οι υπόλοιποι να απομακρύνονται έξω από τον δίσκο προς το άπειρο.

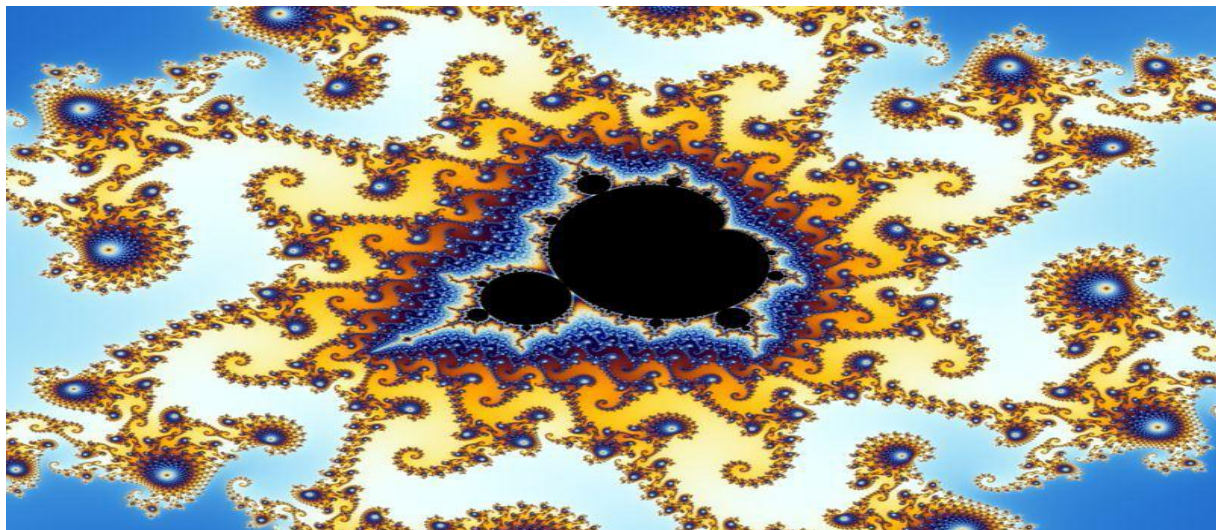
Στην περίπτωση αυτή μετράμε πόσοι όροι της ακολουθίας είναι μέσα στον παραπάνω κυκλικό δίσκο. Ανάλογα με το πόσοι είναι βάφουμε το αρχικό σημείο C με ένα μοναδικό χρώμα.

Με τη βοήθεια και της εξέλιξης των γραφικών στους Η/Υ χρωματίζουμε την εικόνα του C στο μιγαδικό επίπεδο με ένα χρώμα ανάλογα με την ταχύτητα που «ξεφεύγει» από την αρχή $C=0$. Φανταστείτε ότι όλα τα σημεία στο επίπεδο «έλκονται» από το άπειρο και από το σύνολο του Mandelbrot. Έτσι, καταλαβαίνουμε γιατί:

1. Σημεία μακριά από το σύνολο κινούνται ταχύτερα προς το άπειρο.
2. Σημεία κοντά στο σύνολο κινούνται αργά προς το άπειρο.
3. Σημεία εντός του συνόλου δεν ξεφεύγουν ποτέ.

Τα διαφορετικά χρώματα που πλαισιώνουν το σύνολο του Mandelbrot αντιστοιχούν στις διαφορετικές ταχύτητες «διαφυγής» των ακολουθιών που αποκλίνουν προς το άπειρο, χρησιμοποιώντας έναν αλγόριθμο του χρόνου διαφυγής. Περιοχές με τον ίδιο χρόνο «διαφυγής» έχουν το ίδιο χρώμα. Αυτό δημιουργεί τις ομόκεντρες μορφές, που χρωματίζονται σύμφωνα με την ταχύτητα διαφυγών.

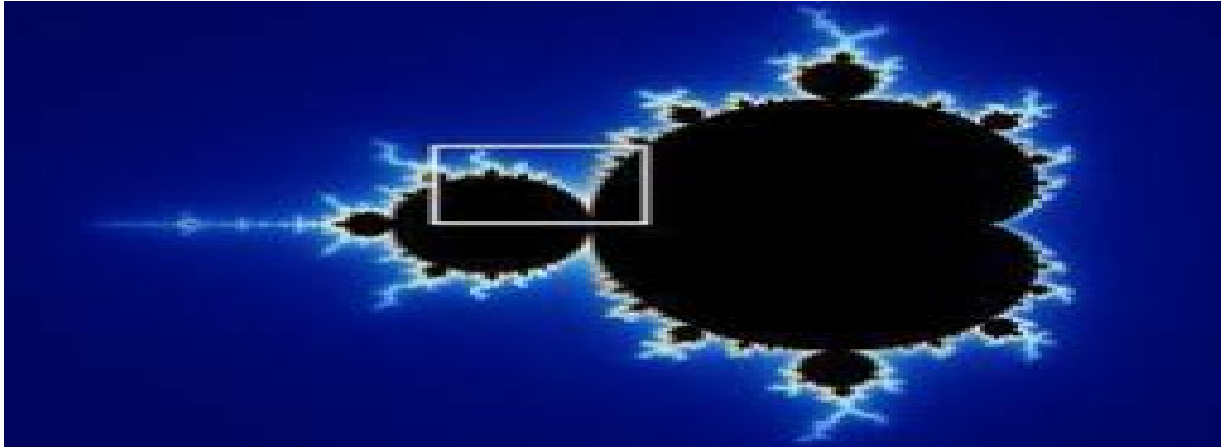
Έτσι δημιουργούμε το τελικό αποτέλεσμα της ζωγραφικής μας αν εξαντλήσουμε όλα τα σημεία του επιπέδου βάφοντας τα με τον παραπάνω κανόνα, δημιουργείται το σύνολο του Mandelbrot.



Εικόνα 6.2

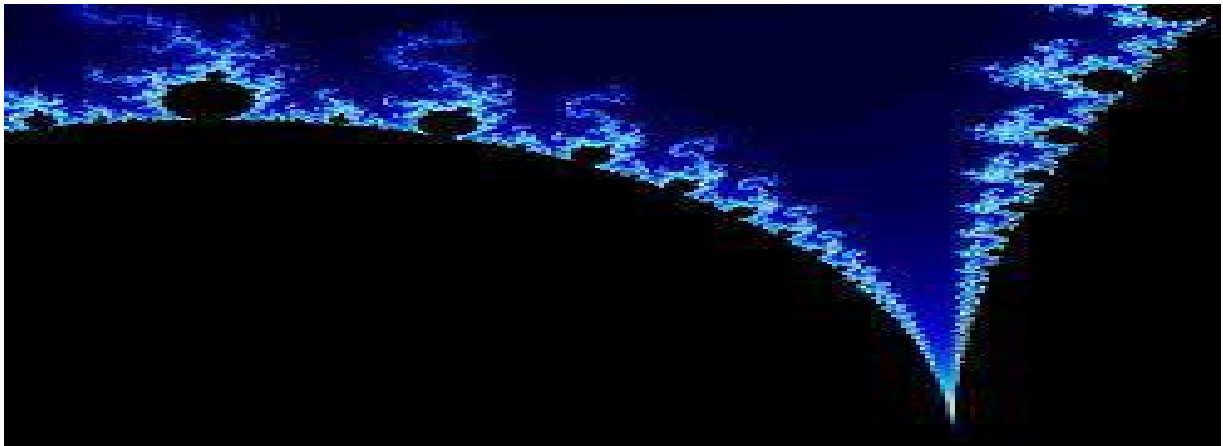
(www.e-steki.gr)

Διάφορες εικόνες ζουμ του Mandelbrot set είναι οι παρακάτω:



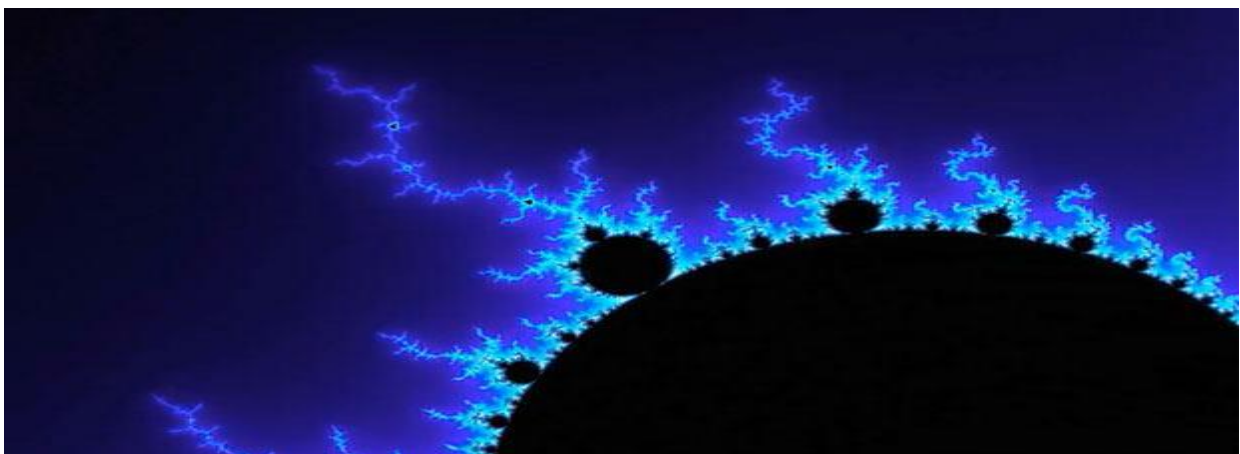
Εικόνα 6.3

(Fractal Geometry Mandelbrot set.pdf)



Εικόνα 6.4

(Fractal Geometry Mandelbrot set.pdf)



Εικόνα 6.5

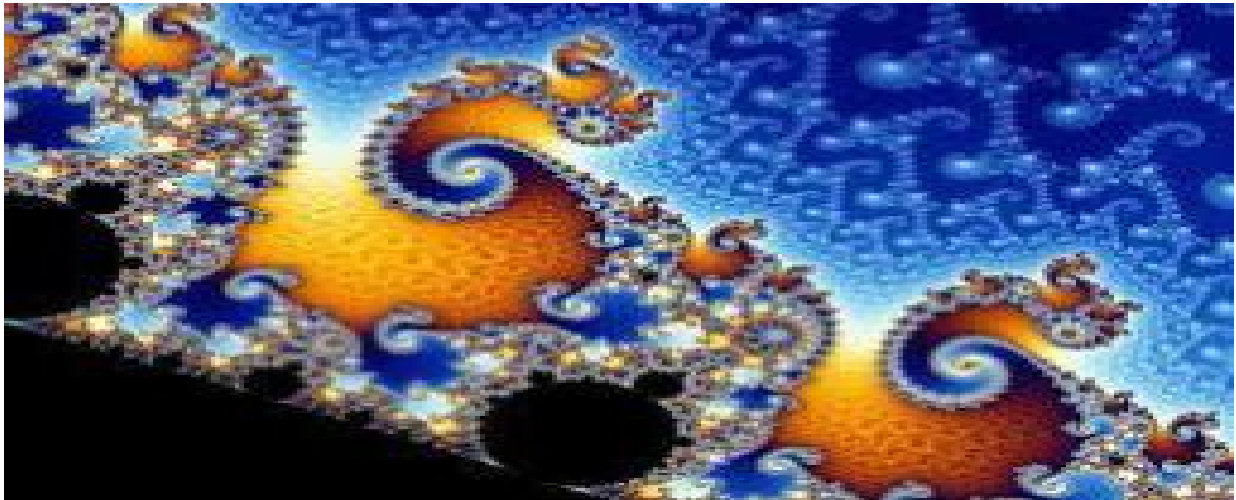
(Fractal Geometry Mandelbrot set.pdf)

