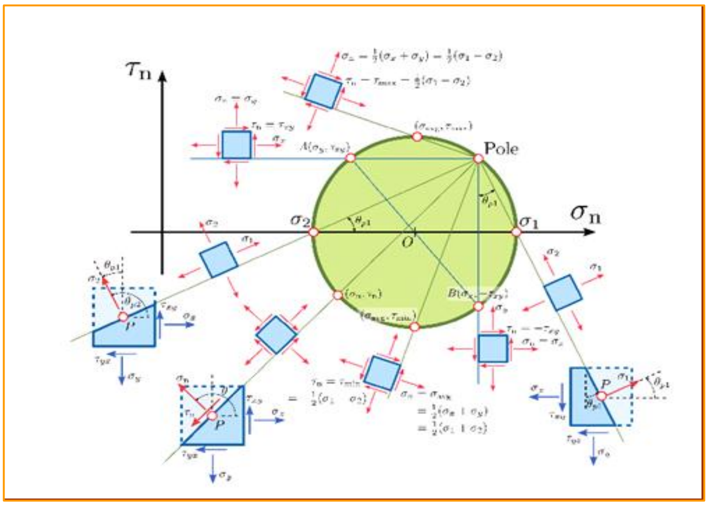
ΤΕΙ ΔΥΤΙΚΗΣ ΕΛΛΑΔΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΤΕ



ΣΥΝΘΕΤΗ ΚΑΤΑΠΟΝΗΣΗ -ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΑΣΤΟΧΙΑΣ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΥΛΙΚΩΝ- ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΕ ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ RUNET

ΣΠΟΥΔΑΣΤΕΣ: ΚΟΚΟΡΗΣ ΘΕΟΔΩΡΟΣ
ΜΠΑΛΑΟΥΡΑΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ
ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ: ΔΡ ΠΑΝ. ΚΑΚΑΒΑΣ

ΠΑΤΡΑ 2016

Ευχαριστίες

Ευχαριστούμε τον εισηγητή της πτυχιακής μας εργασίας για τον χρόνο και την καθοδήγηση που μας παρείχε για την ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα πτυχιακή εργασία διαπραγματεύεται με την σύνθετη καταπόνηση και κριτήρια αστοχίας και των μηχανικών ιδιοτήτων υλικών και εφαρμογές με το πρόγραμμα Runet. Στο κεφάλαιο πρώτο μελετήσαμε τη θεωρία κάμψης δοκών και συνδυασμό της κάμψης με αξονικό φορτίο. Αρχικά μελετώνται δοκοί συμμετρικής διατομής με δυνάμεις πάνω στο επίπεδο συμμετρίας της δοκού. Ακολούθως η θεωρία κάμψης γενικεύεται για να καλύψει την περίπτωση ασύμμετρης κάμψης, που αφορά σε δομικά στοιχεία με ασύμμετρη διατομή ή στοιχεία συμμετρικής διατομής με ροπές σε δύο διευθύνσεις. Εφαρμογή του προγράμματος Runet σε δομικές κατασκευές περιγράφονται στο κεφάλαιο αυτό. Με βάση το πρόγραμμα μπορέσαμε να προσδιορίσουμε τον οπλισμό των υποστυλωμάτων και πλακοδοκών σε διαφορετικούς τύπους φόρτισης.

Στο δεύτερο κεφάλαιο ασχοληθήκαμε με τις θεωρίες αστοχίας των δομικών στοιχείων και εφαρμογές με τον κύκλο του Mohr. Οι τάσεις στο εσωτερικό σώματος ευρισκομένου σε δυαξονικη κατάσταση μελετήθηκαν στο 2ο κεφάλαιο. Μελετήσαμε τον κυκλος του Mohr - Γραφική παράσταση τάσεων πάνω στον κύκλο. Επίσης εφαρμόσαμε ειδικό πρόγραμμα με τίτλο Mohr, από το ΕΜΠ, όπου μπορέσαμε να υπολογίσουμε τις ακρότατες τάσεις πάνω στον κύκλο του Mohr. Με τη χρήση του προγράμματος επιλύσαμε διάφορα παραδείγματα υπολογισμού ακρότατων τάσεων Σύγκριση με την αναλυτική μέθοδο, που γράφατε σε βιβλία αντοχής υλικών πραγματοποιήθηκε για τον έλεγχο του προγράμματος. Τα αποτελέσματα ίσα αξιόπιστα.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΣΧΗΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{Ο} ΚΑΜΨΗ ΔΟΚΩΝ ΚΑΙ ΚΑΜΨΗ ΜΕ ΑΞΟΝΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ

1.1 Εισαγωγή[1]

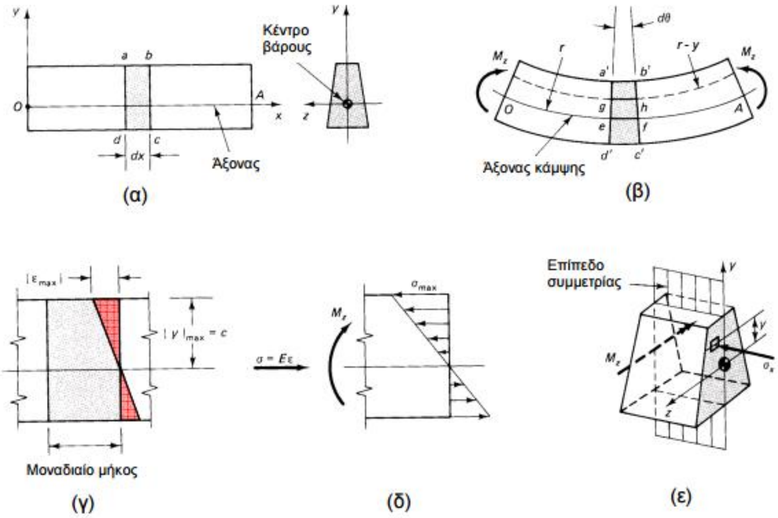
Το κεφάλαιο αυτό πραγματεύεται τη μελέτη δομικών στοιχείων τύπου "δοκού", δηλαδή στοιχείων τα οποία καταπονούνται κυρίως με δυνάμεις κάθετα στον άξονά τους ή/και με ροπές κάμψης στα άκρα τους. Στις διατομές των στοιχείων αυτών προκύπτουν ροπές κάμψης, οι οποίες, όπως θα δούμε, έχουν ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη εφελκυστικών και θλιπτικών τάσεων. Ένα από τα κύρια ζητούμενα του κεφαλαίου είναι ο υπολογισμός των τάσεων αυτών. Αρχικά μελετώνται δοκοί συμμετρικής διατομής με δυνάμεις πάνω στο επίπεδο συμμετρίας της δοκού. Ακολούθως η θεωρία κάμψης γενικεύεται για να καλύψει την περίπτωση ασύμμετρης κάμψης, που αφορά σε δομικά στοιχεία με ασύμμετρη διατομή ή στοιχεία συμμετρικής διατομής με ροπές σε δύο διευθύνσεις. Η μελέτη ολοκληρώνεται θεωρώντας τον ταυτόχρονο συνδυασμό ασύμμετρης κάμψης με αξονική δύναμη, που αφορά κυρίως σε δομικά στοιχεία τύπου υποστυλώματος.

1.2 Βασική κινηματική υπόθεση για κάμψη δοκού συμμετρικής διατομής

Η τεχνική θεωρία κάμψης δοκών βασίζεται σε τρεις θεμελιώδεις υποθέσεις. Η πρώτη αφορά στον τρόπο με τον οποίο παραμορφώνεται μία δοκός λόγω κάμψης, δηλαδή στο σχήμα που αποκτά λόγω των εξωτερικών φορτίων. Η δεύτερη αφορά στον τρόπο με τον οποίο σχετίζονται οι παραμορφώσεις λόγω κάμψης με τις τάσεις, βάσει των καταστατικών νόμων των υλικών. Τέλος, η τρίτη εξασφαλίζει την ισορροπία μεταξύ εξωτερικών φορτίων και εσωτερικών δυνάμεων. Η πρώτη από τις παραπάνω υποθέσεις, γνωστή και ως κινηματική υπόθεση, αποτελεί αντικείμενο αυτής της ενότητας. Για λόγους καλύτερης εποπτείας θεωρούμε μία οριζόντια ευθύγραμμη δοκό σταθερής διατομής (πρισματική δοκός) από υλικό ομοιογενές, ισότροπο και με ελαστική συμπεριφορά. Στη δοκό ορίζεται ένα σύστημα αξόνων έτσι ώστε x να είναι ο διαμήκης άξονας της δοκού (επί του παρόντος είναι άγνωστη η ακριβής θέση του άξονα αυτού), y ο κάθετος σε αυτόν ώστε να αποτελεί άξονα συμμετρίας κάθε διατομής και z ο κάθετος άξονας στο επίπεδο $x-y$, έτσι ώστε να σχηματίζεται τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων $x-y-z$ (Σχ. 1.1α). Σημειώνουμε ότι το επίπεδο $x-y$ αποτελεί επίπεδο συμμετρίας της δοκού. Η αρχή των αξόνων O τοποθετείται στο αριστερό άκρο της δοκού. Ακολούθως θεωρούμε ένα μικρό τμήμα της δοκού μήκους dx μεταξύ δύο επιπέδων κάθετων στον άξονα x, το οποίο σε πλάγια όψη σημειώνεται ως abcd (Σχ. 1.1α). Αν υποθέσουμε ότι στα άκρα της δοκού δρουν ίσες ροπές M_z ως προς τον άξονα Z, Σχ. 1.1β, η δοκός "κάμπτεται" πάνω στο επίπεδο συμμετρίας έτσι ώστε κάθε επίπεδο αρχικά κάθετο στον άξονα της δοκού, δηλαδή κάθε διατομή, να στρέφεται ελαφρώς ως προς τον άξονα αυτό. Η στροφές αυτές είναι

[1] Α. Τριανταφύλλου, Μηχανική των Υλικών, Πάτρα 2016

τέτοιες ώστε οι διατομές της δοκού κάθετα στο διαμήκη άξονα να παραμένουν επίπεδες και κάθετες στον άξονα και μετά την κάμψη 1 . Αποτέλεσμα της υπόθεσης αυτής είναι ότι οι γραμμές ad και bc του Σχ. 1.1α παραμένουν μετά την παραμόρφωση ευθείες (da '' και ''cb).



Σχήμα 1- 1 1Συμπεριφορά ελαστικής δοκού σε κάμψη.

Ο τρόπος καταπόνησης της δοκού του Σχ. 1.1β ονομάζεται καθαρή κάμψη. Πρόκειται για καταπόνηση με ροπή κάμψης καθ' όλο το μήκος της δοκού απουσία τέμνουσας δύναμης. Αν δρα και τέμνουσα δύναμη, η κάμψη ονομάζεται συνήθης. Η παραπάνω υπόθεση, γνωστή ως υπόθεση του Bernoulli, είναι απόλυτα ορθή για ελαστικές δοκούς ορθογωνικής διατομής σε καθαρή κάμψη και κατά πολύ καλή προσέγγιση ορθή για δοκούς με άλλες διατομές ή όταν δρα και τέμνουσα δύναμη ή ακόμα και όταν το υλικό της δοκού έχει ξεπεράσει την ελαστική περιοχή, αρκεί το ύψος της δοκού να είναι "μικρό" σε σχέση με το μήκος (π.χ. για λόγους μήκους προς ύψος της τάξης του 8-10 και πάνω). Ο άξονας της δοκού μεταξύ των διατομών da '' και ''cb αποτελεί τμήμα κύκλου με ακτίνα r (Σχ.1.1β).Στο μικρό στοιχείο '''' dcba του Σχ. 1.1β τα μήκη ''ba , gh , ef και cd '' (αλλά και οποιοδήποτε άλλο μήκος παράλληλα στον άξονα) ονομάζονται ίνες του υλικού. Εξ αυτών η ίνα ef , δηλαδή ένα πολύ μικρό τμήμα του άξονα της δοκού, έχει μήκος ds = rdθ , υποθέτοντας ότι η γωνία dθ μεταξύ των ''da και ''cb είναι απειροστά μικρή. Έτσι γράφουμε:

$$\frac{dq}{ds} = \frac{1}{r} = k \qquad 1.1$$

όπου κ , το αντίστροφο της ακτίνας, ονομάζεται καμπυλότητα. Στην περίπτωση καθαρής κάμψης δοκού (δηλαδή με σταθερή ροπή κατά μήκος) τα μεγέθη r και κ είναι σταθερά. Με παρόμοιο τρόπο, το μήκος gh της ίνας σε απόσταση y από τον άξονα της δοκού (ή r − y από το κέντρο του κύκλου) έχει μήκος (r −)dy θ , οπότε η διαφορά μήκους του gh από το ef είναι

$$d\hat{u} = (r - y)d\theta - r d\theta = - y d\theta \qquad 1.2$$

$$\varepsilon_x = - \frac{y}{r} \qquad 1.3$$

Διαιρώντας κατά μέλη με ds γραφούμε d ˆ ds/u −= r/y . Ακολούθως, υποθέτοντας ότι οι μετατοπίσεις και στροφές του άξονα της δοκού είναι μικρές, τα συνημίτονα των γωνιών μέσω των οποίων τα ud ˆ και ds προβάλλονται στον οριζόντιο άξονα είναι περίπου ίσα με τη μονάδα, και άρα το ud ˆ μμπορεί να αντικατασταθεί με du , που είναι η αξονική μεταβολή μήκους της ίνας ef , και το ds μπορεί να αντικατασταθεί με dx . Τέλος, από τη σχέση du dx x / , = ε όπου x ε η ορθή παραμόρφωση στη διεύθυνση x , γράφουμε:

Η εξίσωση (1.3), η οποία αποτελεί τη βασική κινηματική υπόθεση της τεχνικής θεωρίας κάμψης, δίνει ότι οι ορθές παραμορφώσεις σε δοκό που κάμπτεται μεταβάλλονται γραμμικά με την απόσταση πάνω στον άξονα y , η αρχή του οποίου όμως παραμένει ακόμα απροσδιόριστη. Η εύρεση της θέσης του άξονα αυτού αποτελεί αντικείμενο της επόμενης ενότητας.

1.3 Η εξίσωση ελαστικής κάμψης

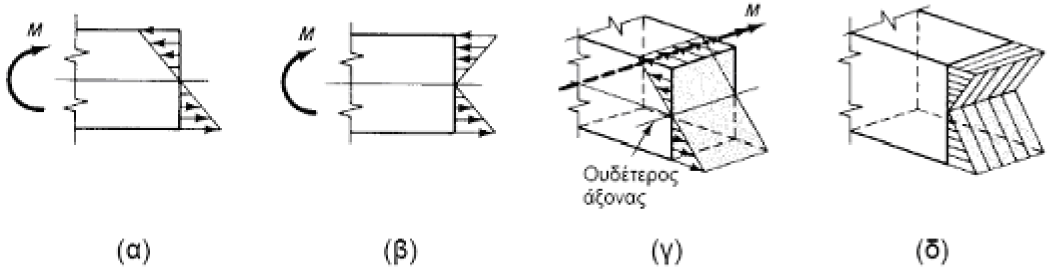
Βάσει του νόμου του Hooke, η ορθή παραμόρφωση ε_x έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη ορθής τάσης σ :

$$\sigma = E\varepsilon_x = - \frac{E_y}{r} \qquad 1.4$$

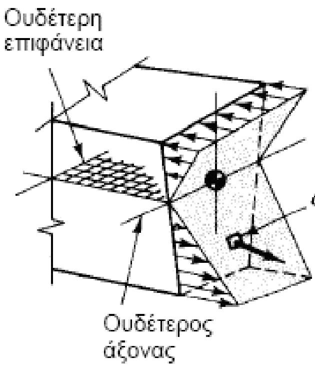
Ακολούθως θα κάνουμε χρήση των συνθηκών ισορροπίας. Για να γίνει αυτό, θα πρέπει να φανταστούμε το αποτέλεσμα της δράσης των εξωτερικών φορτίων σε κάθε διατομή της δοκού με δύο διαφορετικούς τρόπους: σύμφωνα με τον πρώτο τρόπο, το εσωτερικό εντατικό μέγεθος στη διατομή είναι η ροπή κάμψης (η αξονική δύναμη είναι μηδέν αλλά και η τέμνουσα δύναμη είναι μηδέν, λόγω της υπόθεσης καθαρής κάμψης).Σύμφωνα με το δεύτερο τρόπο, τα εσωτερικά εντατικά μεγέθη είναι οι ορθές τάσεις, οι οποίες είναι ισοδύναμες με τα προαναφερθέντα εντατικά μεγέθη. Η ισοδυναμία αυτή σημαίνει ότι το άθροισμα όλων των ορθών τάσεων ισούται με την αξονική δύναμη, δηλαδή μηδέν, ενώ το άθροισμα των ροπών που δίνουν όλες οι ορθές τάσεις ισούται με τη ροπή κάμψης. Σύμφωνα με τη συνθήκη ισορροπίας δυνάμεων στη διεύθυνση x (το άθροισμα όλων των ορθών τάσεων σε μία διατομή ισούται με την αξονική δύναμη στην εν λόγω διατομή) γράφουμε

$$\int_A \sigma_x \, dA = 0 \Rightarrow \int_A \left(-\frac{Ey}{\rho} \right) dA = -\frac{E}{\rho} \int_A y \, dA = 0 \qquad 1.5$$