Ιδιότητες του συνόλου Mandelbrot Set

Αυστηρό μαθηματικό ορισμό για το σύνολο του Mandelbrot αποφεύγουν να δίνουν οι επιστήμονες και αντί αυτού προσδιορίζουν τις ιδιότητες που χαρακτηρίζουν το σύνολο Mandelbrot :

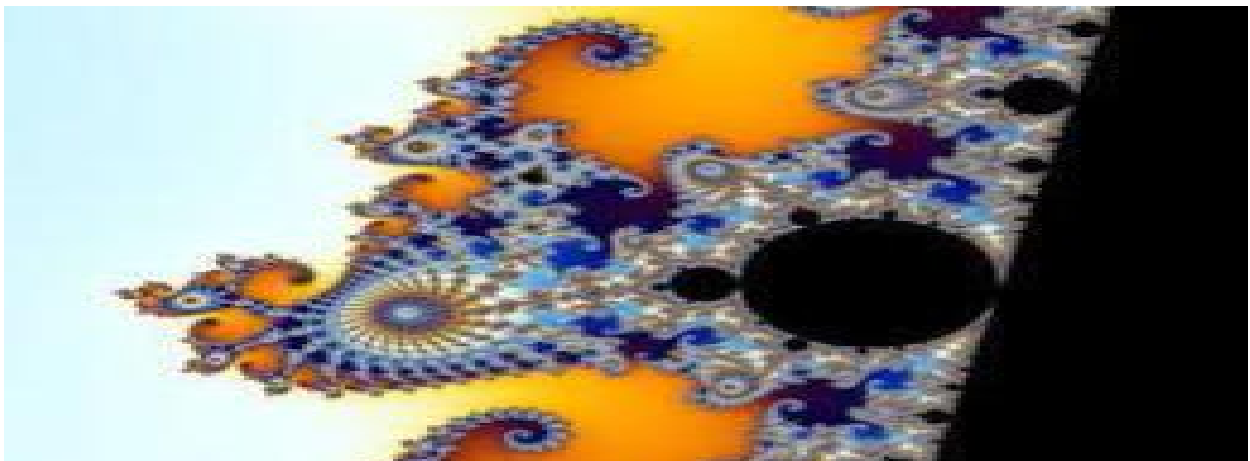
1. Δεν είναι κενό σύνολο.
2. Είναι συνεκτικό. Δηλαδή δεν μπορεί να χωριστεί σε δύο αποκομμένα μέρη.
3. Είναι συμπαγές. Δηλαδή κλειστό και φραγμένο σύνολο.
4. Είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα $x'x$, αφού για κάθε μιγαδικό c που ανήκει στο σύνολο ανήκει και ο συζυγής του επίσης¹.

Διάφορες εντυπωσιακές εικόνες του συνόλου Mandelbrot



Εικόνα 6.6

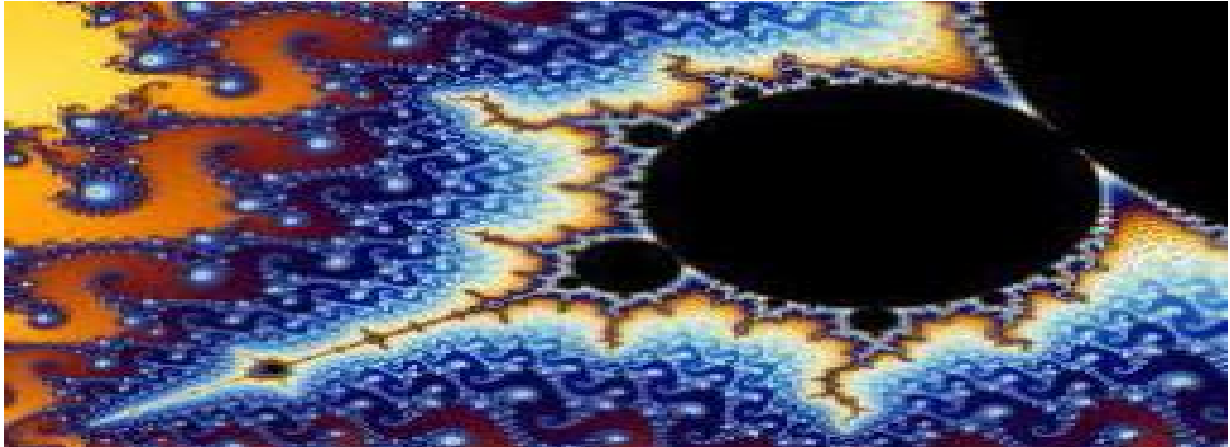
(Fractal Geometry Mandelbrot set.pdf)



Εικόνα 6.7

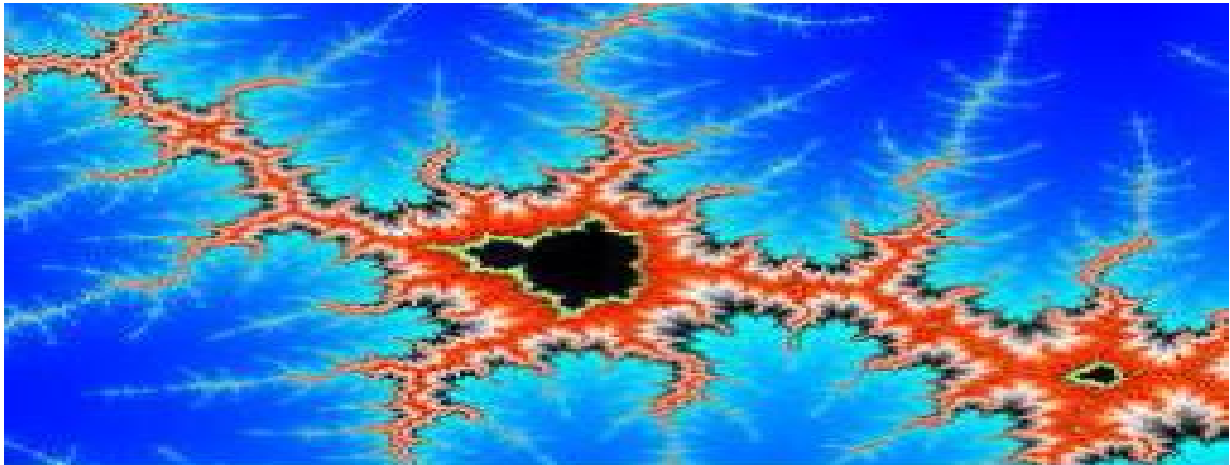
(Fractal Geometry Mandelbrot set.pdf)

¹Users.uoa.gr/idalla/fractals/JULIA_MANDELBROT.pdf,P.P:38-52.



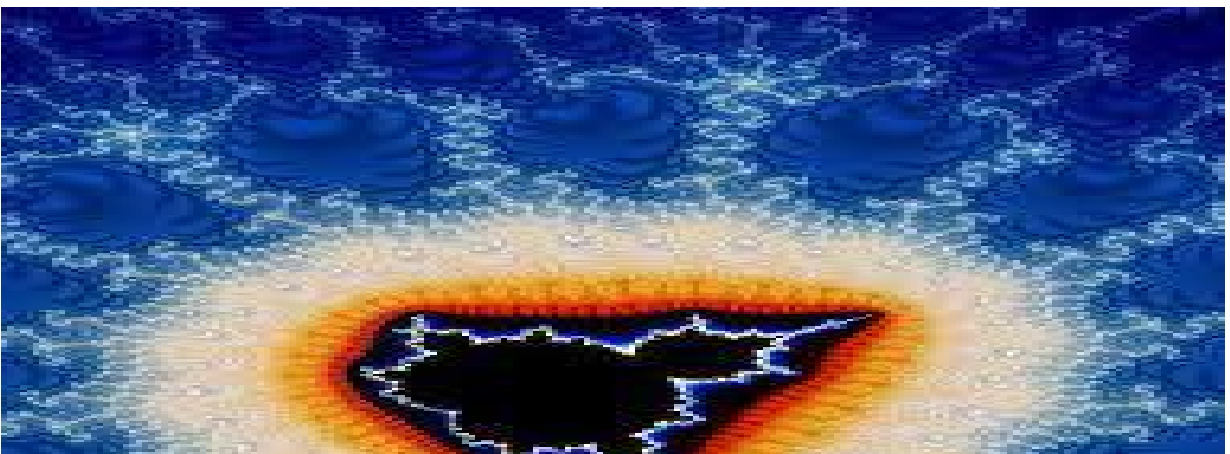
Εικόνα 6.8

(Fractal Geometry Mandelbrot set.pdf)



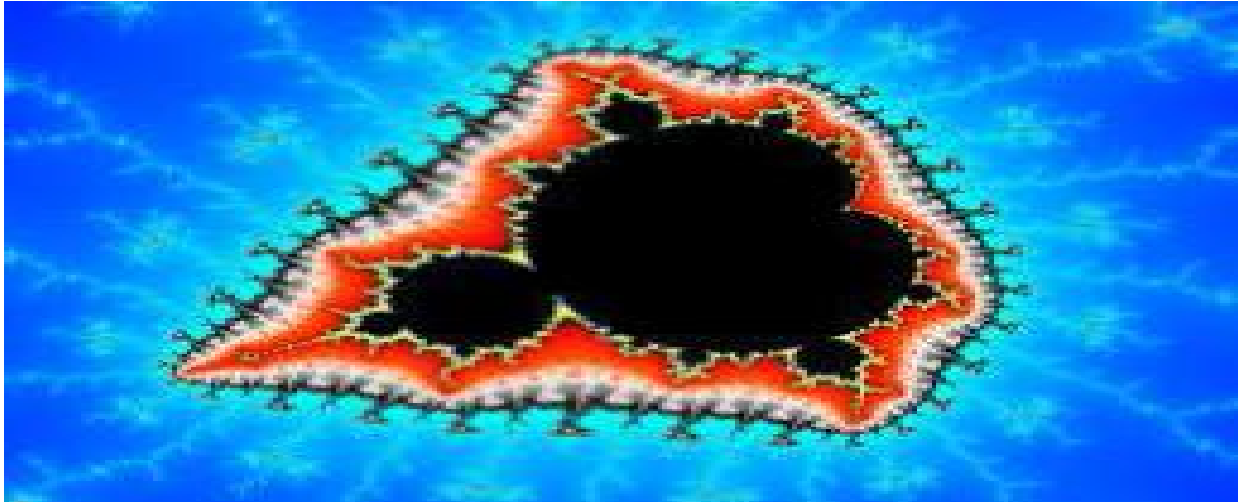
Εικόνα 6.9

(Fractal Geometry Mandelbrot set.pdf)