όπου A το εμβαδόν της επιφάνειας της διατομής πάνω στην οποία αθροίζονται όλες οι ορθές τάσεις. Το τελευταίο ολοκλήρωμα της εξίσωση (1.5) ισούται, εξ ορισμού, με $\bar{y}A$, όπου $\bar{y}$ η απόσταση του κέντρου βάρους της διατομής από την αρχή του άξονα y. Έτσι, για να είναι το ολοκλήρωμα ίσο με μηδέν θα πρέπει να ισχύει $\bar{y} = 0$, επομένως ο άξονας z διέρχεται από το **κέντρο βάρους** της διατομής. Σημειώνοντας ότι και ο άξονας y , ως άξονας συμμετρίας της διατομής, διέρχεται από το κέντρο βάρους, συμπεραίνουμε ότι οι άξονες y-z είναι **κεντροβαρικοί**. Σύμφωνα με την εξίσωση(1.4), η ορθή τάση σ_x και η ορθή παραμόρφωση ε_x πάνω στον άξονα z , όπου $y = 0$, είναι ίσες με μηδέν. Ο άξονας z ονομάζεται **ουδέτερος άξονας**. Από την εξίσωση (1.3) συνάγεται ότι οι ορθές παραμορφώσεις μεταβάλλονται γραμμικά με την απόσταση από τον ουδέτερο άξονα, όπως φαίνεται γραφικά στο Σχ. 1.1γ. Αντίστοιχη, δηλαδή γραμμική, είναι και η μεταβολή των ορθών τάσεων, λόγω της εξίσωσης(1.4). Η κατανομή των ορθών τάσεων δείχνεται στο Σχ. 1.1δ και σε διάφορες ισοδύναμες παραστάσεις στο Σχ. 1.2, για δοκό ορθογωνικής διατομής. Σε όλα αυτά τα σχήματα φαίνεται ένα μικρό τμήμα της δοκού που ορίζεται από δύο τομές κατά μήκος, μία στα αριστερά, όπου δρα θετική ροπή κάμψης Mz , και μία στα δεξιά, όπου δρουν οι ορθές τάσεις σ_x . Σημειώνουμε ότι το πρόβλημα στην πραγματικότητα είναι τρισδιάστατο, δηλαδή μπορούμε να φανταστούμε τις ορθές τάσεις ως διανύσματα κάθετα σε κάθε σημείο της διατομής, με κατανομή όπως φαίνεται στα Σχ. 1.2γ (ή δ). Επειδή όμως η κατανομή των τάσεων είναι ίδια σε κάθε επίπεδο κάθετο στον άξονα z , δηλαδή ανεξάρτητη του z , συνήθως προτιμούμε την παράσταση των τάσεων στο επίπεδο (Σχ. 1.2α ή β), ως γραφικά ευκολότερη. Το επίπεδο που ορίζουν οι ουδέτεροι άξονες όλων των διατομών της δοκού, δηλαδή το επίπεδο $x-z$ ονομάζεται **ουδέτερο επίπεδο**. Η επιφάνεια τομής του ουδέτερου επιπέδου με τη δοκό ονομάζεται **ουδέτερη επιφάνεια**



Σχήμα 1- 2 Ισοδύναμες παραστάσεις των ορθών τάσεων σε ορθογωνικη διατομή δοκού

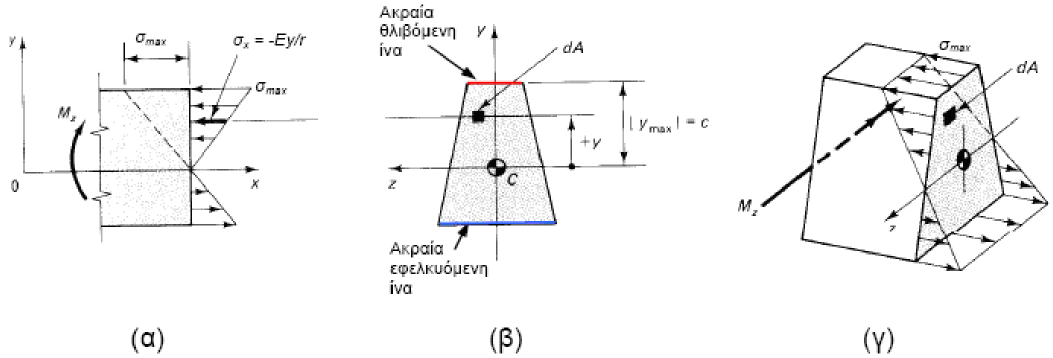


Σχήμα 1- 3 Τρισδιάστατη παράσταση ορθών τασεων,ουδετερος άξονας και ουδέτερη επιφάνεια.

Το επόμενο βήμα στην ανάλυσή μας είναι η μαθηματική διατύπωση της συνθήκης ισορροπίας ροπών. Για το τμήμα της δοκού στο Σχ. 1.4α η ισορροπία ροπών γράφεται ως εξής:

$$M_Z = -\int_A (\sigma_x dA) y \Rightarrow M_Z = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA \qquad 1.6$$

Σημειώνουμε ότι το αρνητικό πρόσημο στην εξίσωση (1.6) προκύπτει λόγω του ότι θετικό $\sigma_x dA$ (εφελκυστική δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας) και θετικό *y* αντιστοιχούν σε δεξιόστροφη, δηλαδή αρνητική ροπή. Έτσι με την αλλαγή πρόσημου η ροπή γίνεται αριστερόστροφη, δηλαδή θετική.



Σχήμα 1- 4 2 Τμήμα δοκού σε καθαρή κάμψη

Στη μηχανική, το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέρος της εξ. (1.6) ονομάζεται **δευτεροβάθμια ροπή επιφάνειας** ή **ροπή αδράνειας** και συμβολίζεται με *I* . Επειδή η ροπή αδράνειας αναφέρεται σε συγκεκριμένο άξονα, τον *ουδέτερο άξονα Z* στη συγκεκριμένη περίπτωση, το *I* συνοδεύεται από ένα δείκτη που καθορίζει τον άξονα ως προς τον οποίο γίνεται ο υπολογισμός του:

$$I_Z = \int_A y^2 \, dA \tag{1.7}$$

Με βάση τον ορισμό της ροπής αδράνειας I_Z , η εξίσωση(1.6) δίνει:

$$\frac{1}{r} = \frac{M_Z}{EI_Z} \tag{1.8}$$

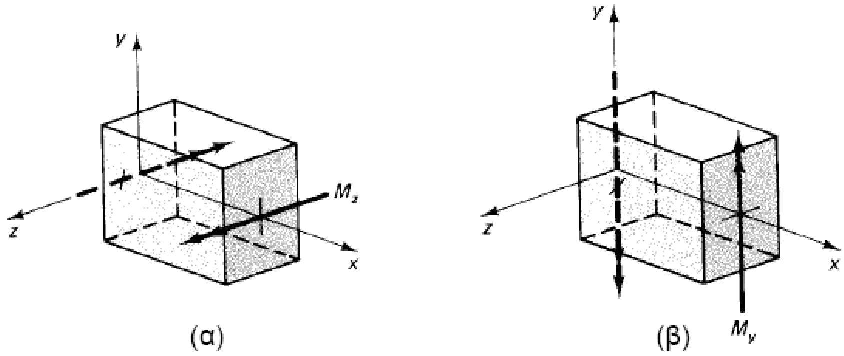
Η τελευταία σχέση είναι ιδιαίτερα χρήσιμη: συνδέει την ακτίνα καμπυλότητας με τη ροπή κάμψης (ως αποτέλεσμα των εξωτερικών φορτίων), το μέτρο ελαστικότητας του υλικού και τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της διατομής της δοκού, όπως αυτά περιγράφονται από τη ροπή αδράνειας. Τέλος, συνδυάζοντας τις εξίσωση (1.8) και (1.4) καταλήγουμε στην εξαιρετικά σημαντική σχέση ελαστικής κάμψης δοκών:

$$\sigma_x = -\frac{M_Z}{I_Z} y \tag{1.9}$$

Μέσω της εξίσωσης (1.9) υπολογίζεται η ορθή τάση σε οποιοδήποτε σημείο μίας διατομής με γνωστές ποσότητες τη ροπή κάμψης, τη ροπή αδράνειας ως προς τον ουδέτερο άξονα και την απόσταση του σημείου αυτού από τον ουδέτερο άξονα. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι θετική M_Z δίνει θετικές (εφελκυστικές) τάσεις κάτω από τον ουδέτερο άξονα (αρνητικό y) και αρνητικές (θλιπτικές) πάνω από τον ουδέτερο άξονα. Η εξίσωση (1.9) απεδείχθη για κάμψη της δοκού κατά την οποία τα εξωτερικά φορτία προκαλούν ροπές κάμψης ως προς τον άξονα *z* (βλ. Σχ. 1.5α, στο οποίο φαίνεται και το διάνυσμα θετικής ροπής M_Z). Αν η διατομή έχει ως άξονα συμμετρίας εκτός από τον άξονα *y* και τον άξονα *z* (π.χ. ορθογωνική διατομή) και τα εξωτερικά φορτία είναι τέτοια ώστε να προκαλούν ροπή κάμψης ως προς τον άξονα *y* (βλ. Σχ. 1.5β, στο οποίο φαίνεται το διάνυσμα θετικής ροπής M_Y), η αντίστοιχη σχέση για τις ορθές τάσεις είναι:

$$s_X = + \frac{M_Y}{I_Y} Z \tag{1.10}$$

Η αλλαγή προσήμου στην εξίσωση (1.10) είναι απαραίτητη ώστε για θετική ροπή M_Y να προκύπτουν θετικές (εφελκυστικές) τάσεις στα σημεία με θετικό *z* και αρνητικές (θλιπτικές) στα σημεία με αρνητικό *z* . Ένας δεύτερος τρόπος να καταλάβουμε το αντίθετο πρόσημο της εξίσωση (1.10) είναι να φανταστούμε ότι το τμήμα της δοκού στο Σχ. 1.5β περιστρέφεται κατά 90ο αριστερόστροφα ως προς άξονα *x* . Αν γίνει αυτό, η εικόνα καταπόνησης της δοκού είναι ακριβώς ίδια με αυτήν του Σχ. 1.5α, ο άξονας *y* συμπίπτει με τον *z* του Σχ. 1.5α και ο *z* με τον -y του Σχ. 1.5α. Συνεπώς για την καταπόνηση του Σχ. 1.5β μπορεί να εφαρμοστεί η εξίσωση (1.9) με M_Y αντί M_Z , I_Y αντί I_Z και - Z αντί y . Περισσότερα για την κάμψη δοκών λόγω ροπής M_Y δίνονται σε παρακάτω ενότητα.



Σχήμα 1- 5 3 Ορισμός θετικών ροπών για κάμψη ως προς άξονα (α) z και (β) y

Εξετάζοντας και πάλι την εξίσωση(1.9) παρατηρούμε ότι η μέγιστη θλιπτική τάση $\sigma_{c,\max}$ στη διατομή δρα εκεί όπου το *y* είναι θετικό και μέγιστο (έστω ίσο με C_C), δηλαδή σε όλα τα σημεία της πάνω πλευράς της διατομής. Η πλευρά αυτή αποτελεί τη λεγόμενη **ακραία θλιβόμενη ίνα** (Σχ. 1.4β). Αντίστοιχα, η μέγιστη εφελκυστική τάση $\sigma_{t,\max}$ στη διατομή δρα εκεί όπου το *y* είναι αρνητικό και κατ' απόλυτη τιμή μέγιστο (έστω ίσο με C_t), δηλαδή σε όλα τα σημεία της κάτω πλευράς της διατομής. Η πλευρά αυτή αποτελεί τη λεγόμενη **ακραία εφελκυόμενη ίνα** (Σχ. 1.4β). Η κατ' απόλυτη τιμή μέγιστη ορθή τάση δρα εκεί όπου το *y* είναι κατ' απόλυτη τιμή μέγιστο. Συμβολίζοντας τη μέγιστη αυτή τιμή *y* max ίση με C και παραλείποντας (για απλότητα) τους δείκτες, έχουμε:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I} C = \frac{M}{\left(\frac{I}{C}\right)} = \frac{M}{Z_{el}} \qquad 1.11$$

Ο λόγος της ροπής αδράνειας προς τη μέγιστη απόσταση από τον ουδέτερο άξονα ονομάζεται **ελαστική ροπή αντίστασης** ή **ελαστικό μέτρο διατομής** και συμβολίζεται με το Z_{el}. Αν η απόσταση C_t είναι διαφορετική από την C_C, τότε ορίζονται δύο ελαστικές ροπές αντίστασης, $Z_{el,t}$ και $Z_{el,c}$, για τη μέγιστη εφελκυστική τάση και τη μέγιστη θλιπτική τάση, αντίστοιχα: $Z_{el.t} = \frac{I}{C_t}$, $Z_{el,c} = \frac{I}{C_C}$. Μία από τις βασικές υποθέσεις της τεχνικής θεωρίας για την καθαρή κάμψη δοκών είναι ότι οι μόνες τάσεις που αναπτύσσονται είναι οι σ_X, ενώ όλες οι άλλες είναι μηδέν ($\sigma_Y = \sigma_Z = \tau_{XY} = \tau_{XZ} = \tau_{YZ} = 0$). Οι τάσεις σ_X συνοδεύονται από παραμορφώσεις ε_X και, με βάση το λόγο Poisson, από εγκάρσιες παραμορφώσεις $\varepsilon_Y = \varepsilon_Z = -\nu\varepsilon_X$. Αυτό σημαίνει ότι η διατομή πάνω από τον ουδέτερο άξονα (στη θλιβόμενη περιοχή) "διογκώνεται" στην εγκάρσια διεύθυνση, αλλά κάτω από τον ουδέτερο άξονα "συστέλλεται", όπως δείχνει το Σχ. 1.1. Επειδή δε οι εγκάρσιες παραμορφώσεις αυξάνονται γραμμικά με την απόσταση από τον ουδέτερο άξονα (όπως και οι ε_X), στη δοκό αναπτύσσεται και μία δευτερεύουσα καμπυλότητα, πάνω στο επίπεδο *y* -*z* (Σχ. 1.6), που όμως δεν έχει πρακτική σημασία και γενικά αμελείται. Εν περιλήψει, στην πορεία εξαγωγής της βασικής εξίσωσης(1.9) για την κάμψη δοκών υιοθετήθηκαν τρεις βασικές συνθήκες, όπως ακριβώς έγινε και στην ανάλυση ράβδων υπό μοναξονική φόρτιση και όπως θα γίνει και σε επόμενα κεφάλαια για άλλου είδους καταπονήσεις (π.χ. στρέψη):

Συνθήκες στατικής ισορροπίας, για τον προσδιορισμό της ροπής κάμψης σε μία διατομή.

1. Γεωμετρικές (κινηματικές) συνθήκες, μέσω της υπόθεσης ότι επίπεδες διατομές πριν την κάμψη παραμένουν επίπεδες και μετά την παραμόρφωση της δοκού. Αυτό οδήγησε στο συμπέρασμα ότι οι ορθές παραμορφώσεις μεταβάλλονται γραμμικά με την απόσταση από τον ουδέτερο άξονα.
2. Καταστατικοί νόμοι των υλικών (νόμος του Hooke), μέσω των οποίων έγινε συσχέτιση των ορθών παραμορφώσεων με τις ορθές τάσεις.

Σημειώνουμε και πάλι ότι η παραπάνω ανάλυση ισχύει επακριβώς για ελαστικές δοκούς σε καθαρή κάμψη, αλλά με καλή προσέγγιση και για δοκούς σε συνήθη κάμψη. Τέλος επισημαίνουμε ότι σε περιοχές εφαρμογής συγκεντρωμένων ροπών ή δυνάμεων ενδέχεται να εμφανίζονται ανωμαλίες στην κατανομή των τάσεων, όπως και στη μονοαξονική φόρτιση. Οι ανωμαλίες αυτές επηρεάζουν γενικά μικρές περιοχές της δοκού, οι οποίες, βάσει της *αρχής του Saint Venant*, εντοπίζονται σε μήκος της δοκού περίπου ίσο με το ύψος.

1.4 Κέντρο βάρους διατομής, πρωτοβάθμιες ροπές και ροπές αδράνειας

Στα προηγούμενα αναφέρθηκε ότι ο ουδέτερος άξονας διέρχεται από το κέντρο βάρους. Επίσης ορίσθηκε η ροπή αδράνειας ως προς άξονα (τον ουδέτερο άξονα της διατομής) και έγινε χρήση της για τον υπολογισμό των ορθών τάσεων. Η λεπτομερής διαδικασία εύρεσης κέντρου βάρους διατομής και ροπών αδράνειας δεν αποτελεί αντικείμενο αυτού του συγγράμματος, αλλά για λόγους πληρότητας περιλαμβάνεται στην ενότητα αυτή με τρόπο συνοπτικό.

1.4.1 Πρωτοβάθμιες ροπές επιφάνειας και κέντρο βάρους

Θεωρούμε μία τυχαία διατομή με εμβαδόν A πάνω στο επίπεδο με σύστημα αξόνων y -□z (Σχ. 1.7). Η **πρωτοβάθμια** ή **στατική ροπή** της συνολικής επιφάνειας A ως προς τον άξονα z υπολογίζεται αθροίζοντας τις πρωτοβάθμιες ροπές όλων των στοιχείων της διατομής με εμβαδόν dA , κάθε μία από τις οποίες ισούται με τον εμβαδόν dA επί την απόσταση y .

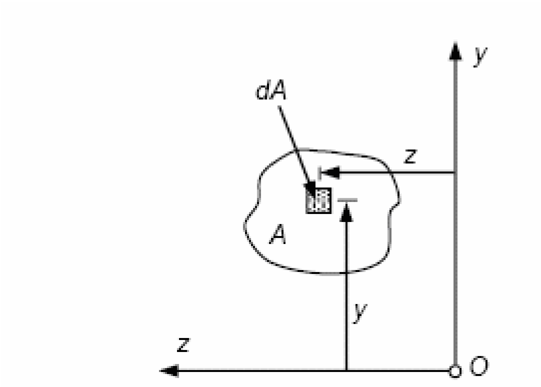
$$S_Z = \int_A dS_Z = \int_A y\,dA$$

1.12α

Ομοίως για τον άξονα *y* :

$$S_Y = \int_A dS_Y \int_A z\,dA$$

1.12β



Σχήμα 1- 6 Επιφάνεια διατομής σε σύστημα αξόνων y-z

Το κέντρο βάρους *C* της επιφάνειας *A* είναι χαρακτηριστικό σημείο της, με συντεταγμένες (y_C , z_C) που δίνονται από τις σχέσεις:

$$y_C = \frac{\int_A y\,dA}{A} = \frac{S_Z}{A} \qquad z_C = \frac{\int_A z\,dA}{A} = \frac{S_Y}{A}$$

1.13

Από τις εξίσωση (1.13) βλέπουμε ότι **η πρωτοβάθμια ροπή μίας επιφάνειας ως προς έναν άξονα ισούται με το γινόμενο του εμβαδού της επιφάνειας και της απόστασης του κέντρου βάρους της από τον άξονα αυτόν**. Επίσης συμπεραίνουμε ότι αν ο άξονας ως προς τον οποίο υπολογίζεται η πρωτοβάθμια ροπή διέρχεται από το κέντρο βάρους, η πρωτοβάθμια ροπή ως προς τον άξονα αυτόν ισούται με μηδέν. Συνεπώς **αν μία επιφάνεια έχει έναν άξονα συμμετρίας, αυτός ο άξονας διέρχεται από το κέντρο βάρους της επιφάνειας** και άρα **η πρωτοβάθμια ροπή ως προς έναν άξονα συμμετρίας είναι πάντοτε ίση με μηδέν**. Αν μία επιφάνεια μπορεί να υποδιαιρεθεί σε τμήματα απλού σχήματος (π.χ. ορθογώνια παραλληλόγραμμα, τρίγωνα κλπ) των οποίων τα εμβαδά και τα κέντρα βάρους μπορούν εύκολα να καθορισθούν, η πρωτοβάθμια ροπή της συνολικής επιφάνειας μπορεί να υπολογισθεί αθροίζοντας τις πρωτοβάθμιες ροπές των επιμέρους τμημάτων ως προς τον ίδιο άξονα:

$$S_Z = \sum_{i=1}^{n} S_{Z,I} \qquad S_Y = \sum_{I=1}^{n} S_{Y,I}$$

1.14

Αν τα εμβαδά των επιμέρους τμημάτων μιας επιφάνειας *A* είναι *A*1, *A*2 , ... , *An* και οι αποστάσεις των κέντρων βάρους τους από τον άξονα *z* είναι y_{C1} , y_{C2} , ... , y_{CN} και από τον άξονα *y* είναι z_{C1} , z_{C2} , ... , z_{CN} , τότε οι εκφράσεις (1.14) μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$S_Z = Ay_C = A_1 y_{C1} + A_2 y_{C2} + \ldots + A_n y_{cn} = \sum_{i=1}^{n} A_i y_{ci} \qquad 1.15α$$

$$S_Y = Az_C = A_1 Z_{C1} + A_2 Z_{C2} + \ldots + A_n Z_{cn} = \sum_{i=1}^{n} A_i Z_{ci}$$