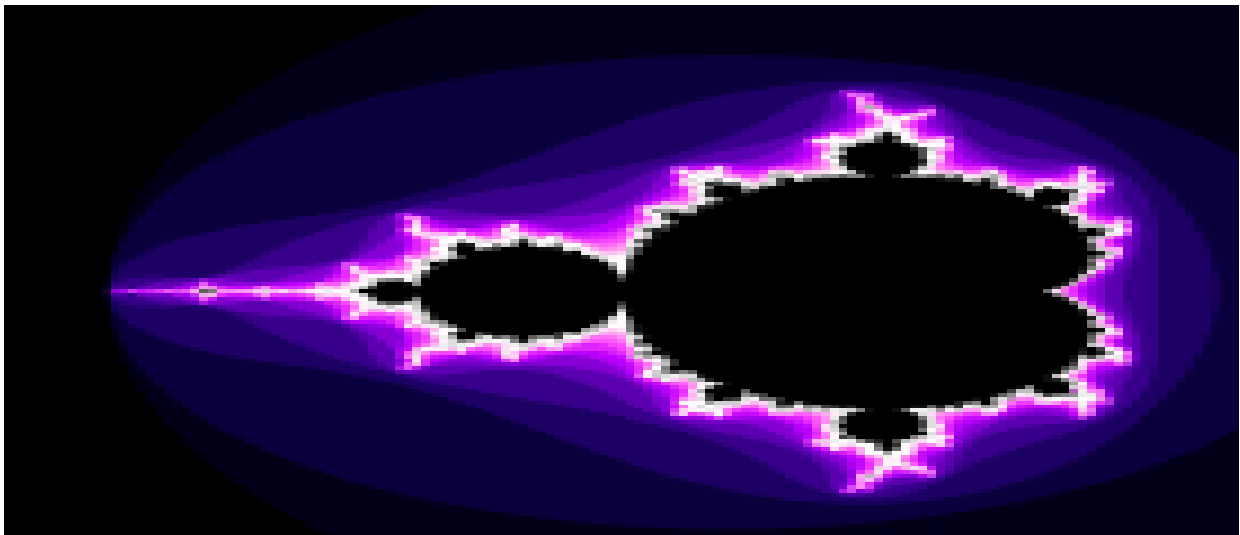
Εικόνα 6.10

(Fractal Geometry Mandelbrot set.pdf)



Εικόνα 6.11

(Fractal Geometry Mandelbrot set.pdf)



Εικόνα 6.12

(Fractal Geometry Mandelbrot set.pdf)

6.2. Το σύνολο Julia και η αλληλεξάρτησή του από το σύνολο του Mandelbrot σε εικόνες γραφικών

Τα σύνολα Julia πήραν το όνομά τους από τον Γάλλο Μαθηματικό Gaston Julia¹, ο οποίος τα μελέτησε το 1918. Το σύνολο Mandelbrot δημιουργήθηκε από τον Benoit Mandelbrot σαν δείκτης των συνόλων Julia. Κάθε σημείο στο μιγαδικό επίπεδο αντιστοιχεί σε ένα διαφορετικό σύνολο Julia. Τα σημεία μέσα στο σύνολο Mandelbrot αντιστοιχούν ακριβώς στα συνδεδεμένα σύνολα Julia και το εξωτερικό των σημείων αντιστοιχεί στα αποσυνδεδεμένα. Στο εσωτερικό τείνουν να μοιάζουν με απλές γεωμετρικές μορφές, ενώ στο εξωτερικό

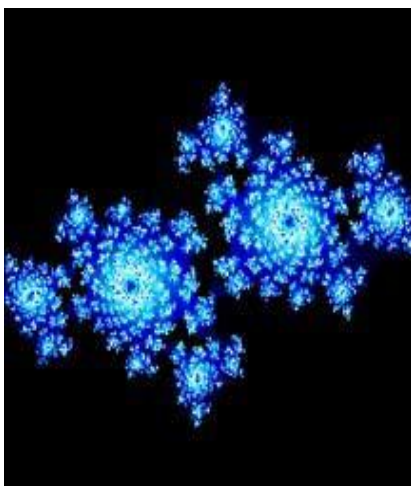
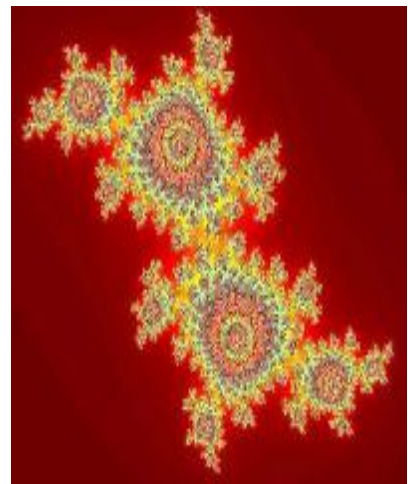
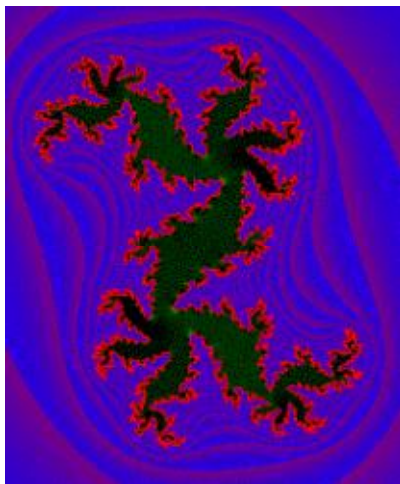
¹ Julia_Mandelbrot_Roumeliotou.pdf.

μοιάζουν με σκόνη που περιβάλλεται από σταγόνες χρώματος. Το σύνολο Mandelbrot επίσης περιέχει δομές που έντονα μοιάζουν με τα σύνολα Julia.

Στο εσωτερικό τείνουν να μοιάζουν με απλές γεωμετρικές μορφές, ενώ στο εξωτερικό μοιάζουν με σκόνη που περιβάλλεται από σταγόνες χρώματος. Το σύνολο Mandelbrot επίσης περιέχει δομές που έντονα μοιάζουν με τα σύνολα Julia. Πράγματι, για οποιαδήποτε τιμή του c , η περιοχή του συνόλου Mandelbrot κοντά στο c μοιάζει με το κέντρο του συνόλου Julia με παράμετρο c .

Τα σύνολα Julia είναι ένα παράδειγμα για το πώς μερικές απλές επαναληπτικές διαδικασίες μπορεί να οδηγήσουν σε τόσο περίπλοκα σύνολα και αποτελέσματα. Συναρτήσεις του μιγαδικού επιπέδου \mathbb{C} απλές όπως η $f(z) = z^2 + c$, με c σταθερά, μας δίνουν fractals με πραγματικά “εξωτική” εμφάνιση.

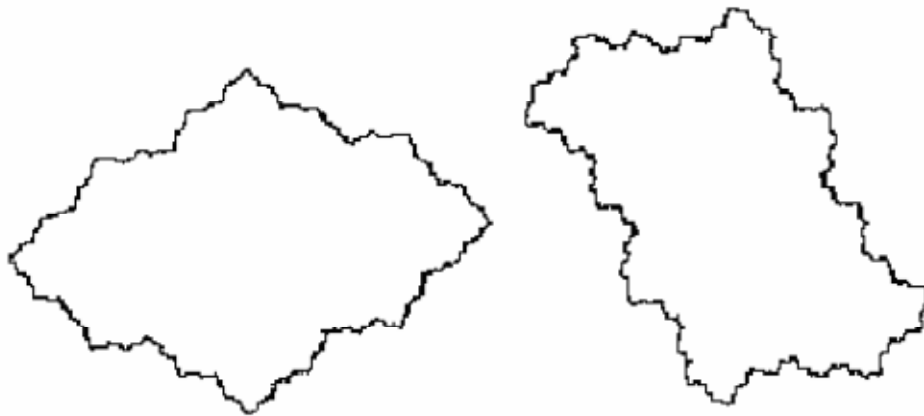
Μερικά παραδείγματα συνόλων Julia φαίνονται στο Σχ.6.2.1.



Εικόνα 6.2.1. Μερικά Σύνολα Julia

(Julia_Mandelbrot-Roumeliotou.pdf)

Θα δώσουμε μερικές εικόνες συνόλων Julia όταν $f_c(z) = z^2 + c$. Έχουμε ήδη δει την περίπτωση $c = 0$ όπου το J_0 είναι ο μοναδιαίος κύκλος. Αν $|c|$ είναι κοντά στο 0 περιμένουμε να μην έχει αλλάξει πολύ το J_c και να παραμένει μια απλή κλειστή καμπύλη. Πράγματι, αυτό συμβαίνει όταν η f_c έχει ένα σταθερό ελκυστικό σημείο. Δηλαδή, σε μία από τις ρίζες της $f_c(z) = z$ να έχουμε την $|f_c'(z)| < 1$, οπότε η άλλη θα είναι απωστικό σημείο. Ύστερα από πράξεις βλέπουμε ότι αυτό συμβαίνει όταν το c είναι μέσα στο καρδιοειδές με εξίσωση $Z = \frac{1}{2}e^{i-\theta} \left\{ 1 - \frac{1}{2}e^{i-\theta} \right\}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) που είναι το κύριο μέρος του συνόλου Mandelbrot. Για δύο συγκεκριμένες τιμές του c έχουμε :



Εικόνα 6.2.2. Τα σύνολα Julia της f_c για $c = -1/2 - i/10$ i αριστερά και $c = 1/2$ i δεξιά
(Julia_Mandelbrot-Roumeliotou.pdf)

Επιπλέον, μπορεί να δειχθεί ότι το σύνολο Julia για τέτοια c είναι μία απλή κλειστή πουθενά διαφορίσιμη καμπύλη. Τέτοιες καμπύλες μερικές φορές αναφέρονται σαν “σχεδόν κύκλοι”. Το $J(f_c)$ θα είναι μία fractal καμπύλη εάν $c > 0$ και αποδεικνύεται ότι για μικρά c , η διάστασή του δίνεται από την σχέση:

$$S = \dim_B J(f_c) = \dim_H J(f_c) = 1 + \left| \frac{c}{4} \right|^2 \log 2 + O(|c|^2).$$

Τώρα θεωρούμε την περίπτωση που η f_c έχει μία ελκυστική περιοδική τροχιά περιόδου 2, δηλαδή η f_c^2 έχει ελκυστικά σταθερά σημεία. Αυτό συμβαίνει όταν $|c + 1| < \frac{1}{4}$. Δηλαδή αν το c βρίσκεται στον μεγάλο κύκλο του M που συνορεύει με το καρδιοειδές στα αριστερά.