1.15β

Συνεπώς, οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους *C* της επιφάνειας *A* ως προς το σύστημα αξόνων *y* - *z* δίνονται από τις σχέσεις:

1.4.2 Δευτεροβάθμιες ροπές επιφάνειας

Θεωρούμε και πάλι τυχαία διατομή με εμβαδόν *A* πάνω στο επίπεδο με σύστημα αξόνων *y* - *z* (Σχ. 1.7). Η **δευτεροβάθμια ροπή** ή **ροπή αδράνειας** της επιφάνειας *A* ως προς τον άξονα *z* υπολογίζεται αθροίζοντας τις δευτεροβάθμιες ροπές όλων των στοιχείων της διατομής με εμβαδόν *dA* , κάθε μία από τις οποίες ισούται με τον εμβαδόν *dA* επί y^2 .

$$I_z = \int_A di_z = \int_A y^2 dA$$

1.17α

Ομοίως για τον άξονα *y* :

$$I_y = \int_A dI_y = \int_A z^2 dA$$

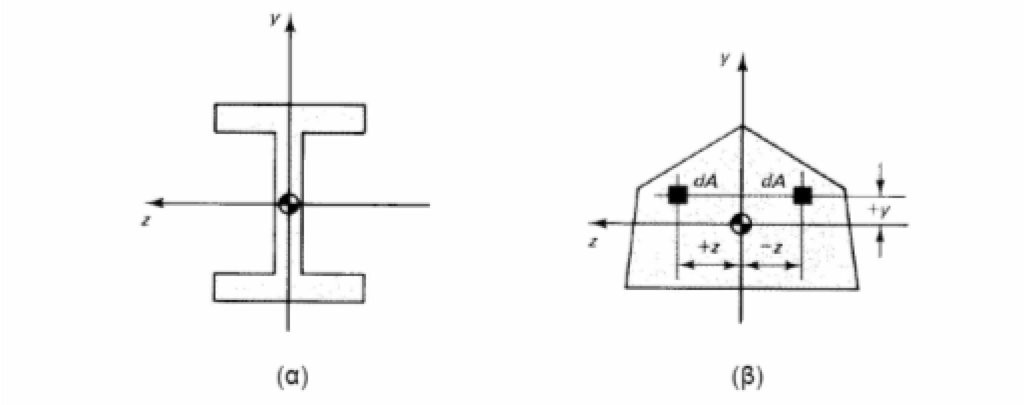
1.17β

Αντιστοίχως ορίζεται και η **φυγόκεντρος ροπή** ή **ροπή εκτροπής** της επιφάνειας *A* ως προς τους άξονες y και z. Αυτή υπολογίζεται αθροίζοντας τις ροπές εκτροπής όλων των στοιχείων της διατομής με εμβαδόν dA , κάθε μία από τις οποίες ισούται με το εμβαδόν dA επί yz

$$I_{yz} = \int_A dI_{yz} = \int_A yz\,dA$$

1.17γ

Η εξίσωση (1.17γ) οδηγεί στο συμπέρασμα ότι **αν ένας τουλάχιστον από τους άξονες *y* και *z* είναι άξονας συμμετρίας η ροπή εκτροπής είναι μηδέν**. Αυτό φαίνεται εύκολα στη διατομή του Σχ. 1.7β με άξονα συμμετρίας έστω τον άξονα *y* , όπου λόγω συμμετρίας για κάθε $y(z)dA$ υπάρχει και ένα $y(-z)dA$, και το άθροισμά τους δίνει μηδέν.



Σχήμα 1- 7 Διατομή με (α) διπλή και (β) απλή συμμετρία

Τέλος ορίζεται η δευτεροβάθμια ροπή επιφάνειας ως προς άξονα *x* ή **πολική ροπή** *J* με τρόπο αντίστοιχο, μόνο που το γινόμενο που ολοκληρώνεται είναι $r^2 dA$, όπου *r* η απόσταση του *dA* από τον άξονα *x* (κάθετος στο επίπεδο *y* - *z* και προς τα έξω):

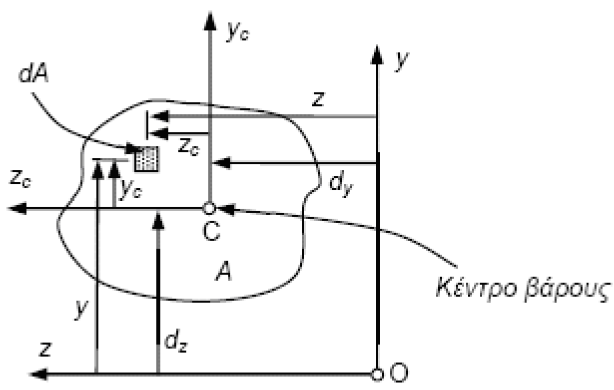
$$J = \int_A r^2\,dA$$

1.18

Από τις εξίσωση (1.17α-β) και (1.18) διαπιστώνουμε ότι η πολική ροπή αδράνειας *J* ισούται με το άθροισμα των ροπών αδράνειας I_y και I_z :

$$J = \int_A r^2 dA = \int_A (y^2 + z^2) dA = I_y + I_z$$ 1.19

Αν οι άξονες y και z διέρχονται από το κέντρο βάρους της επιφάνειας A, δηλαδή είναι κεντροβαρικοί άξονες, οι αντίστοιχες δευτεροβάθμιες ροπές καλούνται **κεντροβαρικές δευτεροβάθμιες ροπές**. Σε πολλές περιπτώσεις οι κεντροβαρικές ροπές είναι γνωστές (ή εύκολα υπολογίσιμες) και ζητείται ο υπολογισμός των δευτεροβάθμιων ροπών ως προς ένα άλλο σύστημα αξόνων, μη κεντροβαρικό. Η μέθοδος υπολογισμού δίνεται παρακάτω. Θεωρούμε διατομή με εμβαδόν A πάνω στο επίπεδο με τυχαίο σύστημα αξόνων y -□z και κεντροβαρικό σύστημα αξόνων y_c - z_c. Οι άξονες z_c και y_c απέχουν απόσταση dz και dy από τους άξονες z και y, αντίστοιχα (Σχ. 1.8). Έστω ότι οι κεντροβαρικές δευτεροβάθμιες ροπές είναι Iz_c, Iy_c και $Iy_c z_c$. Το ζητούμενο είναι οι I_z, I_y και I_{yz} ως προς το σύστημα αξόνων y -□z. Εξ ορισμού γράφουμε:



Σχήμα 1- 8 Επιφάνεια διατομής σε σύστημα αξόνων y-z

$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_A (y_c + d_z)^2 dA = \int_A y_c^2 dA + 2d_z \int_A y_c dA + d_z^2 \int_A dA$$ 1.20

Το πρώτο από τα ολοκληρώματα στο δεξιό μέρος της παραπάνω εξίσωσης είναι η κεντροβαρική δευτεροβάθμια ροπή Iz_c, το δεύτερο ισούται με μηδέν (διότι αντιπροσωπεύει την πρωτοβάθμια ροπή ως προς κεντροβαρικό άξονα) και το τρίτο ισούται με το εμβαδόν A. Έτσι είναι

$$I_z = Iz_c + d_z^2 A$$ 1.21α

Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι

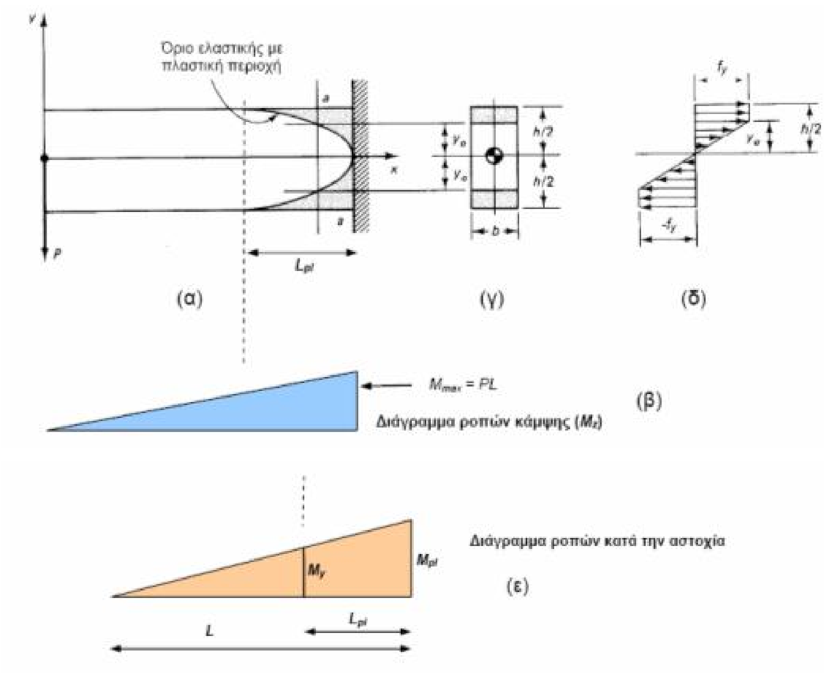
$$Iy = Iy_c + d_y^2 A \qquad 1.21β$$

$$Iyz = Iy_c z_c + d_y d_z A \qquad 1.21γ$$

Οι παραπάνω εξίσωση (1.21) αποτελούν τη μαθηματική διατύπωση του θεωρήματος που είναι γνωστό ως **θεώρημα παραλλήλων αξόνων** ή **θεώρημα του Steiner** και διευκολύνουν στον υπολογισμό δευτεροβάθμιων ροπών ως προς μη κεντροβαρικό σύστημα αξόνων. Από τις εξισωση (1.21α-β) συμπεραίνουμε ότι οι ροπές αδράνειας Iz_c και Iy_c είναι πάντα μικρότερες από οποιεσδήποτε άλλες ως προς άξονες παράλληλους με τους *z* και *y* , αντίστοιχα.

1.8 Πλαστική ανάλυση δοκού ή ανάλυση για την οριακή κατάσταση αντοχής

Με τον όρο **πλαστική ανάλυση** ή **πλαστική μελέτη** ή **ανάλυση για την οριακή κατάσταση αντοχής** εννοούμε συνήθως τις μεθόδους που χρησιμοποιούμε για τον καθορισμό των μέγιστων φορτίων που μπορεί να παραλάβει μία κατασκευή, θεωρώντας ότι οι παραμορφώσεις στα υλικά φθάνουν στις μέγιστες δυνατές τιμές τους. Είναι γεγονός ότι η σχετική περιπλοκότητα του αντικειμένου δεν επιτρέπει εκτενή κάλυψη στα πλαίσια αυτού του συγγράμματος, γι αυτό και εδώ, μέσω ενός απλού παραδείγματος, θα περιορισθούμε μόνο στην ανάδειξη ορισμένων από τις βασικές αρχές της πλαστικής ανάλυσης. Θεωρούμε ότι ο πρόβολος του Σχ. 1.9α έχει μήκος *L* και καταπονείται σε κατακόρυφη συγκεντρωμένη δύναμη *P* στο ελεύθερο άκρο. Το υλικό του προβόλου θεωρείται ελαστοπλαστικό με ίση τάση διαρροής σε θλίψη και εφελκυσμό (f_y). Το ζητούμενο είναι ο υπολογισμός της μέγιστης δύναμης που μπορεί να ασκηθεί στον πρόβολο και ο προσδιορισμός της περιοχής του προβόλου όπου κατά την αστοχία θα έχουν αναπτυχθεί πλαστικές παραμορφώσεις, δηλαδή οι τάσεις στο υλικό θα είναι ίσες με την τάση διαρροής. Από το διάγραμμα ροπών κάμψης κατά μήκος του στοιχείου (δίνεται στο Σχ. 1.9β) βλέπουμε ότι η μέγιστη ροπή κάμψης αναπτύσσεται στη διατομή της πάκτωσης και έχει τιμή $M\max = PL$. Η διατομή αυτή καταπονείται εντονότερα από οποιαδήποτε άλλη, για αυτό και εκεί μας ενδιαφέρει ο υπολογισμός των τάσεων. Αν φανταστούμε την P να αυξάνεται σταδιακά από την τιμή μηδέν, για κάποια συγκεκριμένη τιμή της P η ροπή Mmax γίνεται ίση με M_y , δηλαδή η μέγιστη τάση στην ακραία ίνα της διατομής πάκτωσης(πάνω και κάτω) μόλις που φθάνει την τάση διαρροής. Η τιμή αυτή ονομάζεται φορτίο διαρροής και συμβολίζεται με P_y . Όταν συμβεί αυτό ισχύει $M_y = P_y L$. Για $P > P_y$ στη διατομή της πάκτωσης αρχίζει να εμφανίζεται πλαστική περιοχή, όπου οι τάσεις είναι ίσες με την τάση διαρροής. Η μέγιστη τιμή της δύναμης P αναπτύσσεται όταν η πλαστική περιοχή στη διατομή της πάκτωσης καλύψει ολόκληρη τη διατομή, οπότε οι τάσεις θα είναι παντού (στη συγκεκριμένη διατομή μόνο) ίσες με την τάση διαρροής. Η τιμή αυτή, που ονομάζεται **φορτίο αστοχίας** ή **φορτίο κατάρρευσης**, και συμβολίζεται με P_u , δίνεται από τη σχέση $M_{pl} = P_u L$.



Σχήμα 1- 9 Μήκος πλαστικοποίησης σε πρόβολο από ελαστικοπλαστικο υλικό

Παρατηρώντας το διάγραμμα ροπής κάμψης για $P = P_y$ και $P = P_u$ (Σχ. 1.9ε) συμπεραίνουμε ότι κατά την αστοχία η διαρροή του υλικού έχει επεκταθεί όχι μόνο σε όλο το ύψος της διατομής πάκτωσης αλλά και σε όλες τις γειτονικές διατομές όπου $M > M_y$ (Σχ. 1.9α). Ο βαθμός πλαστικοποίησης στις διατομές αυτές (δηλαδή το εύρος των πλαστικών περιοχών, εκεί όπου η τάση έχει φθάσει την τάση διαρροής) εξαρτάται από την τιμή της ροπής. Στη διατομή πάκτωσης όπου $M = M_{pl}$ η πλαστικοποίηση είναι πλήρης, ενώ στη διατομή όπου $M = M_y$ δεν υφίσταται πλαστική περιοχή. Σε οποιαδήποτε ενδιάμεση διατομή, έστω την $a - a$ του Σχ. 1.25α, η πλαστική περιοχή (πάνω και κάτω τμήματα στο Σχ. 1.25γ) και η ελαστική περιοχή μπορούν να βρεθούν με βάση τη ροπή M και την κατανομή ορθών τάσεων στη συγκεκριμένη διατομή (Σχ. 1.9δ). Από τα Σχ. 1.9β-γ γράφουμε:

$$|M| = 2\int_{0}^{Y_0}\left(\frac{y}{y_0} f_y\right) y(bdy) + 2\int_{y_0}^{h} f_y\, y(bdy) = \frac{bh^2}{4} f_y - \frac{by_0^2}{3} f_y = M_{pl} - \frac{by_0^2}{3} f_y \qquad 1.33$$

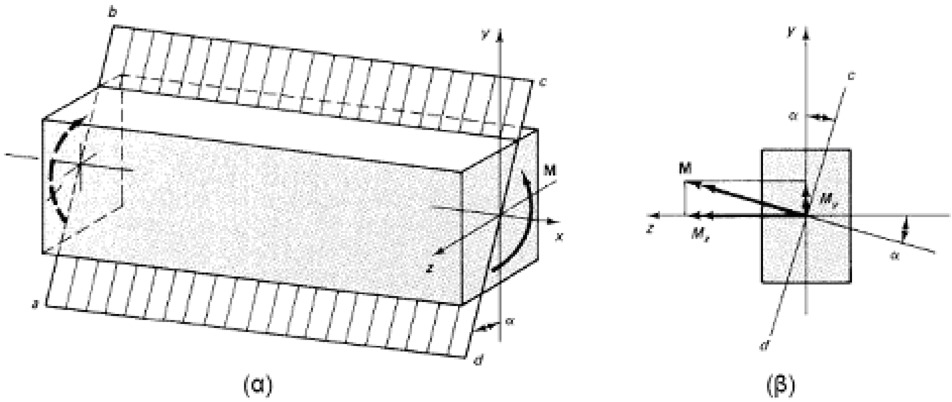
Από την εξισωση (1.33) για δεδομένη ροπή *M* ($M_y \le M \le M_{PL}$) μπορεί να υπολογισθεί το y_0 και άρα το ύψος της ελαστικής περιοχής ($2y_0$) και κάθε τμήμα της πλαστικής περιοχής ($h/2 - y_0$). Τέλος θα υπολογίσουμε το μήκος της δοκού στο οποίο κατά την αστοχία, δηλαδή όταν η ροπή κάμψης είναι M_{pl} , υπάρχει πλαστική περιοχή. Ουσιαστικά ζητάμε το τμήμα της δοκού όπου η ροπή κάμψης είναι μεγαλύτερη από τη ροπή διαρροής M_y . Το μήκος *Lpl* του τμήματος αυτού, γνωστό ως **μήκος πλαστικοποίησης**, υπολογίζεται από τα όμοια τρίγωνα του Σχ. 1.9ε:

1.4 Κάμψη ως προς τους κύριους άξονες

Η Ενότητα 1.9 περιγράφει τη γενική περίπτωση κάμψης δοκού ασύμμετρης διατομής ως προς τυχαίο σύστημα κεντροβαρικών αξόνων. Όπως είδαμε αραπάνω, αν οι άξονες εκτός από κεντροβαρικοί είναι και κύριοι, η ροπή εκτροπής I_{yz} είναι μηδέν. Στην περίπτωση αυτή η εξισωση (1.44) απλοποιείται στη μορφή:

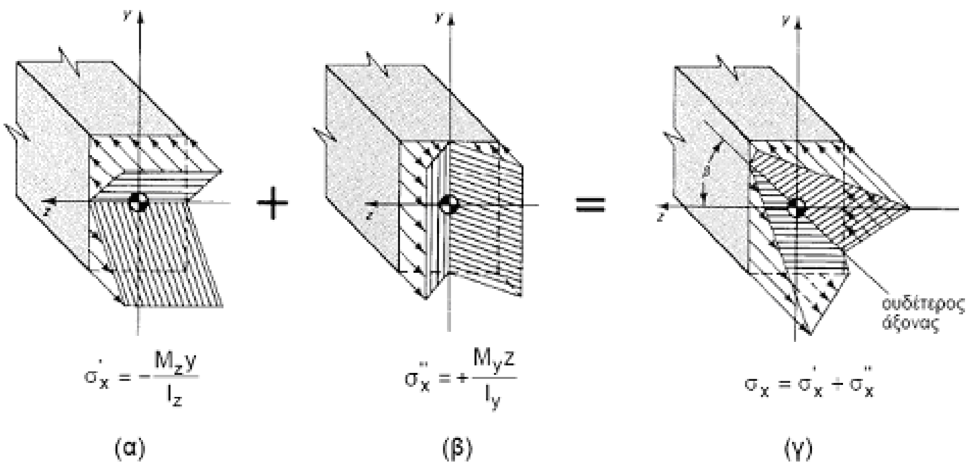
$$\sigma_c = -\frac{M_z}{I_y} y + \frac{M_y}{I_y} Z \qquad 1.53$$

όπου M_z και M_y οι ροπές κάμψης στη διατομή ως προς τους κύριους κεντροβαρικούς άξονες *z* και *y* , αντίστοιχα. Ουσιαστικά η εξισωση (1.53) δείχνει ότι η κάμψη στην περίπτωση αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως επαλληλία δύο ανεξάρτητων περιπτώσεων κάμψης, με καθεμία ως προς έναν από τους κύριους άξονες [βλ. άθροισμα εξισωση (1.9) – (1.10)]. Η εξισωση (1.53) έχει συνήθη εφαρμογή σε προβλήματα δοκών στις οποίες η διατομή έχει άξονες συμμετρίας, όπως π.χ. η ορθογωνική διατομή του Σχ. 1.3



Σχήμα 1- 10 Ασύμμετρη κάμψη δοκού διατομής με δυο άξονες συμμετρίας

Στη δοκό του Σχ. 1-11, η ροπή *M* που ασκείται πάνω στο επίπεδο *abcd* (το οποίο σχηματίζει γωνία a με τον άξονα *z*) αναλύεται στα διανύσματα M_y ($= M \sin a$) και M_z ($= M \cos a$). Η τάση σε οποιοδήποτε σημείο της διατομής με συντεταγμένες *y* και *z* υπολογίζεται από την εξίσωση (1.53). Γραφικά, οι τάσεις λόγω Mz δίνονται στο Σχ. 1.11α και αυτές λόγω *My* στο Σχ. 1.11β, ενώ η επαλληλία τους (το άθροισμά τους) δίνεται στο Σχ. 1.11γ



Σχήμα 1- 11 Επαλληλία ορθών τάσεων για κάμψη δοκού με διατομή διπλής συμμετρίας

Η θέση του ουδέτερου άξονα προσδιορίζεται θέτοντας στην εξ. (1.46) $I_{yz} = 0$:

$$\tan\beta = \frac{M_Y}{M_Z}\frac{I_z}{I_y} = \frac{M\sin\alpha}{M\cos\alpha}\frac{I_z}{I_y} \Rightarrow \tan\beta = \frac{I_z}{I_y}\tan\alpha \qquad 1.54$$

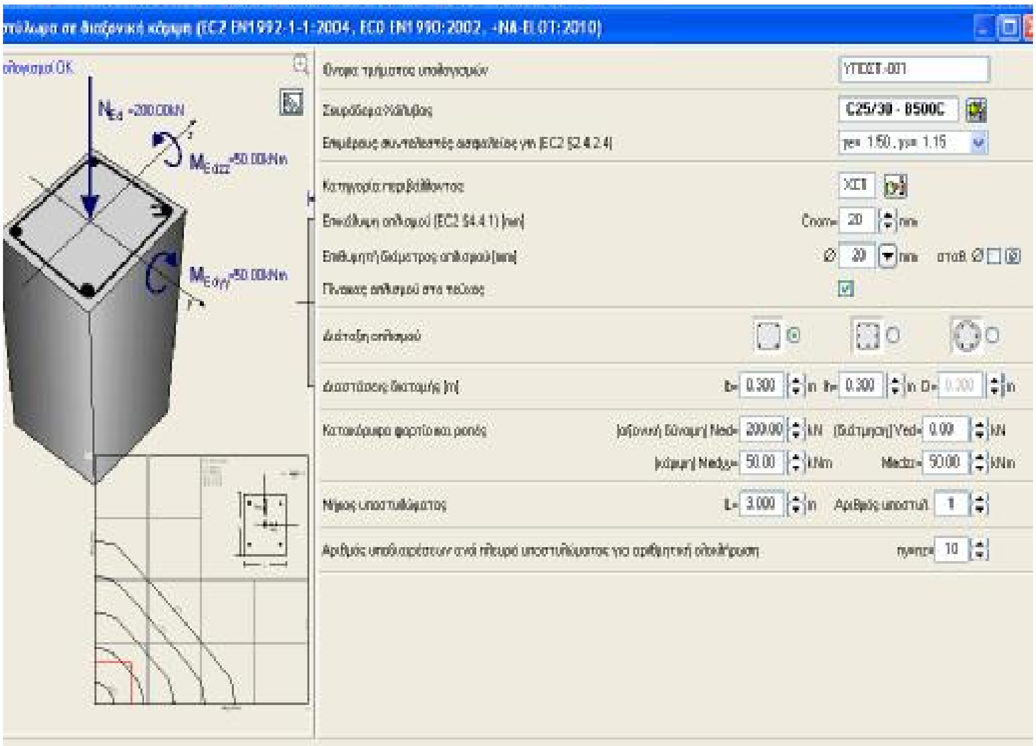
Η τελευταία σχέση δείχνει ότι εκτός αν ισχύει $I_Z = I_y$, ή αν η γωνία □ είναι 0ο ή 90^o (οπότε έχουμε μονοαξονική κάμψη), **η γωνία που σχηματίζει ο ουδέτερος άξονας διαφέρει από τη γωνία που σχηματίζει το επίπεδο κάμψης**.

1.5 Εφαρμογή του προγράμματος Runet σε δομικές κατασκευές

Εφαρμογή 1^η

Επίλυση προβλήματος **υποστυλώματος** σε διαξονική κάμψη

Οι διαστάσεις της διατομής είναι 30x30 cm. Κατακόρυφο φορτίο 200 κΝ, Διαξονική ροπή κάμψη 50 Kn m. Beton C25/30, χάλυβας B500C , συντελεστές ασφαλείας γc=1,5 και γs= 1,15. Υψος L=3 m.
Τα αποτελέσματα δείχνονται στην Εικόνα 1-1.



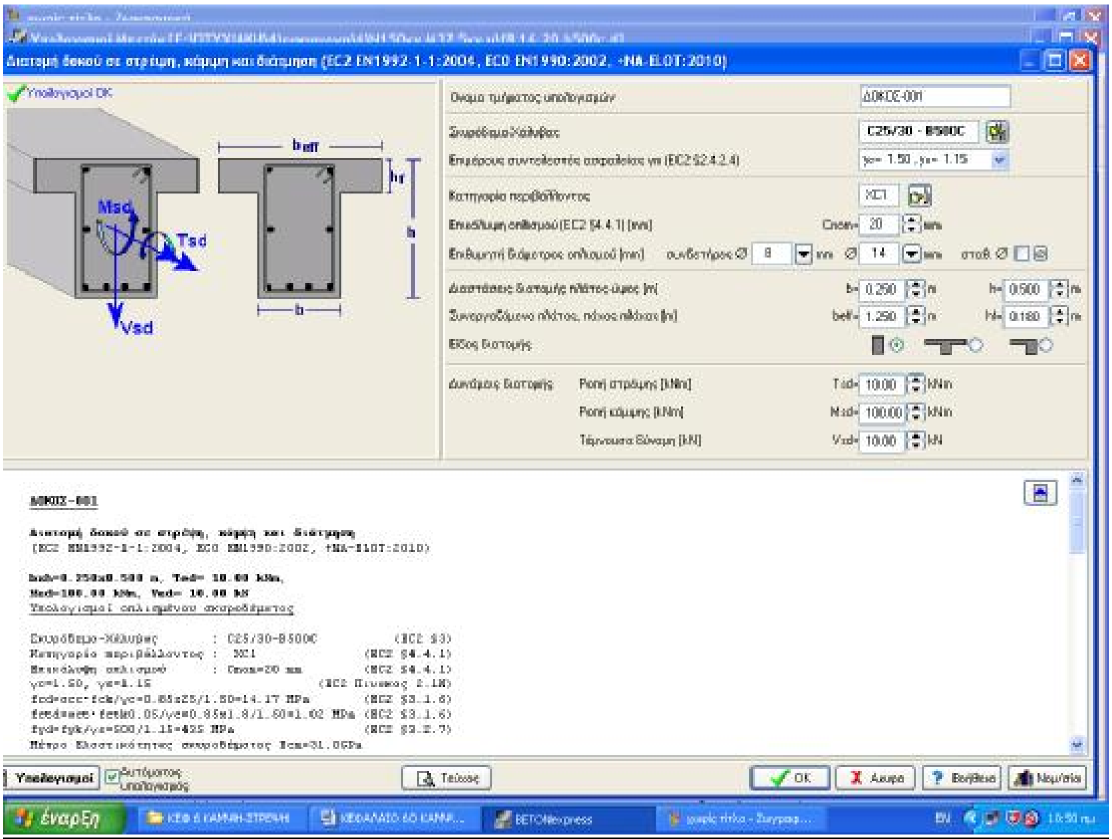
Αποτελέσματα

```
Σκυρόδεμα-Χάλυβας        : C25/30-B500C           (EC2 §3)
Κατηγορία περιβάλλοντος :  XC1               (EC2 §4.4.1)
Επικάλυψη οπλισμού      : Cnom=20 mm         (EC2 §4.4.1)
γc=1.50, γs=1.15                          (EC2 Πινακας 2.1N)
fcd=αcc·fck/γc=0.85x25/1.50=14.17 MPa      (EC2 §3.1.6)
fctd=αct·fctk0.05/γc=0.85x1.8/1.50=1.02 MPa (EC2 §3.1.6)
fyd=fyk/γs=500/1.15=435 MPa                (EC2 §3.2.7)
Μέτρο Ελαστικότητας σκυροδέματος Ecm=31.0GPa
Διαστάσεις, φορτία

Υποστύλωμα ορθογωνικής διατομής b=0.300 m, h=0.300 m
Φορτία , Φορτία, αξονικό Ned=200.00kN (θλίψη), ροπές Medxx=50.00kNm, Medyy=50.00kNm
Ωφέλιμο ύψος διατομής d=h-d1, d1=d2=Cnom+Øs+Ø/2=20+8+20/2=38mm, dx=262mm, dy=262mm
Διαστασιολόγηση για θλίψη με μικρή εκκεντρότητα (ULS) (EC2 §6.1, §9.2.1)

Ned=200.00kN, Med,yy=50.00kNm, Med,zz=50.00kNm
Προσεγγιστική διαστασιολόγηση με Πίνακες (d1/h=0.10)
Kordina K, Bemessungshilfsmittel zu EC 2 Teil 1
Planung von Stahlbeton ..., Berlin, Beuth, 1992
My/(bh²fcd)=0.11, Mz/(hb²fcd)=0.11, N/(bh·fcd)=-0.13
As·fyk/(bh·fck)=0.35, As= 1207mm², As/Ac=1.34%

Διαστασιολόγηση με αριθμητική ολοκλήρωση
Διαγράμματα μονοαξονικής κάμψης
προερχόμενο από αριθμητική ολοκλήρωση με
χωρισμό σε 10x10=100 τμήματα διατομής
Ned=200.00kN (θλίψη),
Medyy=50.00kNm, Medzz=50.00kNm
C25/30-B500C
b=300mm,  h=300mm
dy=262mm, dz=262mm, d1=d2=38mm
d1/h=0.127, d2/b=0.127
ez=Medyy/Ned= 50.00/200.00=0.250m=250mm
ey=Medzz/Ned= 50.00/200.00=0.250m=250mm
zsz=h/2-d1=300/2-38=112mm, ez=250mm>zsz=112mm
zsy=b/2-d1=300/2-38=112mm, ey=250mm>zsy=112mm
As,tot=1125mm², As,tot/Ac=1.25%

As,tot=11.25cm²
Ned=200.00 <= 0.65AcFcd=1000x0.65x0.300x0.300x16.67=975.20 kN (EC8 §5.4.3.2.1, ΕΚΩΣ, §18.4.2)

Ελάχιστος διαμήκης οπλισμός, As>=0.0020Ac, {Zs>=8, As,min={4Z8 ( 2.01cm²) (EC2 §9.5.2.2)
 στις μη κρίσιμες περιοχές από 0.30m μέχρι H-0.30m : συνδετήρες Øs>=6, Scl,t<=300mm
 στις κρίσιμες περιοχές [0-0.30m] και [H-0.30m, H ]: συνδετήρες Øs>=6, Scl,t<=180mm
Βασικό μήκος αγκύρωσης Lbd=570mm =0.570m (EC2 Εξ.8.3)

Διαμήκης οπλισμός: 4Ø20  (12.56cm²)

Οπλισμός συνδετήρων: Συνδετήρες Ø 8/30.0  [h:0.30m~H-0.30m], Ø 8/18.0  [h:0~0.30m, H-0.30m~H]
ΥΠΟΣΤ.-001
Κατάλογος οπλισμού
```

Συμπέρασμα: Για την ανωτέρω φόρτιση του υποστυλώματος απαιτείται οπλισμός 4 διαμήκη σίδερα Φ20 (20mm) και συνδετήρες Φ8 (8 mm) ανά 30 cm μεταξύ τους απόσταση.

Εφαρμογή 2.

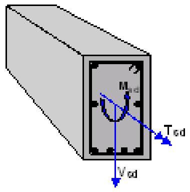
Δοκός σε στρέψη-κάμψη και διάτμηση



Αποτελέσματα

Project Beton Σελ. 1

1. ΔΟΚΟΣ-001



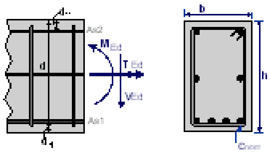
Διατομή δοκού σε στρέψη, κάμψη και διάτμηση
(EC2 EN1992-1-1:2004, EC0 EN1990:2002, +NA-ELOT:2010)

bxh=0.250x0.500 m, Ted= 10.00 kNm,
Med=100.00 kNm, Ved= 10.00 kN

Υπολογισμοί οπλισμένου σκυροδέματος

Σκυρόδεμα-Χάλυβας : C25/30-B500C (EC2 §3)
Κατηγορία περιβάλλοντος : XC1 (EC2 §4.4.1)
Επικάλυψη οπλισμού : Cnom=20 mm (EC2 §4.4.1)
$\gamma c=1.50$, $\gamma s=1.15$ (EC2 Πίνακας 2.1N)
$fcd=\alpha cc\cdot fck/\gamma c=0.85x25/1.50=14.17$ MPa (EC2 §3.1.6)
$fctd=\alpha ct\cdot fctk0.05/\gamma c=0.85x1.8/1.50=1.02$ MPa (EC2 §3.1.6)
$fyd=fyk/\gamma s=500/1.15=435$ MPa (EC2 §3.2.7)
Μέτρο Ελαστικότητας σκυροδέματος Ecm=31.0GPa

2. Διαστάσεις, φορτία



Πλάτος δοκού b=0.250 m, ύψους h=0.500 m

Ροπή κάμψης Med=100.00 kNm
Τέμνουσα Ved= 10.00 kN
Ροπή στρέψης Ted= 10.00 kNm

Ωφέλιμο ύψος διατομής d1=Cnom+Øs+0.5Ø=20+8+0.5x14=35mm, d2=35mm, d=500-35=465mm

3. Διαστασιολόγηση έναντι αστοχίας σε κάμψη (ULS) (EC2 EN1992-1-1:2004, §6

Διαστασιολόγηση έναντι αστοχίας σε κάμψη: Allgower,G.-Avak,R. Bemessungstafeln nach Eu
fur Rechteck und Plattenbalkenquerschnitte, In: Beton - und Stahlbetonbau 87 (1992)
Οπλισμός έναντι κάμψης (δεν απαιτείται θλιβόμενος οπλισμός)
Med=100.00kNm bw=250mm d=465mm Kd= 2.33 x/d=0.17 εc2/εs1=-3.5/16.6 ks=2.48, **As1= 5.33c**
Ελάχιστος διαμήκης οπλισμός, As>=0.26bd·fctm/fyk, (As,min= 1.57cm^2) (EC2
Μέγιστος διαμήκης οπλισμός, As<=0.04Ac , (As,max=50.00cm^2) (EC2

Οπλισμός κάμψης:2Ø14+2Ø12 (5.34cm^2) **(κάτω πέλμα)**

4. Διαστασιολόγηση για τέμνουσα και στρέψη (ULS) (EC2 EN1992-1-1:200

Ο υπολογισμός της ροπής αντοχής σε στρέψη Trd,max βασίζεται σε πρότυπο ιδεατό χωροδικτ
με γωνία κλίσης θλιβομένων διαγωνίων θ=40.0° (1.0<cot40.0°=1.19<2.5) (]

Αντοχή λοξής θλίψης σκυροδέματος Vrdmax (EC2 §6.
$Vrdmax=\alpha cw\cdot bw\cdot z\cdot v1\cdot fcd/(\cot\theta+\tan\theta)$, Ved/max(Vrdmax)=0.02, θ=40.0° cotθ=1.19 tanθ=0.8
αcw=1.00 z=0.9d, fck=25.0<=60Mpa v1=0.6[1-fck/250]=0.6[1-25/250]=0.540, fcd=14.17Mpa
Vrdmax=0.001x1.00x250x0.9x465x0.540x14.17/2.03=394.4 kN