Επειδή η f_c^2 είναι ένα πολυώνυμο βαθμού 4, η f_c έχει δύο σταθερά σημεία και δύο σημεία περιόδου 2.

Τα σύνολα Julia $J(f_c)$ που είναι πολύ περίπλοκα και δύσκολα να εξεταστούν και να αναλυθούν μαθηματικά, είναι αυτά που αντιστοιχούν για τις τιμές c πάνω στο σύνορο του Mandelbrot.

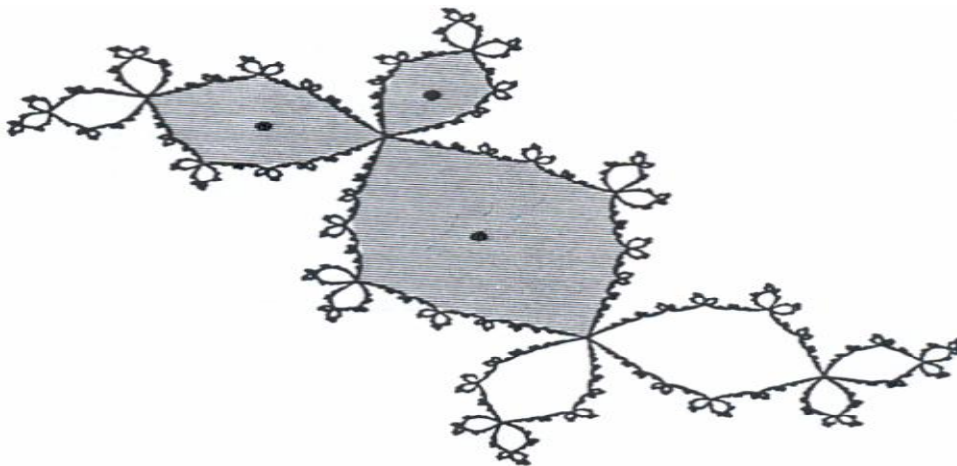
Διάφορες τιμές του c πάνω στο σύνολο Mandelbrot μας δίνουν διαφορετικά σύνολα Julia. Αν το $c \in M$ το σύνολο Julia είναι συνεκτικό, αν $c \notin M$ τότε το σύνολο Julia δεν έχει συνεκτική δομή, Σχ.6.2.3.



Εικόνα 6.2.3. Το σύνολο Julia J_c είναι ολικά μη συνεκτικό, για $c=0.11031-0,67037 i$

(Julia_Mandelbrot-Roumeliotou.pdf)

Ενώ αν π.χ. $c=-0.12 + 0.74i$ που είναι το κέντρο του μεγάλου εξογκώματος που βρίσκεται στην κορυφή του κυρίως καρδιοειδούς τότε παίρνουμε το Σχ.6.1.4.



Εικόνα 6.2.4. Η λεκάνη ενός ελκυστικού κύκλου περιόδου 3

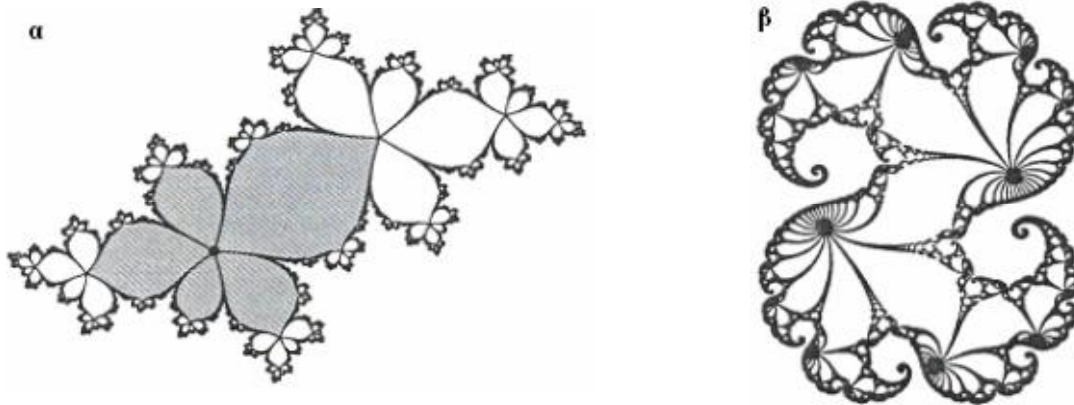
(Julia_Mandelbrot-Roumeliotou.pdf)

Εδώ το σύνολο Julia δεν είναι ένας απλός παραμορφωμένος κύκλος, αλλά αποτελείται από άπειρο αριθμό παραμορφωμένων κύκλων που επίσης αποτελούν ένα συνεκτικό σύνολο. Το εσωτερικό αυτού του συνόλου έλκεται, όχι μόνο από ένα σταθερό σημείο αλλά από έναν ελκυστικό κύκλο περιόδου 3, που φαίνονται στο Σχ.6.2.4 ως τρεις παχιές τελείες.

Επιπλέον ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το σύνορο του M . Μπορούμε να φανταστούμε ένα μονοπάτι στο c επίπεδο το οποίο ξεκινά μέσα στο M και τελειώνει έξω από το M . Καθώς το c μεταβάλλεται κατά μήκος αυτού του μονοπατιού, τα αντίστοιχα σύνολα Julia θα παρουσιάσουν σημαντικές ποιοτικές αλλαγές και όταν το c θα βγει έξω από το M , το σύνολο Julia θα διασπασθεί σε άπειρα σημεία.

Το κύριο καρδιοειδές περιλαμβάνει τις τιμές του c για τις οποίες το σύνολο Julia είναι λιγότερο ή περισσότερο ένας παραμορφωμένος κύκλος, που είναι το σύνορο της λεκάνης έλξης ενός μοναδικού σταθερού σημείου. Κάθε εξογκωμα στο M αντιστοιχεί σε έναν ελκυστή μιας ιδιαίτερης περιόδου. Οι τρεις κύκλοι δημιουργήθηκαν από μια τριακλάδωση του σταθερού σημείου όταν η παράμετρος c κινείται από το καρδιοειδές προς το εξογκωμα. Στο σημείο τομής του καρδιοειδούς με το εξογκωμα, το σύνολο Julia περιέχει το αδιάφορο

σημείο. Αυτή καλείται **παραβολική περίπτωση**. Παραδείγματα αυτής της κατάστασης είναι οι παρακάτω εικόνες του Σχ.6.2.5.



Εικόνα 6.2.5.α) Παραβολική λεκάνη έλξης γύρω από ένα σταθερό σημείο, β) Παραβολική περίπτωση όπου το σταθερό σημείο εξελίσσεται σε έναν ελκυστικό κύκλο περιόδου 20

(Julia_Mandelbrot-Roumeliotou.pdf)

Υπάρχουν όμως και άλλου είδους συνοριακά σημεία. Όταν π.χ. $c = -0.39054 - 0.58679i$ παίρνουμε το Σχ.6.1.6. Οι κύκλοι που φαίνονται γύρω από το αδιάφορο σταθερό σημείο καλούνται **αναλλοίωτοι κύκλοι**. Αν τώρα κάποιος πάρει ως αρχικό σημείο ένα σημείο πάνω σε αυτούς τους κύκλους, όλα τα επαναλαμβανόμενα σημεία θα είναι επίσης πάνω σε αυτόν. Μέσα στην περιοχή που φράσσεται από το σύνολο Julia η διαδικασία γίνεται ως εξής : πρώτα το σημείο πηδά από μικρότερο περιφερειακό εξόγκωμα σε μεγαλύτερο μέχρι να φτάσει μέσα στον δίσκο που περιέχει το σταθερό σημείο. Αυτός ο δίσκος καλείται **δίσκος Siegel**, από τον μαθηματικό Carl Ludwig Siegel.



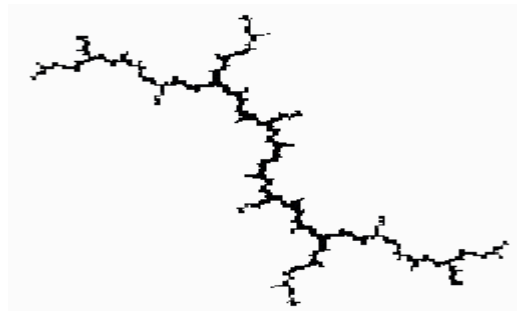
Εικόνα 6.2.6. Σημεία του πλήρους συνόλου Julia περιστρέφονται πάνω στον δίσκο Siegel γύρω από το σταθερό σημείο P

(Julia_Mandelbrot-Roumeliotou.pdf)

Όταν ένα σημείο φτάσει εκεί, απλά θα περιφέρεται γύρω από το σταθερό σημείο πάνω στους αναλλοίωτους κύκλους. Ανακεφαλαιώνοντας, έχουμε τις εξής τέσσερις τυπικές περιπτώσεις, που μπορούμε να πάρουμε από την διαδικασία $z \rightarrow z^2 + c$:

1. Αν c είναι στο εσωτερικό του κυρίως σώματος του συνόλου Mandelbrot, τότε το σύνολο Julia είναι ένας παραμορφωμένος κύκλος που περιέχει το σταθερό ελκυστικό σημείο.
2. Αν c είναι στο εσωτερικό ενός από τα εξογκώματα, τότε το σύνολο Julia αποτελείται από άπειρα πολλούς παραμορφωμένους κύκλους που περιβάλλουν τα σημεία ενός περιοδικού ελκυστή και τις αντίστροφες εικόνες του.
3. Αν c είναι το σημείο τομής του καρδιοειδούς και ενός εξογκώματος, έχουμε την παραβολική περίπτωση και το αδιάφορο σημείο ανήκει στο J_c .
4. Αν c είναι ένα οποιοδήποτε άλλο συνοριακό σημείο του καρδιοειδούς ή ενός εξογκώματος, έχουμε έναν ή περισσότερους δίσκους Siegel.

Επίσης, όπως μπορούμε να δούμε από το σχήμα του Mandelbrot, το M αποτελείται και από δομές που μοιάζουν με “τρίχες” ή “νήματα”. Αν πάρουμε μια τιμή του c πάνω σε αυτές, τότε παίρνουμε παρόμοιο σύνολο Julia όπως φαίνεται στο Σχ.6.1.7 για $c = i$ και το σύνολο Julia καλείται **δενδρίτης** (Σχ.6.1.7). Αυτό συμβαίνει όταν μία επανάληψη του σημείου 0 είναι περιοδική. Δηλαδή, για θετικούς ακέραιους $f_c^k(0) = f_c^{k+q}(0)$ για θετικούς ακέραιους k και q . Αυτοί οι δενδρίτες δεν έχουν εσωτερικό και δεν υπάρχει άλλος ελκυστής εκτός από το άπειρο.