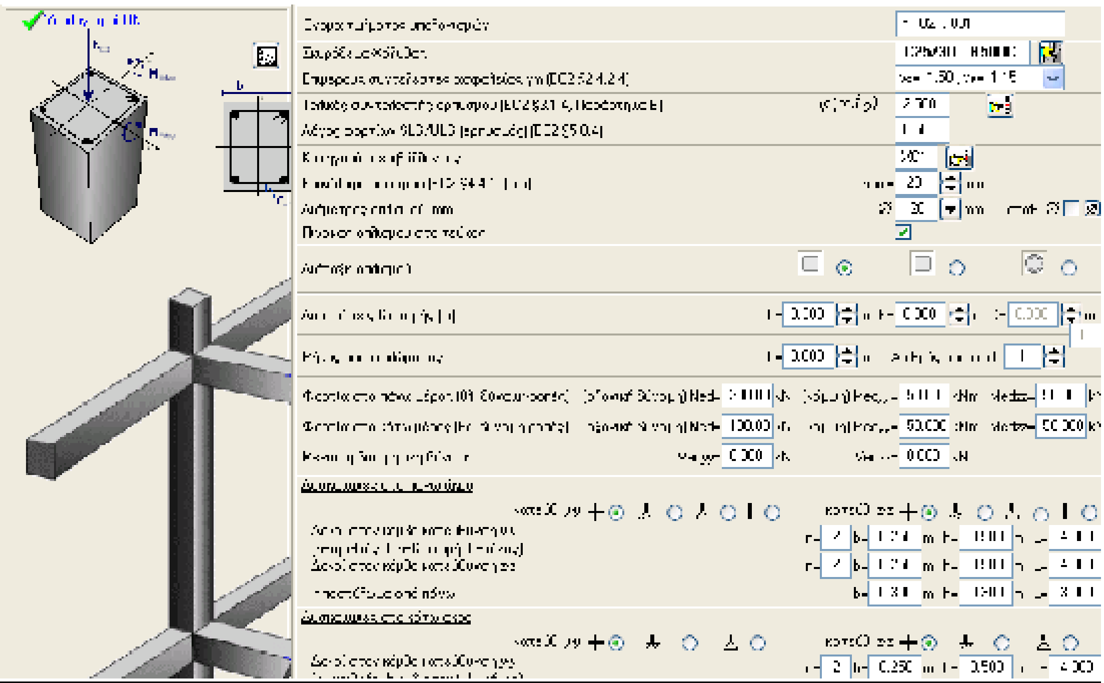
Ροπή αντοχής σχεδιασμού σε στρέψη (E(
$Trd,max=2\nu\cdot\alpha cw\cdot fcd\cdot Ak\cdot tef\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta$, θ=40.0° (]
αcw=1.00, ν=0.6(1-fck/250)=0.6(1-25.00/250)=0.540 (EC2 Εξ.(
tef=A/u=0.500x0.250/(2x0.500+2x0.250)=0.083m = 83mm >=2xd1=2x35=70mm
Ak=(0.500-0.083)x(0.250-0.083)=0.069m^2 = 69444mm^2, uk=2x(0.167+0.417)=1.167m = 1167mm
Trd,max=2x0.540x1.00x0.001x14.17x69444x0.083x0.643x0.766=43.61kNm

Τέμνουσα και στρέψη (Ted/Trd,Max)+(Ved/Vrd,Max)<=1 (EC2 EN1992-1-1:2(
(10.00/43.61)+(10.00/394.37)=0.25<=1

Συμπέρασμα: 1. Για την φόρτιση απαιτούνται οπλισμός σε **κάμψη** 2Φ14 και 2 Φ12 στο κάτω πέλμα της πλακοδοκού.
2. Οπλισμός **στρέψης-διάτμησης**: δίτμητοι συνδετήρες Ø 8/14.5 (A_{sw}/s= 6.94cm^2/m)
Διαμήκης οπλισμός για **στρέψη**: Ø10/18.0 (6Ø10) (4.36cm^2/m)

<u>Εφαρμογή 3.</u>

<u>Διαξονική κάμψη και λυγισμός σε υποστύλωμα</u>



Αποτελέσματα

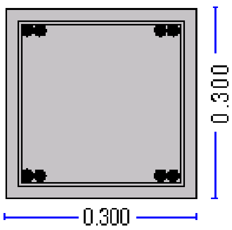
Project Beton Σελ. 1

1. ΥΠΟΣΤ.-001

Υποστύλωμα σε διαξονική κάμψη και λυγισμό
(EC2 EN1992-1-1:2004, EC0 EN1990:2002, +NA-ELOT:2010)

<u>Υπολογισμοί οπλισμένου σκυροδέματος</u>

Σκυρόδεμα-Χάλυβας : C25/30-B500C (EC2 §3)
Κατηγορία περιβάλλοντος : XC1 (EC2 §4.4.1)
Επικάλυψη οπλισμού : Cnom=20 mm (EC2 §4.4.1)
γc=1.50, γs=1.15 (EC2 Πινακας 2.1N)
fcd=αcc·fck/γc=0.85x25/1.50=14.17 MPa (EC2 §3.1.6)
fctd=αct·fctk0.05/γc=0.85x1.8/1.50=1.02 MPa (EC2 §3.1.6)
fyd=fyk/γs=500/1.15=435 MPa (EC2 §3.2.7)
Μέτρο Ελαστικότητας σκυροδέματος Ecm=31.0GPa



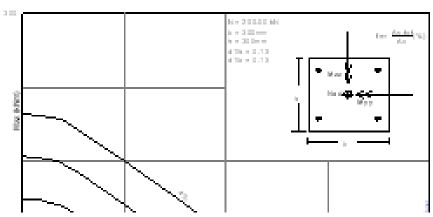
2. Διαστάσεις, φορτία

Υποστύλωμα ορθογωνικής διατομής b=0.300 m, h=0.300 m, μήκος υποστυλώματος L=3.000 m
Φορτία στο πάνω άκρο, Φορτία, αξονικό Ned=200.00kN (θλίψη), ροπές Medxx=50.00kNm, Medyy=50.00kNm
Φορτία στο κάτω άκρο, Φορτία, αξονικό Ned=100.00kN (θλίψη), ροπές Medxx=50.00kNm, Medyy=50.00kNm
Ωφέλιμο ύψος διατομής d=h-d1, d1=d2=Cnom+Øs+Ø/2=20+8+20/2=38mm, dx=262mm, dy=262mm

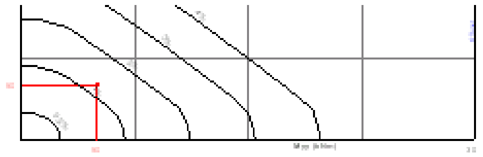
3. Διαστασιολόγηση για θλίψη με μικρή εκκεντρότητα (ULS) (EC2 §6.1, §9.2.1)

Ned=200.00kN, Med,yy=50.00kNm, Med,zz=50.00kNm

<u>Διαστασιολόγηση με αριθμητική ολοκλήρωση</u>
Διαγράμματα μονοαξονικής κάμψης
προερχόμενο από αριθμητική ολοκλήρωση με
χωρισμό σε 10x10=100 τμήματα διατομής
Ned=200.00kN (θλίψη),
Medyy=50.00kNm, Medzz=50.00kNm
C25/30-B500C
b=300mm, h=300mm
dy=262mm, dz=262mm, d1=d2=38mm



dy=262mm, dz=262mm, d1=d2=38mm
d1/h=0.127, d2/b=0.127
ez=Medyy/Ned= 50.00/200.00=0.250m=250mm
ey=Medzz/Ned= 50.00/200.00=0.250m=250mm
zsz=h/2-d1=300/2-38=112mm, ez=250mm>zsz=112mm
zsy=b/2-d1=300/2-38=112mm, ey=250mm>zsy=112mm
As,tot=1125mm², As,tot/Ac=1.25%



As,tot=11.25cm²

Ned=200.00 <= 0.65AcFcd=1000x0.65x0.300x0.300x16.67=975.20 kN (EC8 §5.4.3.2.1, ΕΚΩΣ, §18.4.2

Ελάχιστος διαμήκης οπλισμός, As>=0.0020Ac, Øs>=8, As,min=4Ø8 (2.01cm²) (EC2 §9.5.2.2
Μέγιστος διαμήκης οπλισμός, As<=0.04Ac, (As,max=36.00cm²) (EC2 §9.5.2.3
Εγκάρσιος οπλισμός, συνδετήρες με ελάχιστη Øs σε αποστάσεις Scl,t (EC2 §9.5.3
στις μη κρίσιμες περιοχές από 0.30m μέχρι H-0.30m : συνδετήρες Øs>=6, Scl,t<=300mm
στις κρίσιμες περιοχές [0-0.30m] και [H-0.30m, H]: συνδετήρες Øs>=6, Scl,t<=180mm
Βασικό μήκος αγκύρωσης Lbd=570mm =0.570m (EC2 Εξ.8.3

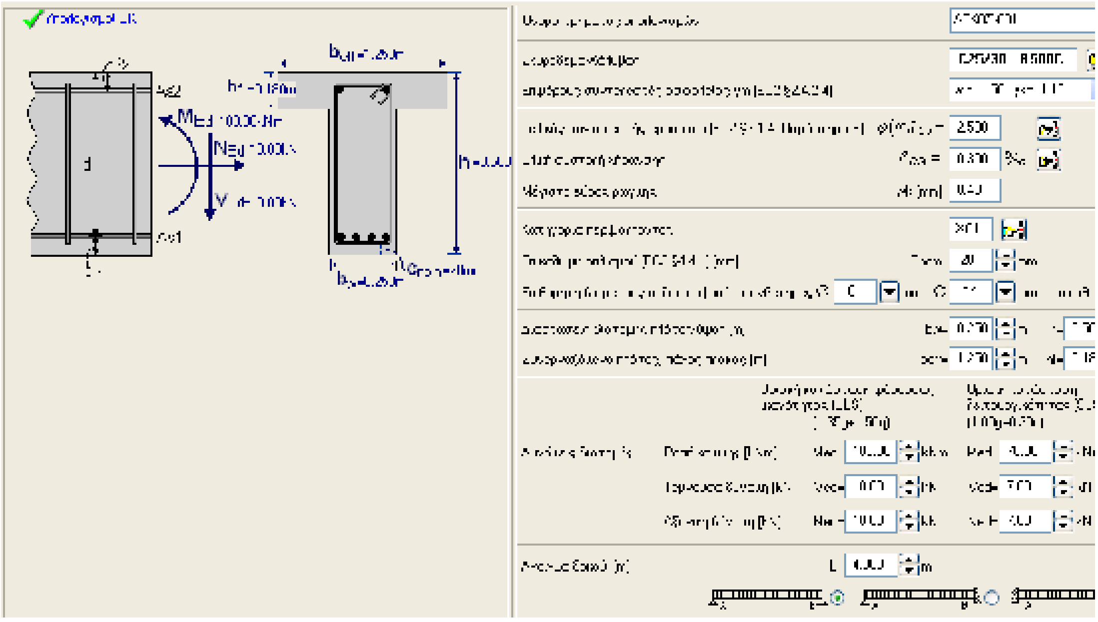
διαμήκης οπλισμός: **4Ø20** (12.56cm²)

Οπλισμός συνδετήρων: Συνδετήρες **Ø 8/30.0** h:0.30m~H-0.30m], **Ø 8/16.0** h:0~0.30m, H-0.30m~H]

Συμπέρασμα: <u>Διαμήκης οπλισμός 4 Φ20</u>
<u>Και συνδετήρες Φ8/30 cm και Φ8/16cm</u>

Εφαρμογή 4η

Πλακοδοκός σε **κάμψη-διάτμηση** και **αξονική δύναμη**

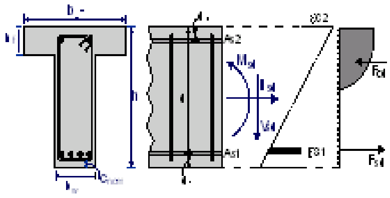


Αποτελέσματα

1. ΔΟΚΟΣ-001

Διατομή δοκού σε κάμψη, διάτμηση και αξονική δύναμη
(EC2 EN1992-1-1:2004, EC0 EN1990:2002, +NA-ELOT:2010)

bxh=0.250x0.500 m, Med=100.00 kNm,
beff=1.250 m, hf=0.180 m
Ved= 10.00 kN, Ned= 10.00 kN



Υπολογισμοί οπλισμένου σκυροδέματος

Σκυρόδεμα-Χάλυβας : C25/30-B500C (EC2 §3)
Κατηγορία περιβάλλοντος : XC1 (EC2 §4.4.1)
Επικάλυψη οπλισμού : Cnom=20 mm (EC2 §4.4.1)
γc=1.50, γs=1.15 (EC2 Πινακας 2.1N)
fcd=αcc·fck/γc=0.85x25/1.50=14.17 MPa (EC2 §3.1.6)
fctd=αct·fctk0.05/γc=0.85x1.8/1.50=1.02 MPa (EC2 §3.1.6)
fyd=fyk/γs=500/1.15=435 MPa (EC2 §3.2.7)
Μέτρο Ελαστικότητας σκυροδέματος Ecm=31.0GPa

2. Διαστάσεις, φορτία

Πλάτος κορμού δοκού bw=0.250 m, ύψους h=0.500 m
Συνεργαζόμενο πλάτος beff=1.250 m, πάχος πλάκας hf=0.180 m
Ωφέλιμο ύψος διατομής d1=Cnom+Øs+0.5Ø=20+8+0.5x14=35mm, d2=35mm, d=500-35=465mm

Οριακή κατάσταση φέρουσας ικανότητας (ULS)
Ροπή κάμψης Med=100.00kNm, τέμνουσα Ved=10.00kN, αξονική δύναμη Ned=10.00kN (εφελκυσμός)
Οριακή κατάσταση λειτουργικότητας (SLS)
Ροπή κάμψης Med=70.00kNm, τέμνουσα Ved=7.00kN, αξονική δύναμη Ned=7.00kN (εφελκυσμός)

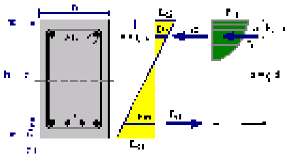
3. Διαστασιολόγηση για κάμψη με αξονική δύναμη (ULS) (EC2 §6.1, §9.2.1)

Οπλισμός έναντι κάμψης με αξονική δύναμη (δεν απαιτείται θλιβόμενος οπλισμός)
Διαστασιολόγηση έναντι αστοχίας σε κάμψη: Allgower,G.-Avak,R. Bemessungstafeln nach Eurocode 2 fur Rechteck und Plattenbalkenquerschnitte, In: Beton - und Stahlbetonbau 87 (1992)
Med=100kNm Nsd= 10kN beff=1250mm d=465mm Kd= 5.26 x/d=0.06 εc2/εs1=-1.2/20.0 ks=2.34, As1= 5.16cm²

x=0.06x465=28<hf=180mm ουδέτερη γραμμή μέσα στην πλάκα
Ελάχιστος διαμήκης οπλισμός, As>=0.26bd·fctm/fyk, (As,min= 1.57cm²) (EC2 §9.2.1.1.1)
Μέγιστος διαμήκης οπλισμός, As<=0.04Ac , (As,max=50.00cm²) (EC2 §9.2.1.1.3)

Διαμήκης οπλισμός:**2Ø14+2Ø12** (5.34cm²) (κάτω πέλμα)

3.1. Φέρουσα ικανότητα διατομής σε κάμψη (EC2 EN1992-1-1:2004, §6.1)



bw=250mm, h=500mm, bf=1250mm, hf=180mm, d=465mm, As1=534mm², As2=0mm²
εc2=-1.22‰, εs1=19.78‰, As1/b·d=0.00092(0.092%)
x/d=εc2/(εc2+εs1)=1.22/(1.22+19.78)=0.058, x=27.0mm
ar=0.486, ka=0.355, Fc=ar·b·x·fcd=Fs1=232.53kN, As1=Fs1/fyd=535mm²
z=d-ka·x=([1-ka·εc2/(εc2+εs1)]d, z/d=1.0-0.355x0.058=0.979, z=455.4mm,
Kd²=1/(0.486·0.058·0.979·14.17)=2.552 mm²/N, Kd=1.598
Καμπτική αντοχή Mr=b·d²/Kd²=[10^{-6}]x1250x465²/2.552=106.00kNm
x=27.0 mm<= Hf= 180mm ουδέτερος άξονας στην πλάκα
Καμπτική αντοχή (εc2/εs1=1.22/19.78) Mr =106.00kNm

Συμπέρασμα: 1. Διαμήκης οπλισμός 2Φ14 και 2Φ12
2. Οπλισμός διάτμησης Φ8/34.5

Κεφάλαιο 2ο ΘΕΩΡΙΕΣ ΑΣΤΟΧΙΑΣ ΔΟΜΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

2.1 Περί τάσεων-Κύκλος του Mohr

2α) Τασεις στο εσωτερικο σωματος ευρισκομενου σε δυαξονικη αξονικη κατασταση.

Εστω σώμα που ευρίσκεται σε εντατική κατάσταση λογω συστηματος εξωτερικων δυναμεων που ισορροπουν, και το σημειο Α της μαζας του. Το σημειο Α του εν λογω σωματος θα ισορροπει και αυτο υπο την επιδραση των τασεων που εξασκει το σωμα στο στοιχειωδες αυτο σημειο. Το εν λογω σημειο Α παρισταται με ενα απειροστο παραλληλεπιπεδο (σχημα 2.1). Το ανυσμα της εξασκουμενης ανα εδρας τασης αναλυεται σε μια ορθη (καθετος) ταση και σε μια διατμητικη ταση υπο τυχουσα γωνια, η οποια διατμητικη ταση αναλυεται σε αλλες δυο συνιστωσες, κατα τους αντιστοιχους αξονες του τρισορΘογωνιου συστηματος αναφορας που εκλεξαμε. Οι τασεις αυτες ονομαζονται με την βοηθεια δυο δεικτων και προσημαινονται κατα τον ακολουθο τροπο[2]:

0 πρώτος δείκτης, η δείκτης έδρας, δηλώνει σε ποια εδρα ανηκει (καθετη στον εν λογω αξονα του συστηματος αναφορας) η προς συζητηση ταση.

0 δευτερος δεικτης που χρησιμοποιειται για την προσημανση των τασεων δηλωνει παραλληλια με καποιον απο τους αξονες του εκλεγμενου συστηματος αναφορας. Για την προσημανση των τασεων πρεπει να πουμε οτι οι δε ορθες τασεις θεωρουνται θετικες οταν προκαλουν εφελκυσμο, και αρνητικες οταν προκαλουν θλιψη. Οι δε διατμητικες τασεις προσημαινονται ως θετικες οταν το σχηματιζομενο τμητικο ζευγος ειναι δεξιοστροφο. Αρα στην γενικη περιπτωση (της τριαξονικης εντατικης καταστασεως), αναπτυσσονται στο

σ_{xx}	τ_{xy}	τ_{xy}'	τ_{zy}
σ_{yy}	τ_{xz}	τ_{xz}'	τ_{zx}
σ_{zz}	τ_{yx}	τ_{yx}'	τ_{zx}'
σ_{xx}'	τ_{yz}	τ_{yz}'	τ_{zy}'
σ_{yy}'			
σ_{zz}'			

απειροστο μας παραλληλεπιπεδο οι εξης τασεις.