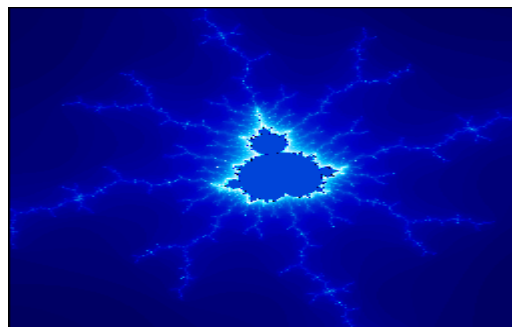


Εικόνα 6.2.7. Δενδρίτης για $c=i$

(Julia_Mandelbrot-Roumeliotou.pdf)

Το σύνολο Julia τώρα είναι το σύνορο ενός μοναδικού τομέα έλξης και περιλαμβάνει εκείνα τα σημεία τα οποία δεν πηγαίνουν στο άπειρο.

Παρατηρώντας, τώρα, τις κεραίες του M , βλέπουμε ότι αυτές έχουν μικρά αντίγραφα του M (Σχ.6.1.8). Επιπλέον μικρότερα βρίσκονται μεταξύ μεγαλύτερων κ.ο.κ.

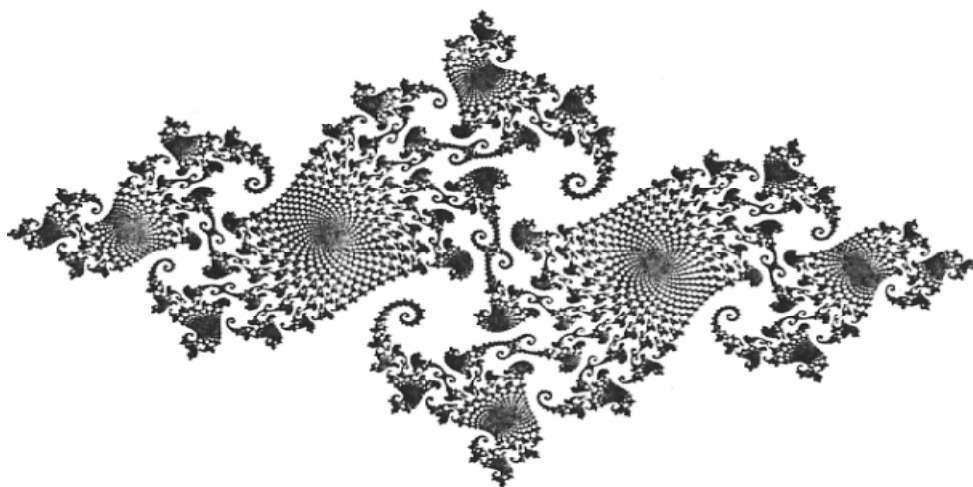


Εικόνα 6.2.8. Μικροσκοπικά αντίγραφα του Mandelbrot

(Julia_Mandelbrot-Roumeliotou.pdf)

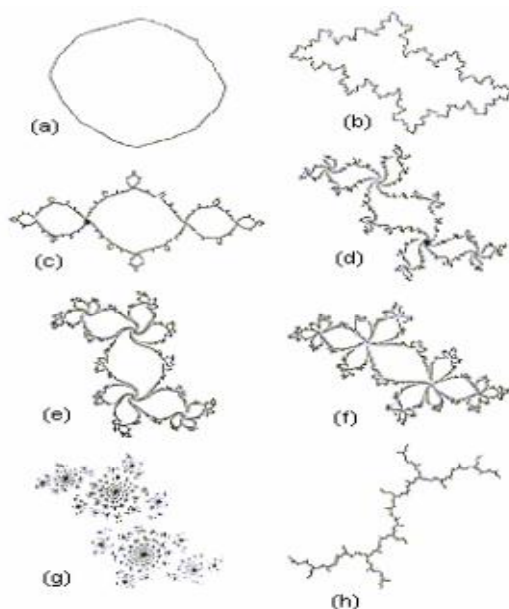
Αν πάρουμε μια τιμή του c μέσα σε ένα από αυτά τα αντίγραφα (μνιατούρες) του M , τότε το σύνολο Julia είναι ένας συνδυασμός ενός δενδρίτη και του συνόλου Julia που παίρνουμε για

την αντίστοιχη τιμή του c μέσα στο σύνολο M , το οποίο επαναλαμβάνεται πολλές φορές και κολλάει πάνω στους δενδρίτες.



Εικόνα 6.2.9. Σύνολα Julia για τιμή του c από την κοιλάδα ιππόκαμπων

(Julia_Mandelbrot-Roumeliotou.pdf)

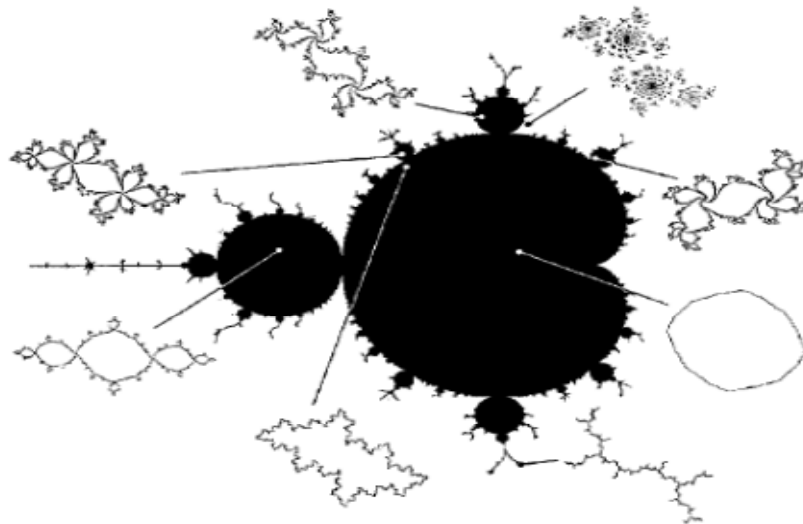


Εικόνα 6.2.10

(Julia_Mandelbrot-Roumeliotou.pdf)

Μία συλλογή συνόλων Julia της εξίσωσης $f_c(z)=z^2 + c$. (a) $c= -0.1 + 0.1i$: η f_c έχει ένα ελκυστικό σταθερό σημείο και το J είναι σχεδόν-κύκλος. (b) $c= -0.5 + 0.5i$: η f_c έχει ένα

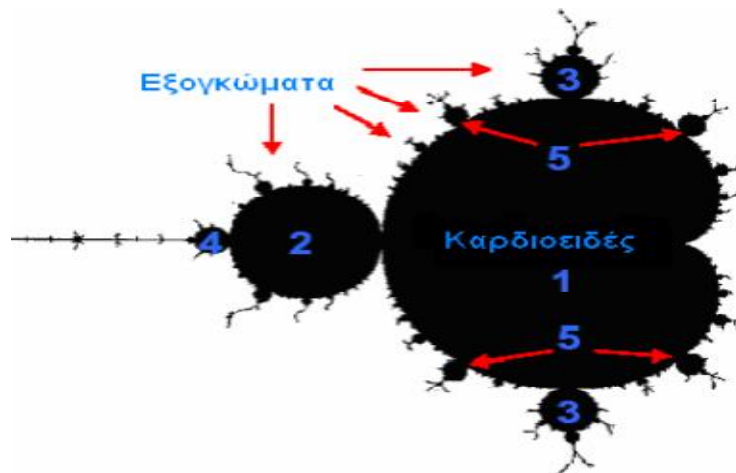
ελκυστικό σταθερό σημείο και το J είναι σχεδόν-κύκλος. (c) $c = -1 + 0.05i$: η f_c έχει μία ελκυστική τροχιά περιόδου 2. (d) $c = -0.2 + 0.75i$: η f_c έχει μία ελκυστική τροχιά περιόδου 3. (e) $c = 0.25 + 0.52i$: η f_c έχει μία ελκυστική τροχιά περιόδου 4. (f) $c = -0.5 + 0.55i$: η f_c έχει μία ελκυστική τροχιά περιόδου 5. (g) $c = 0.66i$: η f_c δεν έχει ελκυστικές τροχιές και το J είναι ολικά μη συνεκτικό. (h) $c = -i$: η $f_c^2(0)$ είναι περιοδική και το J είναι ένας δενδρίτης .



Εικόνα 6.2.11

(Julia_Mandelbrot-Roumeliotou.pdf)

Πρέπει να αναφέρουμε ότι τα εξογκώματα πάνω στο Mandelbrot αντιστοιχούν σε ελκυστικές τροχιές περιόδου p , όπως φαίνεται στο Σχ.6.2.12.



Εικόνα 6.2.12

(Julia_Mandelbrot-Roumeliotou.pdf)

6.3. Διατάξεις οπτικοποίησης των χρωμάτων που συναντάμε σε fractal εικόνες

Ισορροπία: Πρόκειται για εκείνη τη διάταξη όπου τα οπτικά στοιχεία επιδεικνύουν ευστάθεια και ισορροπία. Υπάρχει η φυσική ισορροπία των αντικειμένων, που στηρίζεται σε

φυσικούς νόμους και η συνθετική ισορροπία. Η τελευταία στηρίζεται στην εικαστική αισθητική και έχει να κάνει με την ισορροπία που την επιτυγχάνεται με τις επιλεγείσες φόρμες, τις υφές, καθώς και με τους άξονες της σύνθεσης. Αυτές οι παράμετροι ορίζουν την ισορροπία σε μια σύνθεση. Με αυτή την έννοια θεωρείται μια σύνθεση πως διαθέτει αυτοτέλεια, δηλαδή η σύνθεση ολοκληρώνεται¹



Εικόνα 6.3.1. Fractal ισορροπίας

(strange-omniverse.blogspot.com)

Συμμετρία: Πρόκειται για την παρόμοια διάταξη οπτικών στοιχείων σύμφωνα με έναν νοητό άξονα ή ένα επίπεδο που θυμίζει αντικατοπτρισμός. Στη γραφιστική η συμμετρία συνήθως χρησιμοποιείται σε λογότυπα και σήματα οργανισμών και εταιριών, διότι μέσω αυτής προσδίδεται κύρος. Μάλιστα έχει παρατηρηθεί ότι οι κάθετοι άξονες συμμετρικότητας είναι πιο ευδιάκριτοι από τους οριζόντιους.



Εικόνα 6.3.2. Fractal συμμετρίας

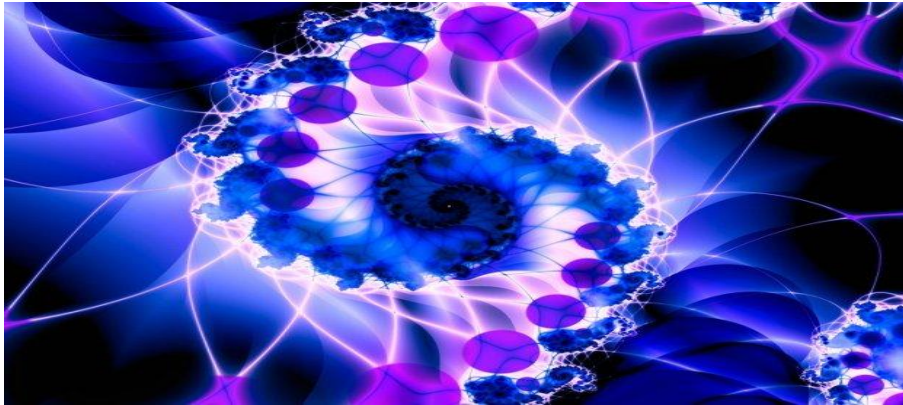
(pixabay.com)

Αξονικότητα: Πρόκειται για τον βασικότερο τρόπο διάταξης των στοιχείων μιας σύνθεσης εκατέρωθεν ενός άξονα. Τα στοιχεία δομούνται είτε συμμετρικά είτε ασύμμετρα είτε να

¹ Fotografia-Eikona-Optiki-Epikoinonia.pdf,P:90.

επιτυγχάνουν την ισορροπία. Τα σημεία τοποθέτησης στον άξονα (πάνω ,κάτω, δεξιά, αριστερά) έχουν διαφορετική σημασία ως προς την ανάδειξη των σημαινόντων.

Αναλογία: Η ένταξη κάθε οπτικού στοιχείου μιας σύνθεσης σε ένα ενιαίο σύστημα μαθηματικών λόγων επιτυγχάνει την αναλογικότητα. Η αναλογία δημιουργεί μια αίσθηση τάξης στη σύνθεση, συνέχει τα οπτικά στοιχεία και συμβάλλει στην ανάδειξη του όλου.

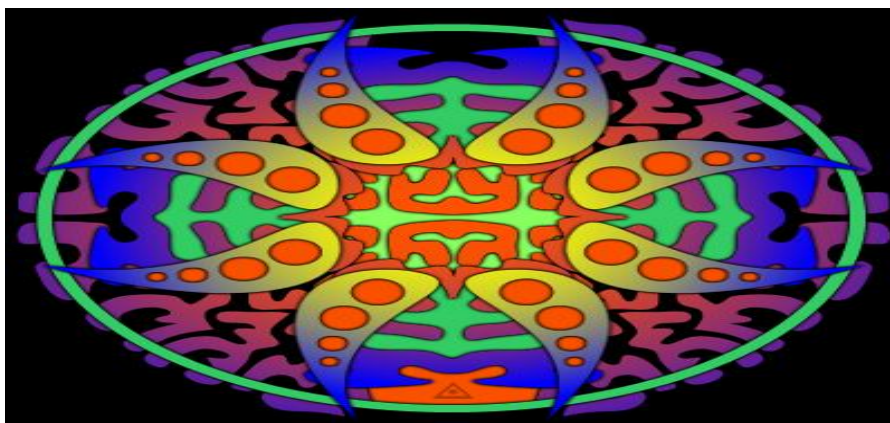


Εικόνα 6.3.3. Fractal αναλογίας

(blogspot.com)

Ρυθμός: Πρόκειται για την επανάληψη ορισμένων οπτικών στοιχείων μιας σύνθεσης, έτσι να δημιουργείται μια οπτική ροή, γεγονός που προσδίδει ζωντάνια, κίνηση. Ο κατάλληλος χειρισμός λοιπόν των οπτικών στοιχείων ως προς το μέγεθος, τη φόρμα, τη θέση και το χρώμα δημιουργεί τον ρυθμό. Μάλιστα έχει παρατηρηθεί ότι ο άνθρωπος τείνει να συμπληρώνει τα κενά έτσι ώστε να μην διακόπτονται οι συνέχειες, που κατά κανόνα προσδίδουν ρυθμικότητα.

Ιεραρχία: Πρόκειται για τον τρόπο δόμησης των οπτικών στοιχείων, των οπτικών κέντρων, σύμφωνα με κάποια κριτήρια. Το κυρίαρχο στοιχείο σε μια ιεραρχία αποδίδεται με τη διαφοροποίηση του μεγέθους, της θέσης και του χρώματος του, είτε συνολικά είτε μεμονωμένα. Κάθε ιεραρχία σημαίνει και μια ανισότητα. Επίσης μπορεί να καταδεικνύει κατάταξη ή απλώς διαφοροποίηση. Οι ιεραρχημένες δομές αυξάνουν την αναγνωσιμότητα, εφόσον προσελκύουν την προσοχή στα σημαντικά, κατά τον δημιουργό, τμήματα. Ειδικότερα στην τοπογραφία αλλά και στο διαδίκτυο οι ιεραρχημένες χρησιμοποιούνται ευρύτατα.



Εικόνα 6.3.4. Fractal ιεραρχίας

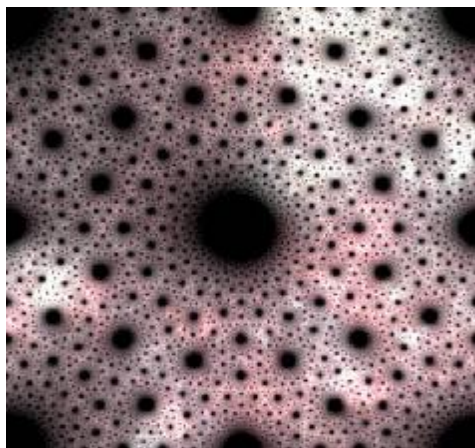
(www.tmth.gr)

6.4. Παραδείγματα Fractal εικόνων φλογών (Fractal flames images)

Οι Fractal αλγόριθμοι φλογών είναι μέλος των (IFS)¹, δηλαδή των επαναληφθέντων συστημάτων λειτουργίας, τμήμα των fractal αλγορίθμων. Ένα δυσδιάστατο IFS δημιουργεί εικόνες για να σχεδιάσει την παραγωγή ενός χαοτικού ελκυστή (attractor). Οι fractal αλγόριθμοι φλογών διακρίνονται για τρεις καινοτομίες:

1. Μη γραμμικές λειτουργίες
2. Επίδειξη λόγω πυκνότητας
3. Δομικός χρωματισμός

Η κατευθυντήρια αρχή του σχεδίου του αλγορίθμου είναι να εκθέσει όσο το δυνατόν περισσότερο το περιεχόμενο πληροφοριών του attractor, διαπιστώνοντας ότι η συντήρηση των πληροφοριών μεγιστοποιεί την αισθητική.



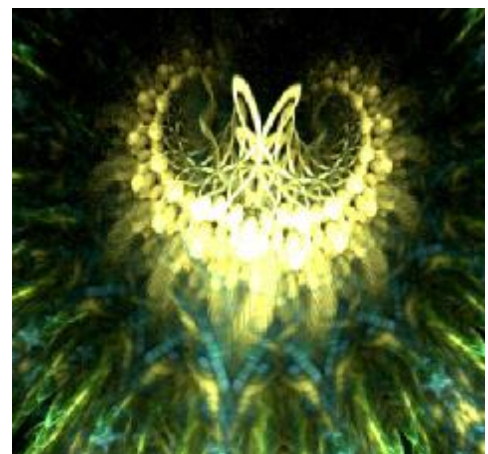
Εικόνα 6.4.a



Εικόνα 6.4.b



Εικόνα 6.4.c



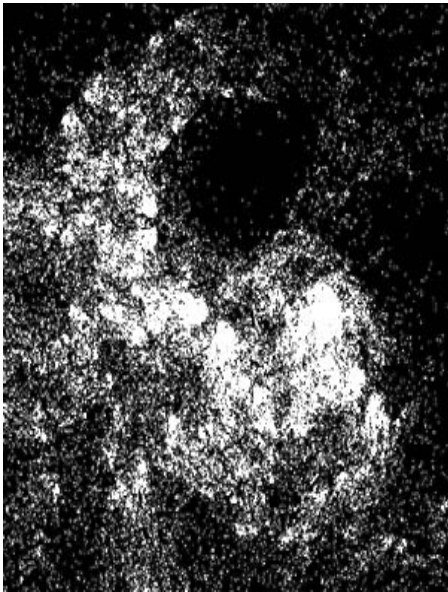
Εικόνα 6.4.d

¹ The Fractal Flame Algorithm, P:2,7,9,10,11.

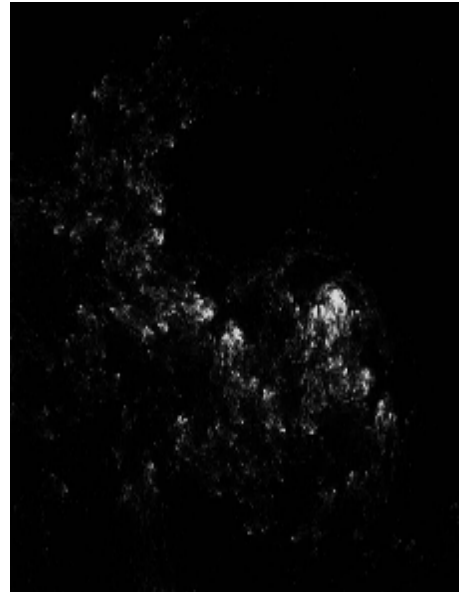
(The Fractal Flame Algorithm,P:2)

Τα ονόματα των fractal φλογών είναι: a) 206, b) 191, c) 4000 και d) 29140. Αυτές οι εικόνες έχουν επιλεγεί για τις αισθητικές τους ιδιότητες.

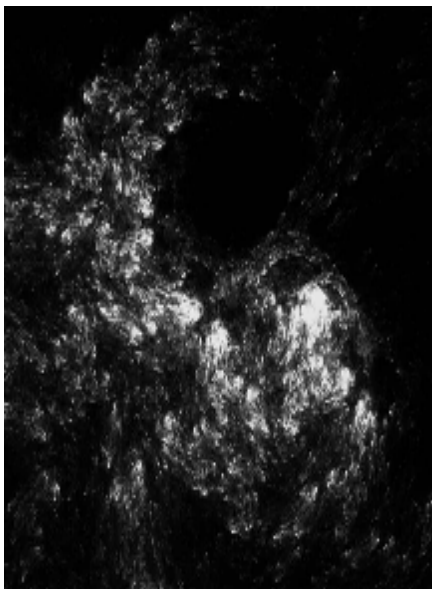
6.5. Παραδείγματα Fractal εικόνων λόγω πυκνότητας (Log-Density Display)



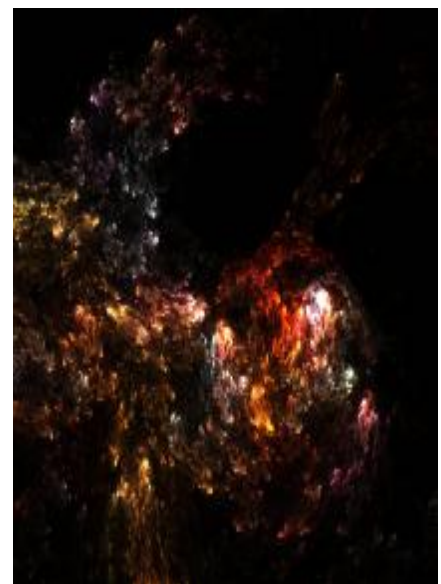
Εικόνα 6.5.a



Εικόνα 6.5.b



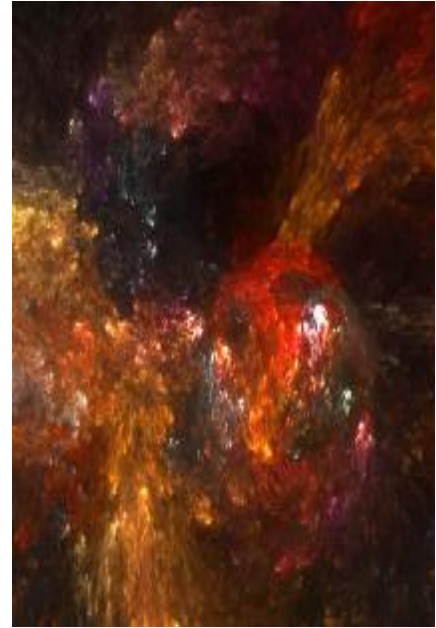
Εικόνα 6.5.c



Εικόνα 6.5.d



Εικόνα 6.5.e



Εικόνα 6.5.f

(The Fractal Flame Algorithm,P:7)

Στις παραπάνω εικόνες βλέπουμε κάποιες τεχνικές αρχίζοντας με a) δυαδική ιδιότητα μέλους, b) γραμμικό, c) λογαριθμικό, d) με το χρώμα, e) με το γάμμα και f) με τα δοθέντα χρώματα.