---

[2] Νικολαΐδης Ν., Σταλημέρος Σερ., και Σπανός Γ., Πτυχιακή Εργασία,Προσδιορισμός ανηγμένων παραμορφώσεων που αναπτύσσονται σε σημείο σώματος υπό την επίδραση διαξονικής έντασης , ΤΕΙ Πειραιά, 1990

Εμεις ομως εξεταζουμε την ειδικη περιπτωση της δυαξονικης η επιπεδης εντατικης καταστασεως κατα την οποια δεχομαστε τη υπαρξη ορθων και διατμητικων τασεων κατα δυο μονο διευθυνσεις, εστω αυτές οι (χχ), (yy). Ως και εκ τουτου οι αναπτυσσομενες κατα την διευθυνση (zz) τασεις ειναι μηδενικες, δηλαδη ολες οι τασεις αυτες που η δρουν επι των εδρων (z) του απειροστου εν λογω παραλληλεπιπεδου, η που οι φορεις των ανυσματων των ειναι παραλληλες με τον αξονα (zz) του τρισορθογωνιου συστηματος αναφορας που εκλεξαμε, ειναι μηδενικες.
Για την μεν πρωτη περιπτωση ειναι προφανες οτι:

$$\sigma_{zz}=\sigma_{zz}'=\tau_{zy}=\tau_{zx}=\tau_{zy}'=\tau_{zx}'=0$$

Μας μένει λοιπόν να δείξουμε ότι και:

$$\tau_{yz}=\tau_{xz}=\tau_{yz}'=\tau_{xz}'=0$$

Εξεταζουμε την ισορροπια των ροπων των δυναμεων που ασκουνταt επι των εδρων του απειροστου αυτου παραλληλεπιπεδου ως προς τον αξονα (χχ). Ως θετικη φορα στις ισορροπιες των δυναμεων οριζεται αυτή των θετικων ημιαξονων του συστηματος αναφορας, ενω ως θετικη φορα των ροπων νοειται αυτη των δεικτων του ωρολογιου. Το ιδιο βαρος δεν λαμβανεται υποψη στους υπολογισμους μας ως απειροστο ανωτερας

$$\tau_{yx}\, S_y\, d_y/2+\tau_{yx}'\, S_y\, d_y/2=0 \Rightarrow \tau_{yx}=-\tau_{yx}' \quad (1\alpha)$$

ταξεως (Β=γο dx dy dz). Αρα λοιπον ισχυει

Ενεργουμε το ιδιο ως προς τον αξονα (yy) και βρισκουμε οτι:

$$\tau_{xy}=\tau_{xy}' \qquad (1\beta)$$

Εν τελει θεωρουμε και το επιπεδο (χz),της οποιας παλι εξεταζουμε την ισορροπια των ροπων των δυναμεων περι του αξονος (zz):

$$\tau_{xz}=-\tau_{xz}' \quad (1\delta)$$

Οι σχεσεις (Ια) μεχρι και (Ιδ) ειναι οι λεγομενες συνθηκες του Le Cauchy και μας επεξηγουν οτι οι διατμητικες τασεις που αναπτυσσονται σε δυο απειροστα επιπεδα, καθετα μεταξυ τους, ειναι κατ απολυτη τιμη ισα.

Εξεταζουμε την ισορροπια των δυναμεων κατα τον αξονα (zz) και εχουμε:

$$\sum F_{zz}=0 \Rightarrow -\tau_{yz} S_y - \tau_{xz} S_x + \tau_{yz}' S_y + \tau_{xz}' S_x = 0 \Rightarrow (1\gamma),(1\delta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\,\tau_{yz}' S_y + 2\,\tau_{xz}' S_x = 0 \quad (2)$$

Ισχυει ομως οτι: $S_y = d_x\, d_z \quad (3)$ $\qquad S_x = d_y\, d_z \quad (4)$

Αρα λοιπον,εχουμε:

$$(2) \Rightarrow (3),(4) \Rightarrow 2d_z[\tau_{yz}'\, d_x + \tau_{xz}'\, d_y] = 0 \quad (5)$$

Η σχεση (5) πληρειται σε καθε περιπτωση αν και μονο αν $\tau_{yz}'=\tau_{xz}'=O$ (6)

Αρα απο τις σχεσεις (Iγ), (Iδ), (6) εχουμε τελικα οτι:

$$\tau_{yz}=\tau_{yz}'=\tau_{xz}=\tau_{xz}' \quad (7)$$

Απομενει,για τον καθορισμο των παραμετρων του προβληματος μας να δειχθει οτι:

$\sigma_{\chi\chi}=\sigma_{\chi\chi}'$ $\sigma_{yy}=\sigma_{yy}'$

Πραγματι, εαν εξετασουμε συμφωνα με τα νεα δεδομενα μας, τις υπαρχουσες παραμετρους τασεων, και συγκεκριμενα εξετασουμε την ισορροπια των δυναμεων, περι του αξονος (χχ) εχουμε οτι:

$$\Sigma F_{\chi\chi}=O ::::> -\sigma_{\chi\chi'} S_\chi + \sigma_{\chi\chi} S_\chi + \tau_{yx} S_y - \tau_{yx'} S_y = O \quad (8)$$

Λογω ομως της σχεσης (Jα) απο την (8) εχουμε οη: $\sigma_{\chi\chi}=\sigma_{\chi\chi}'$ Εργαζομενοι με ομοιο τροπο (δηλαδη εξεταζοντας την ισορροπια δυναμεων περι του αξονος (yy)) εχουμε οτι $\sigma_{yy}=\sigma_{yy}'$. Αρα στην ειδικη περιπτωση της δυαξονικης εντατικης καταστασεως οι τασικοι παραμετροι που αρκουν για την περιγραφη της ειναι, τελικα.,οι εξης (σχημα 2.2):

$\sigma_{\chi\chi}$ σ_{yy} $\tau_{\chi y}$

Απομενει λοιπον να δειξουμε για την περιπτωση αυτη (δυαξονικη εντατικη κατασταση) τι τασεις αναπτυσσονται σε σημειο Α σωματος που βρισκ:εται σε δυαξονικη εντατικη κατασταση, οταν αυτο στραφει κατά γωνια φ. Εστω λοιπον το επιπεδο Φ, της εντατικης καταστασης που παρισταται στο σχημα 2.3, το οποιο σχηματιζει γωνια φ με το επιπεδο (χχ). Θα προσδιορισουμε τις τασεις σφ, τφ που αναπτυσσονται επι του επιπεδου αυτου.

Εστω το απειροστο στοιχειο του σχηματος 2.4. Τουτο θα ισορροπει υπο την επιδραση των ολικων δυναμεων που ενεργουν στο στοιχειο αυτο. Επισης οριζουμε τους βοηθητικους αξονες z1 και z2 .. Η προσημανση των ορθων και διατμητικων τασεων γινεται κατα τα μεχρι τουδε γνωστα της παραγραφου 2α). Επειδη ομως ισχυει οτι τχy=-τyχ στους συμβολισμους μας γραφουμε τχy ασχετα με τον συμβατικο τροπο γραφης τyχ χαρακτηριζοντας ετσι παλι τα αριστεροστροφα τμητικα ζευγη θετικα. Εξεταζουμε την ισορροπια κατα των αξονα z1 και εχουμε:

Γενικά ισχυουν οι τυποι:

$$\sigma\varphi = (\sigma\chi\chi + \sigma yy) \, I \, 2 + (\sigma\chi\chi - \sigma yy) \cos 2\varphi / 2 - \tau\chi y \sin 2\varphi \qquad (12)$$

$$\tau\varphi = (\sigma\chi\chi - \sigma yy) \sin 2\varphi \, I \, 2 + \tau\chi y \cos 2\varphi \qquad (13)$$

Εαν δηλαδη σε σημειο Α σωματος ευρισκομενου σε δυαξονικη εντατικη κατασταση θεωρησω δυο καθετα αναμεταξυ τους επιπε α, που διερχονται απο το σημειο Α, τοτε οταν το απειροστο αυτο σημει στραφει κατα γωνια φ , οι τασεις, ορθες και διατμητικες, που Θα αναπτυχθουν στο επιπεδο Φ, Οα διδονται απο τις σχεσεις (12) και (13). Αν δηλαδη γνωριζω τις τασεις σχχ, σyy, τχy, τοτε οι τασεις σφ, τφ παριστουν τις τασεις που δρουν επι του απειροστου επιπεδ υ που σχηματιζει γωνια φ με το επιπεδο (χχ).

2β) Διερευνηση των σχεσεων (12) και (13)

Οπως παρατηρουμε απο τους τυπους (12) και (13) οι τασεις σφ, τφ ει ναι συναρτησεις που εχουν ως μεταβλητη την γωνια φ. Αρα για την ευρεση των ακροτατων τιμων των δυο αυτων τασικων συναρτησεων φτανει να εξετασουμε για ποια τιμη της γωνιας κλισεως φ μηδενιζεται η πρωτη παραγωγος.

Βλέπουμε γενικά ότι για διαφορςς τιμες του κ εχουμε διαφορετικα επιπεδα:

-Για κ=O εχουμε θ=φ

-Για κ=l εχουμε θ=φ + π/2

-Για κ=2 εχουμε θ=φ + π , το οποιο συμπιπτει με το πρωτο επιπεδο , δηλαδη (κ=O)

Παρατηρούμε οτι για ολες τις δυνατες τιμες του κ,αναγομαστε σε δυ καθετα μεταξυ τους επιπεδα. Αρα υπαρχουν δυο και μονο δυο επιπεδα, τα οποια διερχονται απο το Α και ει ναι αναμεταξυ τους καΟετα, και εμφανιζουν ακροτατες τιμες τις ορθης τασεως. Στο μεν ενα επιπεδο η ορθη τααη λαμβανει μεγιστη τιμη, στο δε αλλο ελαχιστη τιμη. Επι των επιπεδων αυτων δεν αναπτυσσεται διατμητικη τααη. Ονομαζονται δε κυρια επιπεδα, οι δε τασεις σma , σmin ονομαζονται κυριες τασεις.

για ολες τις δυνατες τιμες του κ αναγομαστε σε δυο καινουργια επιπεδα, τα οποια ει ναι καθετα μεταξυ τους και διερχονται απο το σημειο Α. Τα επιπεδα αυτα προκυπτουν δια στροφης της επιβατικης ακτινος απο καποιο κυριο επιπεδο κατα γωνια 45°.Αρα αν γνωριζω τα κυρια επιπεδα, οι διχοτομοι των διεδρων γωνιων οριζουν τα επιπεδα επι των οποιων αναπτυσσεται η μεγιστη διατμητικη ταση. Στα επιπεδα αυτα εκτος της διατμητικης τασεως αναπτυσσεται και ορθη ταση. Στο μεν ενα επιπεδο δρα η τmax , στο δε αλλο επιπεδο δρα η τmín. Αρα οι δυο, κατ απολυτη τιμη, διατμητικες τασεις ανηκουν σε δυο διευθυνσεις που σχηματιζουν με τις κυριες διευθυνσεις γωνια 45.0 Επισης, η μεγιστη διατμητικη ταση που διερχεται απο σημειο σωματος που βρισκεται σε δυαξονικη εντατικη κατασταση, ισουται με την ημιδιαφορα των κυριων τασεων στο σημειο αυτο:

$$\tau_{max} = (\sigma_{max} - \sigma_{min}) / 2 \qquad (14)$$

$$\tau_{(max,min)} = (+ -) \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 / 4 + \tau_{xy}^2} \qquad (15)$$

Εαν τυχει και οι αρχικες διευθυνσεις ειναι κυριες, δηλαδη οταν μας δινεται οτι τχy =O, οι τασεις που αναπτυσσονται δια στροφης του απειροστου επιπεδου θα δινονται απο τους τυπους (16) και (17) αντιστοιχα

$$\sigma_\phi = (\sigma_{max} + \sigma_{min}) / 2 + (\sigma_{max} - \sigma_{min}) \cos 2\phi / 2 \qquad (16)$$

$$\tau_\phi = (\sigma_{max} - \sigma_{min}) \sin 2\phi / 2 \qquad (17)$$

2γ) Κυκλος του Mohr - Γραφικη παρασταση τασεων

Ο κυκλος του Mohr ειναι μια γραφικη μεθοδος προσδιορισμου της εντατικης καταστασεως σε σημειο σωματος που τελει υπο ενταση, δυαξονικη η και τριαξονικη. Συμφωνα με την μεθο ο αυτη καθε εντατικη κατασταση (για την περιπτωση μας, της δυαξονικης εντατικης καταστασης, καθε ζευγος συντεταγμενων σ, τ) παρισταται με ενα σημειο του επιπεδου, κατα απλο και εποπτικο τροπο. Για την γραφικη παρασταση της

εντατικης καταστασεως χρησιμοποιουμε ορθογωνιο συστημα συντεταγμενων στο οποιο ι ορθες τασεις σημειωνονται στον αξονα των τετμημενων, ενω οι διατμητικες τασεις σημεινωνται στον αξονα των τεταγμενων. Καθε σημειο του επιπεδου αντιστοιχει σε καρτεσιανο ζευγος αποτελουμενο απο μια ορθη και μια διατμητικη ταση που αντιστοιχει σε μια συγκεκριμενη εντατικη κατασταση. Η προσημανση των τασεων γινεται οπως αυτη ειχε αναπτυχθει στην ενοτητα 2β).

Εστω το σημειο Α του σωματος που ευρισκεται σε επιπεδη εντατικη κατασταση συμφωνα με τα μεχρι τουδε γνωστα. Στην προηγουμενη ενοτητα δειξαμε την ισχυ των τυπων (12) και (13), τους οποιους και θα μετασχηματισουμε στη συνεχεια.

$$[\, \sigma_\phi - (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) / 2 \,]^2 = [\, (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos 2\phi / 2 - \tau_{xy} \sin 2\phi \,]^2 \qquad (18)$$

$$\tau_\phi^2 = [\, (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\phi / 2 + \tau_{xy} \cos 2\phi \,]^2 \qquad (19)$$

Προσθετοντας κατα μελη τις σχεσεις (22) και (23),και αναπτυσσοντας τις ταυτοτητες θα εχουμε

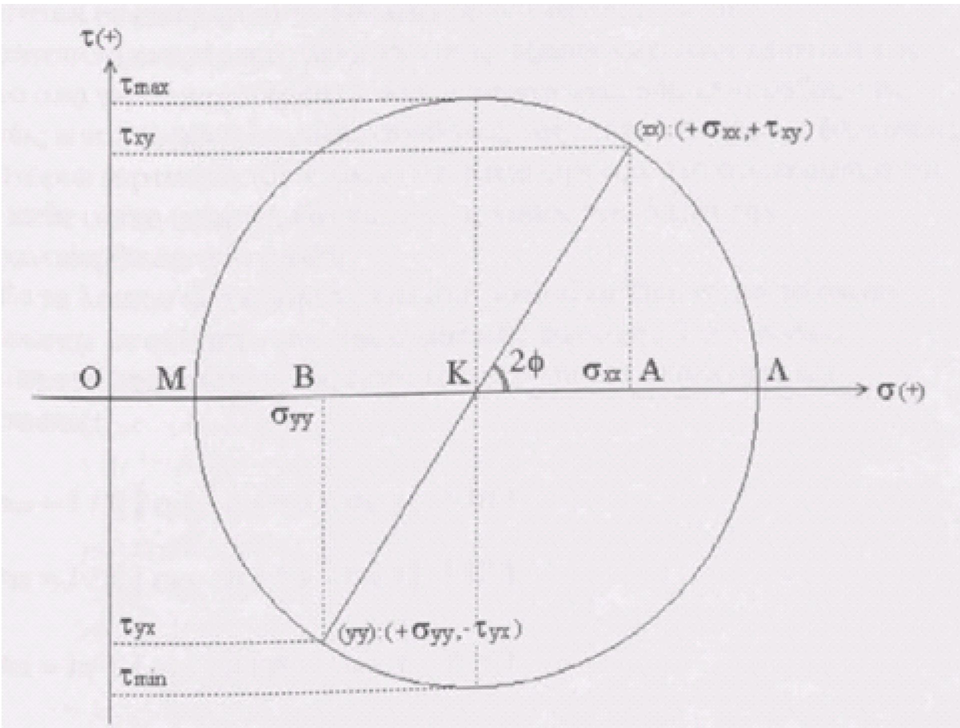
$$[\, \sigma_\phi - (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) / 2 \,]^2 + \tau_{xy}^2 = \left(\sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 / 4 + \tau_{xy}^2} \right)^2$$

(20)

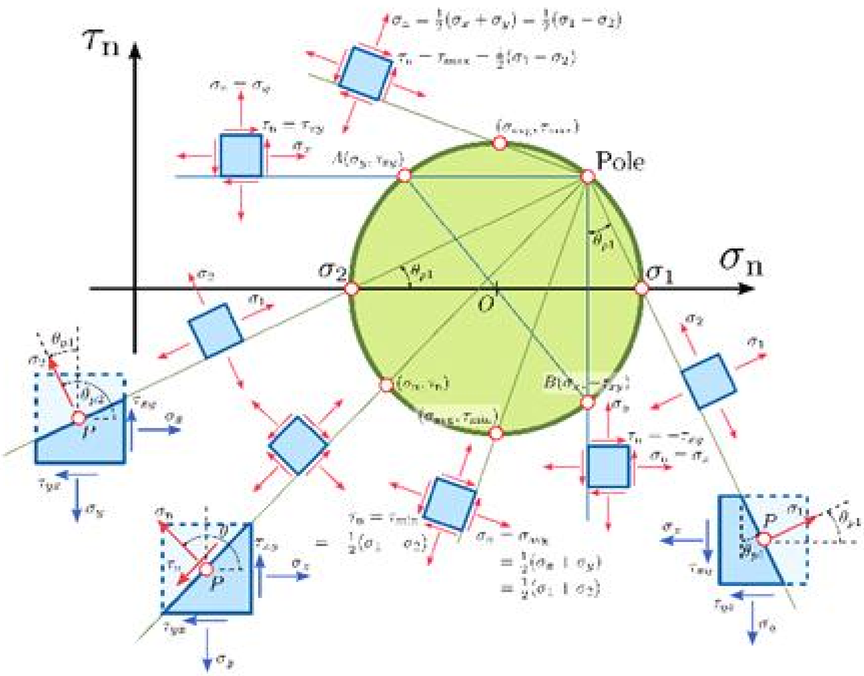
Η σχεση (20) παριστα την εξισωση περιφερειας κυκλου κεντρου Κ [(σχχ +σyy) / 2 , Ο] και ακτινας

$$R = \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 / 4 + \tau_{xy}^2}$$

Αρα καθε ζευγος συντεταγμενων σ, τ που επαληθευουν την (20) παριστα σημειο της περιφερειας του κυκλου τουMobr και αντιστροφα (καθε σημειο της περιφερείας του κύκλου του Mohr επαληθευει την σχεση (20)). Δηλαδη το τυχαίο επίπεδο που διέρχεται απο το σημειο Α εχει συντεταγμενες (σΦ, τφ) καποιο σημειο της περιφερειας του κυκλου του Mohr.