6.5. Χρωματισμός (Coloring)

Υπάρχουν πολλές πληροφορίες που συστρέφονται γύρω από τον attractor. Οι αλγόριθμοι φλογών χρησιμοποιούν χρώμα για να μεταβιβάσουν αυτό. Το αποτέλεσμα είναι μια ουσιαστική αισθητική βελτίωση. Χρώμα θα μπορούσε να οριστεί σύμφωνα με τον χάρτη πυκνότητας και αν το αποτέλεσμα αυξάνεται με την διαφάνεια των πυκνοτήτων σχετικά με το grayscale, η εσωτερική δομή fractal παραμένει αδιαφανές. Επιπλέον για την ζωτικότητα το μάτι προτιμά ότι το χρώμα κάθε μέρους του attractor παραμένει αμετάβλητο με τον καιρό, διαφορετικά η παραίσθηση ενός αντικειμένου στην κίνηση συμβιβάζεται. Οι fractal χρήσεις αλγορίθμου χρησιμοποιούν ένα γνήσιο μέσο για να ολοκληρωθεί αυτό: προσθήκη μιας τρίτης συντεταγμένης στην επανάληψη. Φυσικά θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε μια παλέτα ή ένα χρώμα-χάρτη που ορίζουμε ως μια λειτουργία από $[0,1]$ σε (r,g,b) όπου το r,g και το b είναι μέσα $[0,1]$. Μια παλέτα διευκρινίζεται κλασικά με μια σειρά 256 τριπλάσιων των ψηφιολέξεων. Για να πετύχουμε αυτό ορίζουμε ένα χρώμα C_i σε κάθε λειτουργία F_i και προσθέτει μια ανεξάρτητη συντεταγμένη στο παιχνίδι του χάους.

(x, y) = ένα τυχαίο σημείο στο τετράγωνο δυο μονάδων

c = τυχαίο σημείο μέσα $[0,1]$

iterate{

$i =$ ένας τυχαίος ακέραιος αριθμός από 0 στο $n-1$ συμπεριλαμβανομένου

$$(x, y) = Fi(x, y)$$

$$c = (c + ci)/2c$$

$$(xf, yf = Ffinal(x, y)$$

$$cf = (c + cfinal)/2 \quad cf = (c + cfinal)/2$$

πλοκή (xf, yf, cf) εκτός κατά την διάρκεια των πρώτων 20 επαναλήψεων.

Αυτό έχει τη σημαντική ιδιότητα ότι η πιο πρόσφατα εφαρμοσμένη λειτουργία κάνει την μεγαλύτερη διαφορά στο δείκτη χρώματος και επίσης στη χωρική θέση. Οι δείκτες κάνουν την λιγότερη διαφορά καθώς υποχωρούν εγκαίρως. Ως εκ τούτου τα χρώματα είναι συνεχή στην τελική εικόνα. Η χάραξη χρώματος εφαρμόζεται φυσικά με την κράτηση τριών μετρητών ανά εικονοκύτταρο αντί του ενός και προσθήκη του τρέχοντος χρώματος στους τρεις αντί της αύξησης ενός μετρητή ενιαίας πυκνότητας. Αυτές δεν είναι αρκετές πληροφορίες για την κατάλληλη πυκνότητα μιας εικόνας.

Εντούτοις, παίρνοντας τον λογάριθμο κάθε καναλιού ανεξαρτήτως του συνόλου αλλάζει τα χρώματα. Αντ' αυτού πρέπει να προστεθεί ένα τέταρτο κανάλι αποκαλούμενο άλφα κι αφού σχεδιάσει ένα σημείο το χρώμα προστίθεται στα τρία κανάλια χρώματος αλλά και στο κανάλι άλφα. Η κατάληξη είναι ότι οι τιμές του άλφα μπορούν να παράγουν με την εικόνα εάν η μορφή αρχείου τις υποστηρίζει ή μπορούν να χρησιμοποιηθούν για fractal υπόβαθρο αμέσως ή μπορούν να απορριφθούν.

6.6. Ο παράγοντας Γάμμα (The Gamma Factor)

Η ακριβής επίδειξη οποιασδήποτε ψηφιακής εικόνας σε ένα σωλήνα καθόδων CRT (Cathode Ray Tube) απαιτεί διόρθωση γάμμα για να αποτελέσει τη μη γραμμική απάντηση των φωσφόρων οθόνης. Χωρίς διόρθωση τα σκοτεινότερα μέρη μιας εικόνας εμφανίζονται πάρα πολύ σκοτεινά. Εάν η φωτεινότητα β ενός εικονοκυττάρου είναι μια τιμή ανάμεσα στο 0, 1, η διορθωμένη φωτεινότητα είναι απλά: $= b^1$. Οι μεγάλες τιμές γάμμα ουσιαστικά αυξάνουν τον ορατό θόρυβο απαιτώντας έτσι τους πιο μακροχρόνιους να δίνουν χρόνο ώστε να αντισταθμιστούν. Η παράμετρος αυτή αφήνεται στην κρίση του χρήστη σύμφωνα με το γούστο του αλλά και την περίπτωση. Η διόρθωση γάμμα ωθεί οποιοσδήποτε μικρές τιμές προς το ένα, αφήνοντας τη λιγότερη διαφορά κι ως εκ τούτου λιγότερο κορεσμό.

Ενώ κάποιος μπορεί να επιθυμήσει αυτή την επίδραση για να συντηρήσει τα φωτεινά χρώματα, η διόρθωση γάμμα μπορεί να εφαρμόσει τον ίδιο τρόπο που ο λογάριθμος είναι: με τον υπολογισμό μιας κλίμακας παράγοντας στο άλφα κανάλι κι έπειτα την εφαρμογή του στα τρία κανάλια χρώματος. Το όνομα της παραμέτρου που επιλέγει αυτό καλείται δονητικότητα και μπορεί να πάρει οποιαδήποτε αξία από 0, σημαίνοντας να εφαρμόσει το γάμμα στα κανάλια ανεξάρτητα, σε 1, έννοια για να εφαρμόσει το γάμμα από το άλφα κανάλι σε κάθε κανάλι.

6.7. Συμμετρία (Symmetry)

Το ανθρώπινο μυαλό αποκρίνεται στα συμμετρικά σχέδια σε θεμελιώδες επίπεδο. Όταν οι συντελεστές μητρώων επιλέγονται τυχαία, οι πιθανότητες ενός συμμετρικού σχεδίου εμφανίζονται πολύ μικρές. Μπορούμε εύκολα να συμπεριλάβουμε τέτοιες λειτουργίες

σκόπιμα. Υπάρχουν δυο είδη συμμετριών: περιστροφικός και δυαδικός. Πρώτα καλύπτουμε περιστροφές. Η προσθήκη μιας λειτουργίας στο σύστημα που περιστρέφεται κατά 180 μοίρες με δυαδικό τρόπο εμφανίζοντας περιστροφική συμμετρία.

Το βάρος αυτής της λειτουργίας θα πρέπει να είναι ίσο προς το άθροισμα των βαρών όλων των λειτουργιών του συστήματος. Με αυτόν τον τρόπο το ήμισυ από τα άλματα στο παιχνίδι χάος είναι ανάμεσα στα δυο μισά και ως εκ τούτου τα δυο μισά θα έχουν την ίδια πυκνότητα. Εάν η λειτουργία περιστροφής δίνει το ίδιο βάρος, όπως οι άλλες λειτουργίες, τότε ένα από τα δυο μισά θα είναι μόνο μια σκιά του άλλου. Προσθέτοντας μια περιστροφή κατά 120 μοίρες κάνει να εμφανιστεί ένας τριαδικός τρόπος συμμετρίας.

Οι τρεις κλάδοι δεν έχουν ίση πυκνότητα, εντούτοις και καμία στάθμιση για να ισορροπήσουν μ'αυτούς. Αυτό συμβαίνει προκειμένου να μπει στον κλάδο κατά 240 μοίρες στο παιχνίδι χάος. Κάποιος πρέπει να πάρει τη λειτουργία περιστροφής δυο φορές στη σειρά, η οποία είναι μόνο 25% πιθανή αλλά ο κλάδος 120 μοιρών είναι 50% πιθανό. Αντ' αυτού κάποιος πρέπει να εισάγει δυο μετασχηματισμούς, μια κατά 120 μοίρες και μια κατά 240 μοίρες και να τους δώσουμε τόσο βάρος ίσο με το άθροισμα των άλλων. Στην συνέχεια οι τρεις κλάδοι θα έχουν την ίδια πιθανότητα. Γενικά για να παράγει τη συμμετρία n-τρόπων, n-1 πρόσθετες μετατροπές, είναι απαραίτητες για να ισορροπήσουν οι πυκνότητες.

6.8. Φιλτράρισμα (Filtering)

Aliasing σε χωρική και χρονική κατεύθυνση είναι οπτικά ενοχλητική και δείχνει επίσης απώλεια πληροφοριών, διότι κανείς δεν μπορεί να πει εάν ένα τεχνούργημα στην εικόνα είναι πρωτότυπο ή ένα ψευδώνυμο. Με anti-aliasing δεν υπάρχει καμία ασάφεια. Το παιχνίδι χάος προσφέρεται για anti-aliasing. Σκεφτείτε χωρική aliasing πρώτη, που είναι η εξάλειψη των άκρων jaggie. Η κανονική τεχνική είναι να επιστήσει την επιθυμητή εικόνα σε υψηλή ανάλυση και στη συνέχεια φίλτρο στο κάτω για να εμφανιστεί ανάλυση.