Σχήμα 2- 1 Κύκλος του Mohr



Σχήμα 2- 2 Εκτενής κύκλος Mohr

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

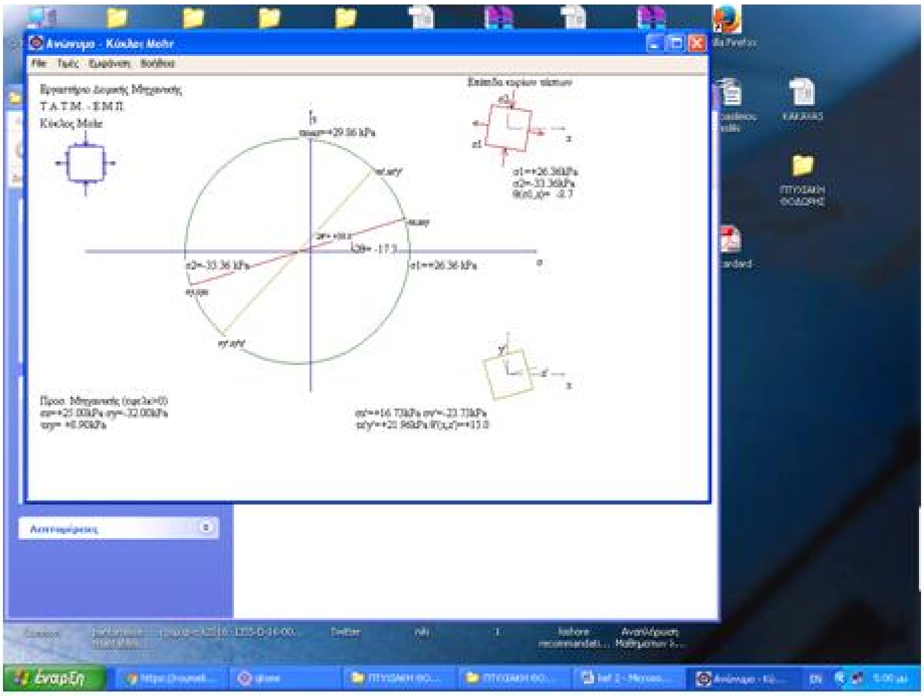
1. Υπολογισμός της μέγιστης και ελάχιστης τάσης για την κάτωθι φόρτιση

σ_X=+25 kPa

σy=-32 kPa

τxy=+8,9 kPa

(1) με το πρόγραμμα Mohr



Αποτελέσματα

σ_1=+26,36 kPa

σ_2= - 33,36 kPa

$\theta(\sigma_1,x)=-8,7^o$

τ_{max}=+21,86 kPa

(2) Αναλυτικά βλ βιβλίο Π. Βουθούνης, Αντοχή Υλικών)

Με βάση τη θεωρία αντοχής έχουμε τον αναλυτικό προσδιορισμό των κύριων τάσεων από τους μαθηματικούς τύπους

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2}$$

Και τα ανωτέρω δεδομένα οι τιμές των κύριων τάσεων είναι: σ1=+26,36 kPa

σ2= - 33,36 kPa, δηλαδή ίσες με τις αντίστοιχες τιμές του προγράμματος Mohr. Η γωνία της κύριας κατεύθυνσης είναι ίση με

$$\tan(2\theta_o) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

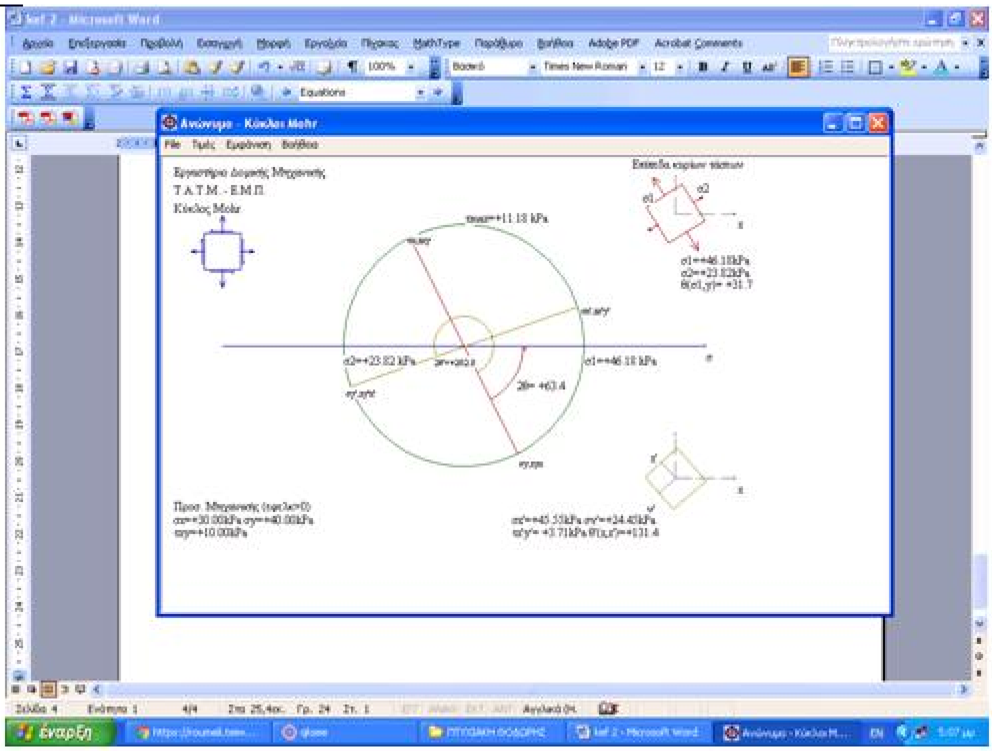
Αντικατάσταση των ανωτέρω τιμών στον τύπο βρίσκομε ότι η γωνία θο ισούται με -8,7, ίση με την τιμή που προσδιόρισε το πρόγραμμα.

2. Νέα εφαρμογή με δεδομένα

σ_x=+30 κkPa

σy=+40 kPa

τxy=+10 kPa



Αποτελέσματα

σ_1=+46,18 kPa

σ2= +23,82 kPa

θ(σ_1,x)=+31.7^o

τmax=+11,18 kPa

3. Παράδειγμα 4.1 (σελ. 115 Π. Βουθούνης, Αντοχή Υλικών)

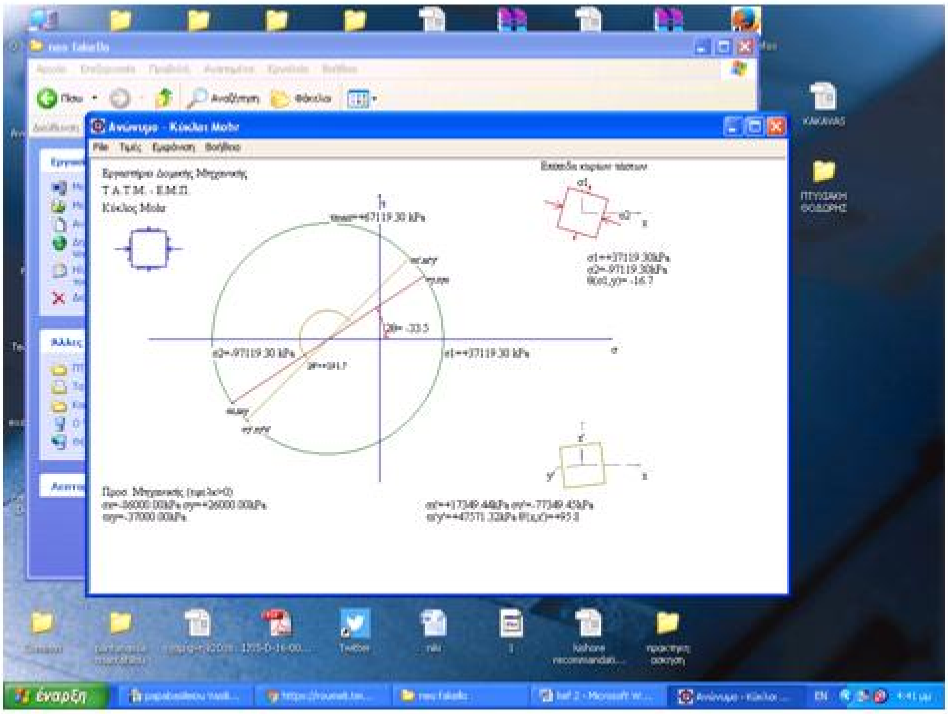
Εάν οι τιμές των σx,σy και τxy είναι -86MPa, +26 MPa και -37 MPa αντίστοιχα, υπολογίστε τις κύριες τάσεις αναλυτικά και με το πρόγραμμα Mohr.

(α) Αναλυτικά.

Από τους ανωτέρω μαθητικούς τύπους υπολογίζουμε τις κύριες τάσεις και κύρια διεύθυνση. Οι τιμές είναι

σ_1=37.12 MPa., σ2=-97,12 MPa, και θο=+16.73 ^{o}

(β) Με το πρόγραμμα Mohr



Οι τιμές είναι σ1=+37119 kPa, σ2=-97119 κPa και θο=+16.7ο . Η μέγιστη διατμητική τάση τmax ισούται με +67119,3 κPa, ενώ το τmin ισούται το τmax αλλά με αντίθετο πρόσημο.

2.δ Περί παραμορφώσεων –Κύκλος του Mohr

2.δ.1 Παραμορφώσεις υπό τυχαία γωνία σώματος που βρίσκεται σε επίπεδη εντατική κατάσταση

Γραμμικα ελαστικα σωματα ειναι τα σωματα εκεινα των οποιων οι αναπτυσσομενες τασεις, λογω εντασης, εξαρτωνται αποκλειστικα και μονο απο τις παραμορφωσε1ς. Αλλοι παραγοντες που επηρεαζουν τις τασεις ει ναι περιβαλλοντικες συνθηκες, ταχυτητα και τροπος φορτισεως η ιστορια φορτισεως του υλικου κα. Καταληγουμε στο συμπερασμα οτι για καθε υλικο υπαρχει και και αλλος νομος που διεπει την προαναφερθείσα συσχετιση. Έστω λοιπόν ένα ομογενές και ισότροπο ελαστικό σώμα το οποιο βρισκ:εται σε ενταση εντός της ελαστικής περιοχής. Στην γενική περίπτωση της τριαξονικης εντάσεως ισχύουν οι βασικές εξισώσεις της μηχανικής οι οποίες περιγραφουν τις ορθες, γωνιακ:ες παραμορφωσεις ενος σωματος στην γενικη περιπτωση της τριαξονικης εντατικης ιcαταστασεως, η οποια διαφερει της επιπεδης εντατικης καταστασεως. Αξιζει παντως να σημειωθει οτι η επιπεδη παραμορφωσιακη κατασταση δεν εχει σημαντικες εφαρμογες, παρα μονο σε περιπτωσεις επιφανειακων στοιχειων που βρισκονται υπο ενταση (πχ καταπονηση λεπτης πλακας), λογο του οτι η εγκαρσια εννοια ειναι κατα πολυ μικροτερη των αλλων δυο, ετσι ωστε καθε μεταβολη της να μην επιφερει σημαντικες αλλαγες στην γεωμετρια του σχηματος. Εάν ορισουμε δυο καινουργια επιπεδα, καθετα μεταξυ τους, που ταυτίζονται για ολες τις πιθανες τιμες της μεταβλητης μας κ, επι των οποιων επιπεδων λαμβανει μεγιστη και ελαχιστη τιμη αντιστοιχα η γωνιακή παραμορφωση. Οι δυο διευθυνσεις αυτες ευρισκονται μετα στροφης κατα 45° απο κυρια παραμορφωσιακη κατασταση, και επι του ενος επιπεδου συνανταται η γmax και επι του αλλου επιπεδου η γmin. Η μεγιστη δυνατη (ολικη) γωνιακη παραμορφωση θα διδεται απο τις σχεσεις;

$$\gamma_{(max,min)} = (+-)\sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 / 4 + \varepsilon_{xy}^2}$$

$$\gamma_{max} = \varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}$$

Τελος,αναφερουμε οτι αν οι αρχικες διευθυνσεις των παραμορφωσεων ηταν κυριες, αν δηλαδη δεν υπηρχαν διατμητικες παραμορφωσεις ,οποτε και θα ισχυε γχy = Ο, τοτε η προκυπτουσα παραμορφωσιακη κατασταση θα περιγραφεται απο τις εξισωσεις

$$\varepsilon_{\phi} = (\varepsilon_{max} + \varepsilon_{min}) / 2 + (\varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}) \cos 2\phi / 2$$

$$\gamma_{\phi} = (\varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}) \sin 2\phi$$

2.ε Γραφική παράσταση παραμορφώσεων - Κύκλος του Mohr

Θα προσπαθησουμε να δημιουργησουμε την παραμετρικη εξισωση περιφερειας κυκλου με διαδοχικες απαλοιφες της γωνιας 2φ απο τις σχεσεις

$$[\,\varepsilon_{\phi} - (\,\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}\,)\,/\,2\,]^2 = [\,(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}\,)\cos 2\phi\,/\,2 - \varepsilon_{xy}\sin 2\phi\,]^2$$

$$\gamma_{\phi}^2\,/\,4 = [\,(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}\,)\sin 2\phi\,/\,2 + \varepsilon_{xy}\cos 2\phi\,]^2$$

Ή ισοδύναμα

$$[\,\varepsilon_{\phi} - (\,\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}\,)\,/\,2\,]^2 + \varepsilon_{xy}^{2'} = [\,\sqrt{\,(\,\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}\,)^2\,/\,4 + \varepsilon_{xy}^2}\,]^2$$

Η σχεση αυτή παριστα παραμετρικη εξισωση περιφερειας κυκλου, διοτι ειναι της μορφης

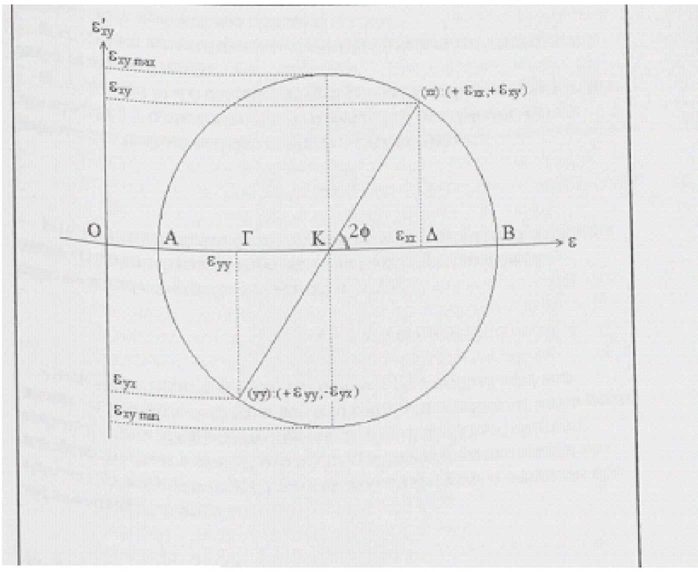
$$(\,x - \alpha\,)^2 + (\,y - \beta\,)^2 = R^2$$

Συνδεει μια παραμορφωσιακη κατασταση που αντιπροσωπευεται απο τους τελεστες της εχχ, εуу, εχу με μια αγνωστη παραμορφωσιακη κατασταση που εχει προκυψει απο την προαναφερθεισα κατασταση μετα στροφης (τελεστες f.4>, εχу') Συνεπως καΟε ζευγος παραμορφωσεων θ!>, εχу' που επαληθευουν την εξισωση (27)παριστουν σημειο της περιφερειας του κυκλου του Mohr και αντιστροφα. Δηλαδη το τυχαιο απειροστο επιπεδο που διερχεται απο το σημειο σωματος που βρισκεται σε επιπεδη παραμορφωσιακη κατασταση, και που περιγραφεται απο τα ανυσματα ~' εχу' περιγραφεται απο καποιο σημειο της περιφερειας του κυκλου του Mohr, το οποιο και καλουμαστε να βρουμε. Για να παριστα η τελευταία σχεση κυκλο του Mohr, πρεπει νασυμβούν δύο πράγματα:

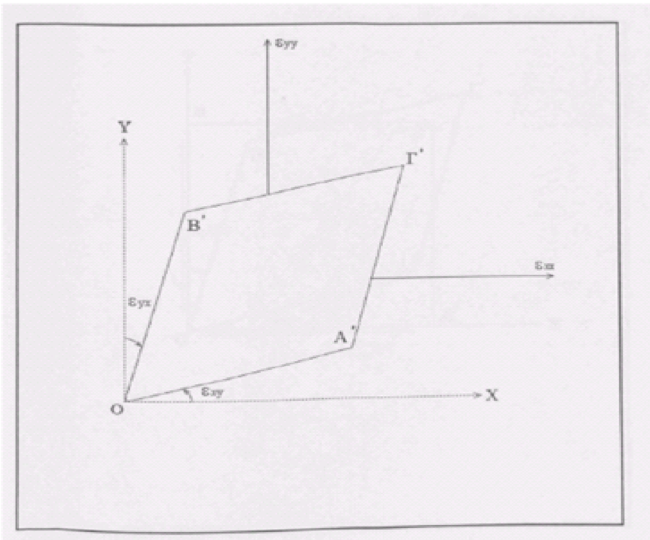
α) Οτι ο κυκλος αυτος εχει κεντρο Κ [(εχχ + εуу) *12,* Ο]

β) Οτι ο κυκλος αυτος εχει ακτι να R = -'1 (εχχ - εуу)2 I 4 + εχу2 ή

$$R^2 = \sqrt{\,(\,\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}\,)^2\,/\,4 + \varepsilon_{xy}^2}$$



$$\varepsilon_{xymax} = R$$



Τελος, ισχυει οτι η απολυτως μεγιστη δυνατη ημιγωνιακη παραμορφωση εχy που μπορει

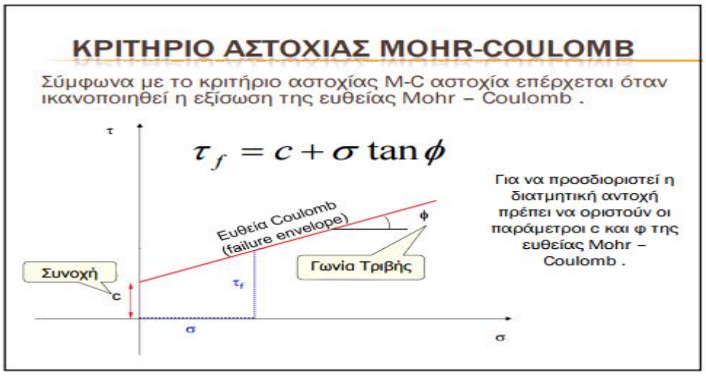
$$\gamma_{max} = 2\ \varepsilon_{xymax}$$