Αυτό είναι γνωστό ως υπερδειγματοληψία και το κόστος του είναι γραμμικό στον χρόνο και στην μνήμη (αν η δειγματοληψία εφαρμόζεται κανονικά σε δυο διαστάσεις, έτσι ώστε 3 από 3 δειγματοληψία σημαίνει 9x). Με το παιχνίδι χάος όμως μπορούμε να επιτύχουμε αυτό το αποτέλεσμα με ακριβώς την αύξηση του αριθμού των κάρων που χρησιμοποιούνται στο ιστόγραμμα χωρίς αύξηση ο αριθμός των επαναλήψεων. Υπάρχει ένα μικρό κόστος σε χρόνο και επειδή ο χρόνος φιλτραρίσματος είναι σημαντικός καθώς και η αυξημένη χρήση της μνήμης, σημαίνει επίσης αυξημένη κρυφή μνήμη κατά τη διάρκεια της επανάληψης, η επίδραση στην οπτική ποιότητα είναι δραματική.

Διόρθωση γάμμα πρέπει να γίνει σε αυτό το στάδιο φιλτραρίσματος, όταν ο μέγιστος αριθμός των κομματιών ακρίβειας είναι ακόμα διαθέσιμος. Παρά αυτό το φιλτράρισμα ο λογάριθμος και γάμμα παράγων μπορεί να προκαλέσει χαμηλή πυκνότητα σε μέρη μιας εικόνας και να εμφανίζεται με κουκίδες ή θορυβώδεις. Ένα ευρύτερο φίλτρο θα το λύσει αυτό αλλά σε βάρος του κάνει τα μέρη της εικόνας να δείχνουν θολά. Αυτό πρέπει να αντιμετωπιστεί με μια μορφή πυκνότητας (όπως βλέπουμε στο σχήμα 6.8). Έχουμε εφαρμόσει ένα δυναμικό φίλτρο όπου ένας πυρήνας θαμπάδας του πλάτους αντιστρόφως ανάλογη με την πυκνότητα των σημείων στο ιστόγραμμα όπου εφαρμόζεται στο σχήμα 6.8.1 Ο πυρήνας θαμπάδα κλιμακώνεται με βάση το επίπεδο υπερδειγματοληψίας και εφαρμόζεται μετά την κλιμάκωση πυκνότητα καταγραφής. Αυτό το μεταβλητό φίλτρο πλάτους επιτρέπει υψηλότερη πυκνότητα σε περιοχές όπου παραμένουν στο επίκεντρο, ενώ οι περιοχές χαμηλότερης πυκνότητας λειαίνονται σημαντικά.

Το σχήμα 6.8.1 απεικονίζει την επίδραση εκτίμησης της πυκνότητας.



Εικόνα 6.8.a



Εικόνα 6.8.b



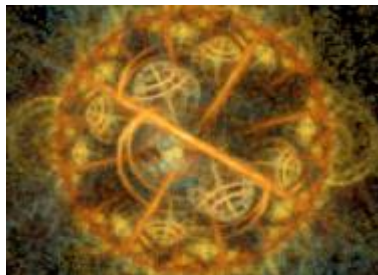
Εικόνα 6.8.c



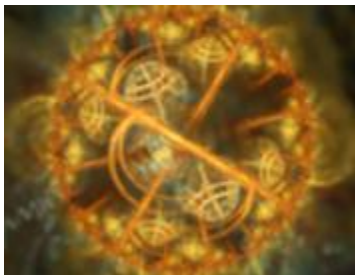
Εικόνα 6.8.d

(The Fractal Flame Algorithm,P:12)

Παραδείγματα συμμετρίας. Η εικόνα d δείχνει πως τα χρώματα ξεπλένονται χωρίς ειδική επεξεργασία του χρώματος συντεταγμένων για μετασχηματισμούς συμμετρίας.



Εικόνα 6.8.1.a



Εικόνα 6.8.1.b



Εικόνα 6.8.1.c

(The Fractal Flame Algorithm,P:13)

Επίδειξη της εκτίμησης πυκνότητας, a) χαμηλής ανάλυσης χαμηλής ποιότητας, μεγεθυμένη εικόνα που εδόθη χωρίς εκτίμηση πυκνότητας και b) με την εκτίμηση πυκνότητας και c) μια υψηλής ποιότητας ανάλυση με την εκτίμηση της πυκνότητας.

Κεφάλαιο 7: Συμπεράσματα Επίλογος

Κάνοντας μια μικρή ανασκόπηση σε όλα τα προηγούμενα κεφάλαια καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι τα fractals υπήρχαν, υπάρχουν και θα υπάρχουν για πάντα γύρω μας ανεξάρτητα από το πώς τα αντιλαμβάνεται ο καθένας. Προσωπικά πριν ασχοληθώ με την συγκεκριμένη εργασία δεν γνώριζα καν ότι υπήρχαν και πως συμπεριφέρονται σε σχέση με την Φύση, την Τέχνη, την Ιατρική, την Βιολογία κ.λ.π. Αρχίζοντας λοιπόν να εξερευνώ τον πολύπλοκο κόσμο τους η αλήθεια είναι ότι άρχισα να βλέπω με περισσότερη προσοχή και να ανακαλύπτω ότι τα fractals είναι αυτά που δημιουργούν την αντιγραφή στη φύση με ένα τέτοιο τρόπο που κανείς στην πραγματικότητα δεν αντιλαμβάνεται.

Βλέποντας λοιπόν ένα δέντρο, παρατηρώ ότι όλοι οι κλάδοι του είναι ίδιοι ή σχεδόν ίδιοι με το αρχικό δέντρο και αυτό ισχύει με όλα τα αντικείμενα της φύσης που μπορεί να είναι περίπλοκα αλλά όλα ακολουθούν την τακτική της αυτοομοιότητας σε σχέση με το αρχικό αντικείμενο. Όμως δεν είναι δυνατόν να ελπίζει κανείς ότι θα κατακτήσει στην ολότητα του ένα τόσο πολύπλοκο θέμα όσα βιβλία κι αν ξεφυλλίσει. Η απέραντη ποικιλία των fractal συνόλων και των εφαρμογών τους, που στην πράξη καλύπτει όλα τα επιστημονικά και τεχνολογικά πεδία, από τα καθαρά Μαθηματικά ως την Οικονομία και την Χαρτογραφία, δεν είναι κάτι το οποίο μπορούμε να το αντιμετωπίσουμε με τόση ελαφρότητα.

Γι' αυτό όμως που είμαι απολύτως σίγουρη είναι ότι καταφέραμε σε κάποιο βαθμό, έστω και μικρό, να κατανοήσουμε μερικά πράγματα. Για παράδειγμα τώρα ξέρουμε τι εννοούν κάποιοι ειδικοί όταν λένε τη λέξη 'fractal διάσταση' και ότι ένα fractal είναι 'κλασματικό'. Επίσης τώρα ξέρουμε την διαφορά ανάμεσα σε κάποιο συνηθισμένο και σε κάποιο ασυνήθιστο γεωμετρικό αντικείμενο. Ξέρουμε ότι ένας κύβος δεν είναι fractal και ξέρουμε το γιατί αλλά το πιο σημαντικό είναι ότι ξέρουμε να τα εξηγήσουμε και σε άλλους.

Σίγουρα ο κλάδος των Μαθηματικών έπαιξε τον κυρίαρχο και πιο σημαντικό λόγο ύπαρξης των fractals, μέσω των οποίων με διάφορους αλγόριθμους μπόρεσαν να λυθούν πολλά από τα μέχρι τότε άλυτα προβλήματα όλου του επιστημονικού κόσμου. Τα Μαθηματικά ήταν και η άμεση σύνδεση των fractals με τους Η/Υ, όπου χρειάστηκαν βέβαια αρκετά χρόνια μελέτης και προσπάθειας από τους επιστήμονες, ώστε να αποτυπωθούν όλα αυτά στις οθόνες των Η/Υ, ώστε να θαυμάζουμε όλοι εμείς μέχρι και σήμερα τις απίστευτες εντυπωσιακές εικόνες που σχετίζονται με τη Φύση, την Τέχνη, την Βιολογία, την Φυσιολογία, την Αστροφυσική κλπ.

Τέλος, τα γραφικά των fractals συντέλεσαν ώστε να εξελιχθούν οι εικόνες, όπου μέσα από διάφορες συναρτήσεις, παρατηρούμε σε άπειρη λεπτομέρεια κάθε στοιχείο της εικόνας και καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι όλα τα fractals υπακούουν στην έννοια της αυτοομοιότητας, που είναι και το κυρίαρχο χαρακτηριστικό τους αναμφισβήτητα.

«Όντας μία γλώσσα, τα Μαθηματικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν όχι μόνον για να πληροφορήσουν αλλά, μεταξύ άλλων πραγμάτων, για να σαγηνεύσουν».

BenoitB.Mandelbrot¹.

¹ Mandelbrot, The Fractal Geometry of Nature.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ-ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- Μπούνης, Α. (2004). *Ο Θαυμαστός κόσμος των Fractal*. Αθήνα: Leaders Books.
- Αραχωβίτης, Ι. (2001). *Εισαγωγή στη Χαοτική Δυναμική και στα Fractals*. Αθήνα: Παπασωτηρίου.
- Regis, E. *Ποιος πήρε την καρτέλα του Αϊνστάιν*. Αθήνα: Τροχαλία.
- Christopher, M. (2013). *Chaos in an Atmosphere Hanging on a Wall*. : Dan forth.
- Cleick, J. (1987). *Χάος Μια νέα Επιστήμη*. Αθήνα: Κάτοπτρο.
- Vilenkin, N. (1997). *Αναζητώντας το άπειρο*. Αθήνα: Κάτοπτρο.
- Shiffman, D. (2012). *The nature of code*. New York.
- Draves, S. (2008). *The Fractal Flame Algorithm*. USA: Spotworks.
- Mandelbrot, B. (1982). *The Fractal Geometry of Nature*. USA: W.H.Freeman and co.
- *Fractal Geometry Mandelbrot Set.pdf*. Ανακτήθηκε 5 Φεβρουαρίου, 2015, από [Fractal Geometry Mandelbrot Set.pdf](#).
- www.iatrikionline.gr. Ανακτήθηκε 10 Μαρτίου, 2015, από www.iatrikionline.gr.
- <http://www.physics.4u.gr>. Ανακτήθηκε 14 Μαρτίου, 2014, από <http://www.physics.4u.gr>.
- www.math.uoc.gr.1080/Members/asirocot/Peano.doc. Ανακτήθηκε 7 Απριλίου, 2014, από www.math.uoc.gr.1080/Members/asirocot/Peano.doc.
- *Εισαγωγή στα σύνολα Julia και στο Mandelbrot Set*. Ανακτήθηκε 12 Μαρτίου, 2014, από users.uoa.gr/idalla/fractals. JULIA-MANDELBROT.PDF.
- *Fotografia_Eikona_Optiki_Epikoinonia.pdf*. Ανακτήθηκε 10 Ιουνίου, 2015, από 3lyk_komot.rod.sch.gr.