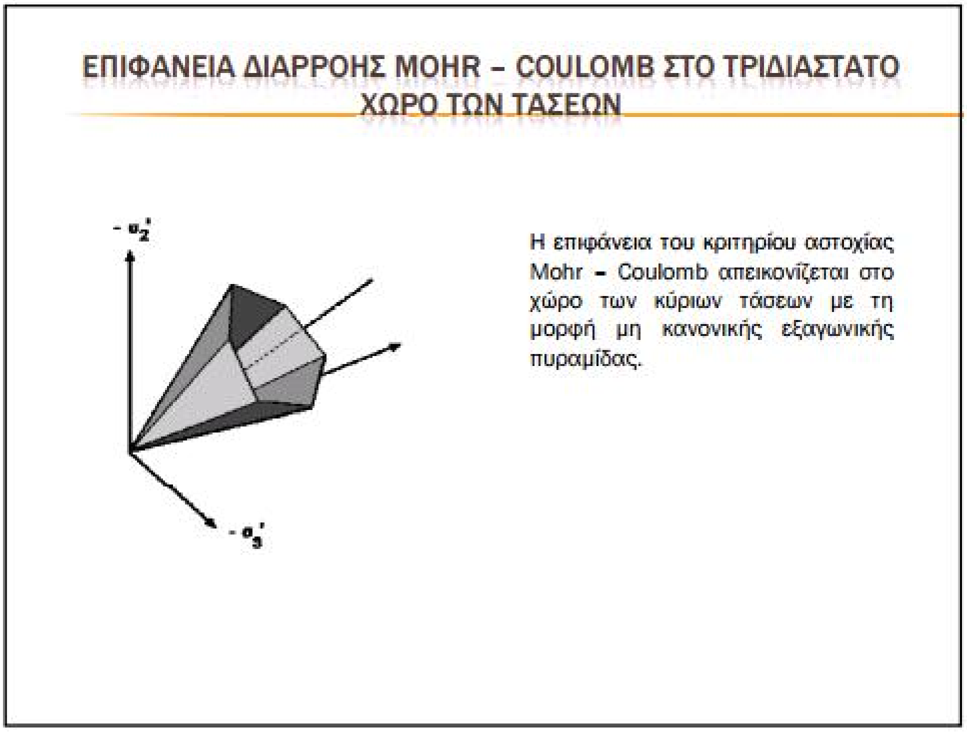
να αναπτυχθει θα ισουται με:

Ισχύει όμως ότι

Δηλαδή

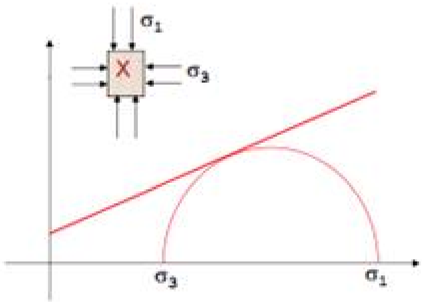
2.δ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΣΤΟΧΙΑΣ ΣΤΟ ΚΥΚΛΟ ΤΟΥ MOHR[3]





3 http://www.legah.metal.ntua.gr/pdf/edafo/2013_2014/8

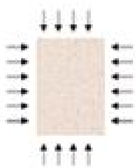
Η ΣΧΕΣΗ ΤΩΝ ΚΥΡΙΩΝ ΤΑΣΕΩΝ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΑΣΤΟΧΙΑ

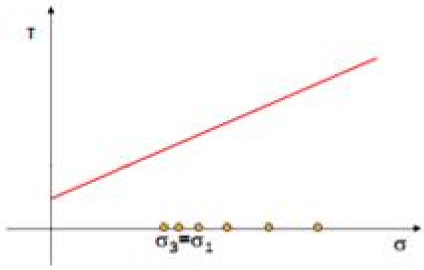


$$\sigma_1 = \sigma_3 \tan^2(45 + \phi/2) + 2c\tan(45 + \phi/2)$$

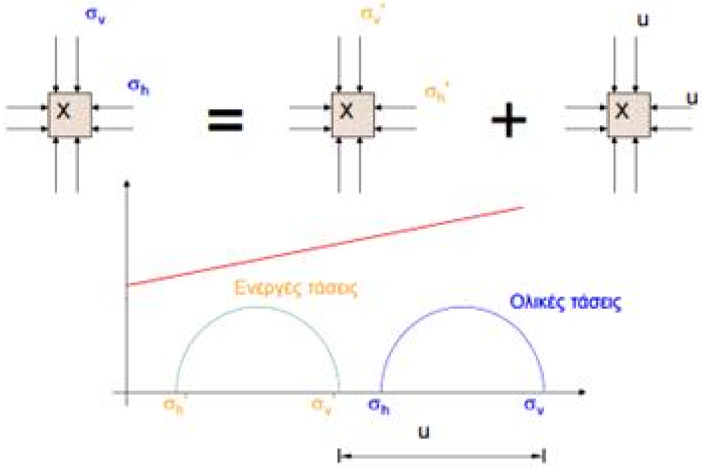
$$\sigma_3 = \sigma_1 \tan^2(45 - \phi/2) - 2c\tan(45 - \phi/2)$$

- Η ισότροπη φόρτιση δεν οδηγεί σε αστοχία καθώς ο συνδυασμός των τάσεων δεν είναι δυνατόν να ικανοποιήσει την εξίσωση αστοχίας της ευθείας Coulomb.

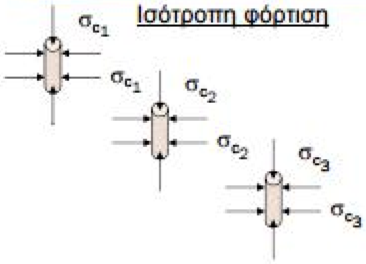




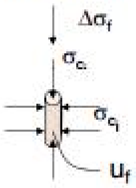
ΟΛΙΚΕΣ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΣ ΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ Ο ΚΥΚΛΟΣ MOHR



Ισότροπη φόρτιση

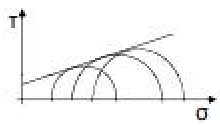


Εκτροπική φόρτιση => αστοχία



Κατά την αστοχία,

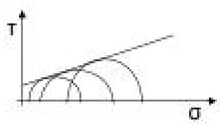
$\sigma_3 = \sigma_c$ και $\sigma_1 = \sigma_c + \Delta\sigma_f$



c, φ

Για τις ολικές τάσεις **σ**

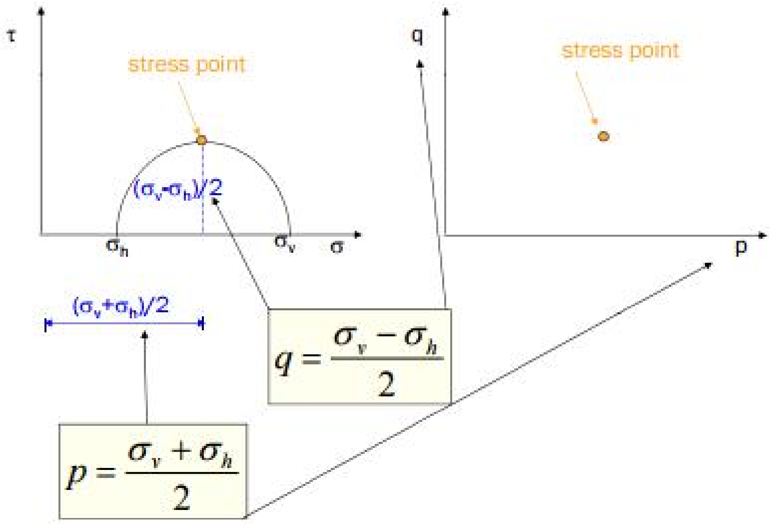
$\sigma_3' = \sigma_3 - u_f$ και $\sigma_1' = \sigma_1 - u_f$



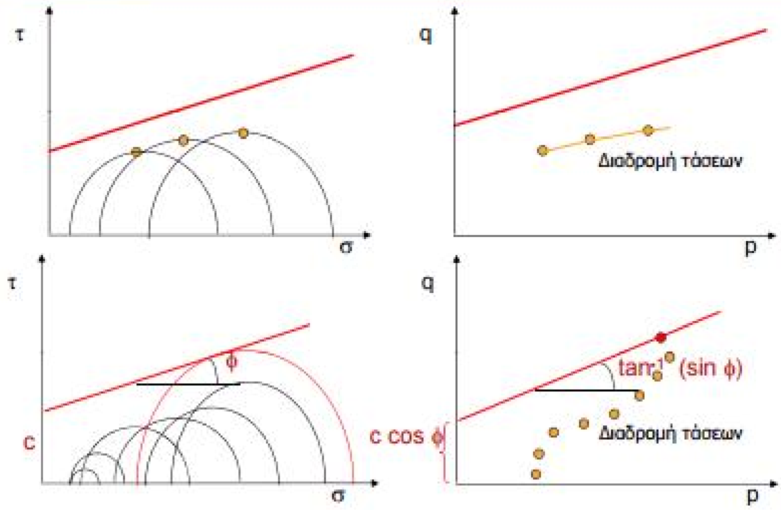
c΄, φ΄

Για τις ενεργές τάσεις **σ΄**

ΔΙΑΔΡΟΜΗ ΤΑΣΕΩΝ - STRESS PATHS



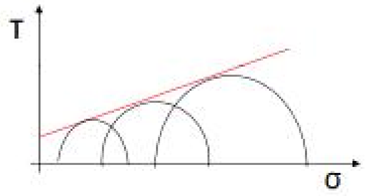
Η διαδρομή των τάσεων επιτρέπει την παρακολούθηση της φόρτισης έως την ικανοποίηση της εξίσωσης αστοχίας χωρίς να είναι απαραίτητη η συνεχής σχεδίαση των κύκλων Mohr.

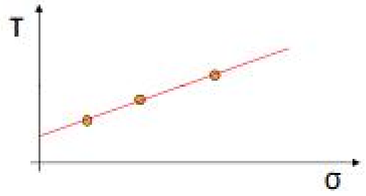


ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ COULOMB

Οι συνήθεις δοκιμές προσδιορισμού της διατμητικής αντοχής των εδαφών είναι οι εξής:

- Δοκιμή άμεσης διάτμησης
- Δοκιμή τριαξονικής φόρτισης
- Δοκιμή δακτυλιοειδούς διάτμησης συνεκτικών εδαφών





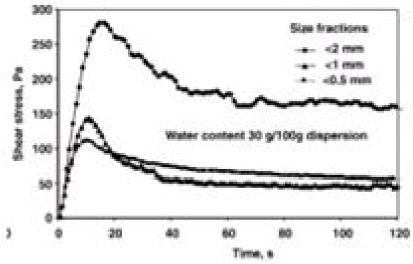
ΔΟΚΙΜΗ ΑΜΕΣΗΣ ΔΙΑΤΜΗΣΗΣ

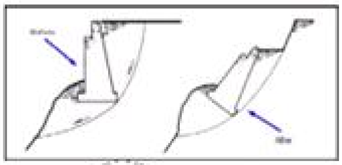
Η Δοκιμή Άμεσης Διάτμησης αναφέρεται στη βαθμιαία επιβολή διατμητικών μετακινήσεων σε εδαφικό δοκίμιο, προσαρμοσμένο εντός υποδοχέα διάτμησης, μέχρι τη θραύση του κατά μήκος προδιαγεγραμμένης επιφάνειας.

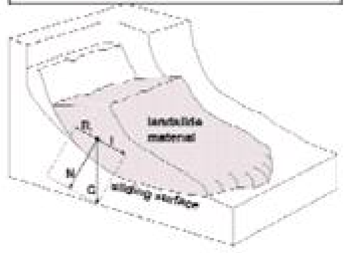
Διαστάσεις δοκιμίου: Ελάχιστη επιθυμητή διάμετρος κυκλικού δοκιμίου ή πλάτος ορθογωνικής διατομής τετραγωνικού δοκιμίου 50 mm. Ελάχιστο πάχος δοκιμίου 25 mm. Ελάχιστος λόγος διαμέτρου προς πάχος 2:1. Οι μέγιστες διαστάσεις των κόκκων δεν πρέπει να υπερβαίνουν το 1/6 του πάχους.

Προπαρασκευή δοκιμίου: Η κοπή του αδιατάρακτου δείγματος ή η μορφοποίηση του αναζυμωμένου δείγματος πρέπει να πραγματοποιείται με ιδιαίτερη προσοχή προκειμένου να αποφευχθεί η απώλεια υγρασίας. Το τελικό δοκίμιο θα πρέπει να μη φέρει ανωμαλίες ή κενά και θα πρέπει να έχει παράλληλες και επίπεδες έδρες.

Εκτελούνται το ελάχιστο τρεις δοκιμές με διαφορετική ορθή τάση ανά δείγμα και υπολογίζεται η σχέση της διατμητικής αντοχής (τ) με την ορθή τάση (σ).







ΔΟΚΙΜΗ ΤΡΙΑΞΟΝΙΚΗΣ ΦΟΡΤΙΣΗΣ

Η τριαξονική δοκιμή καλύπτει τον προσδιορισμό της διατμητικής αντοχής κυλινδρικών δοκιμίων, αδιατάρακτων ή αναζυμωμένων, συνεκτικών εδαφών. Κατά τη δοκιμή ελέγχεται η αντοχή και γενικότερα η σχέση τάσης - παραμόρφωσης ενός δείγματος εδάφους σε οποιεσδήποτε συνθήκες φόρτισης και αποστράγγισης. Ανάλογα με τις συνθήκες αποστράγγισης υπάρχουν τρεις (3) τύποι τριαξονικών δοκιμών:

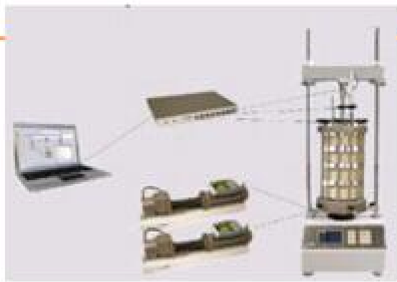
Δοκιμή UU: Ταχεία δοκιμή χωρίς στερεοποίηση και χωρίς αποστράγγιση .

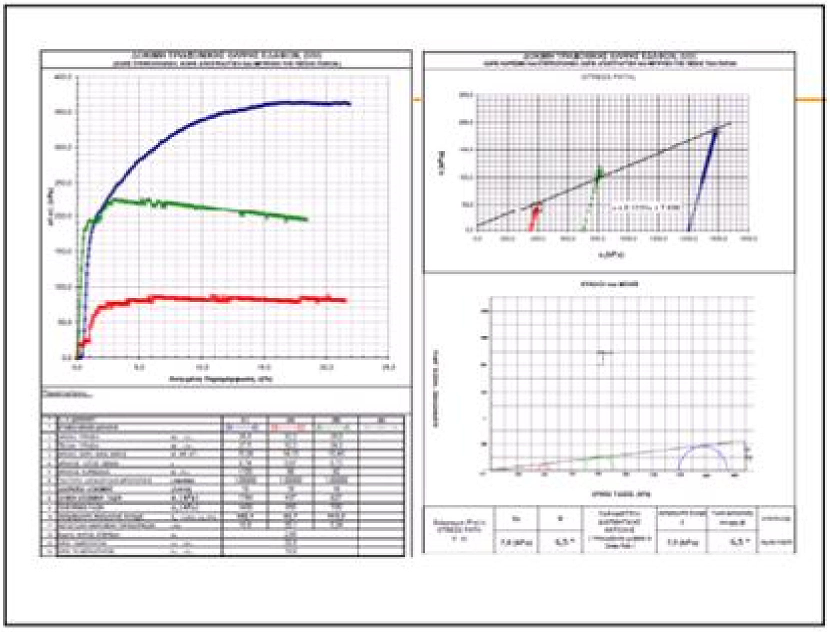
Δοκιμή CU ή CUPP: Δοκιμή με στερεοποίηση, χωρίς αποστράγγιση, με ή χωρίς μέτρηση της πίεσης πόρων.

Δοκιμή CD: Αργή δοκιμή με στερεοποίηση και αποστράγγιση.

Διαστάσεις δοκιμίου: Η σχέση διαμέτρου προς ύψος πρέπει να είναι 1:2 έως 1:3 με ελάχιστη διάμετρο 33mm. Τα επικρατέστερα δοκίμια είναι αυτά με ύψος 72mm και διάμετρο 35mm και ύψος 165mm και διάμετρο 71mm.

Προπαρασκευή δοκιμίου: Η κοπή του αδιατάραχτου δείγματος ή η μορφοποίηση του αναζυμωμένου δείγματος πρέπει να πραγματοποιείται με ιδιαίτερη προσοχή προκειμένου να αποφευχθεί η απώλεια υγρασίας. Το δοκίμιο κατά τη διάρκεια της δοκιμής περιβάλλεται από ελαστική μεμβράνη που το απομονώνει από το νερό της κυψέλης.





Συμπεράσματα
Με βάση πειραματικές διαδικασίες υπολογίζουμε τα διάφορα κριτήρια αστοχίας σε δομικά στοιχεία. Απαιτούνται το ελάχιστο τρεις δοκιμές με διαφορετική ορθή τάση ανά δείγμα και υπολογίζεται η σχέση της διατμητικής αντοχής με την ορθή τάση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Π. Χατζημωυσιαδης, Αστοχία Υλικού, εκδ. Μεταίχμιο, 2013
2. M. Ashby, H. Shercliff , D. Cebon, Υλικά, εκδ Κλειδάριθμος, 2010
3. Αρ. Βατάλης, Επιστήμη και Τεχνολογία Υλικών, Εκδ. Ζήτη, 2015
4. Α. Τριανταφύλλου, Δομικά Υλικά, αυτοεκδ. Πάτρα, 2015
5. K. Williams, Επιστήμη και Τεχνολογία υλίκών, εκδ. Τζιόλας 2016
6. Φ. Λόκκα, Εγχειρίδιο, Αρχών και Μεθόδων στην Αντοχή των Υλικών, ΤΕΙ Λάρισας, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών ΤΕ.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΕΥΡΩΚΩΔΙΚΑΣ #2 ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ ΑΠΟ ΟΠΛΙΣΜΕΝΟ ΣΚΥΡΟΔΕΜΑ

EN 1993-1-1 : 2005

ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ
EUROPEAN STANDARD
NORME EUROPÉENNE
EUROPÄISCHE NORM

EN 1993-1-1:2005

Μάιος 2005

ICS: 91.010.30 ; 91.080.10

Ελληνική έκδοση

Ευρωκώδικας 3 : Σχεδιασμός κατασκευών από χάλυβα

Μέρος 1-1 : Γενικοί κανόνες και κανόνες για κτίρια

Calcul des structures en acier

Partie 1-1 : Règles générales et règles pour les bâtiments

Bemessung und Konstruktion von Stahlbauten

Teil 1-1 : Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau