ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΔΥΤΙΚΗΣ ΕΛΛΑΔΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ EXCEL

ΚΑΤΣΑΡΟΣ ΑΝΤΩΝΙΟΣ

ΚΟΥΤΡΟΥΚΗΣ ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΣ

ΧΙΩΤΗΣ ΦΩΤΙΟΣ

ΕΠΟΠΤΕΥΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΜΕΓΑΡΙΤΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ

ΜΕΣΟΛΟΓΓΙ 2016

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα διπλωματική εργασία έγινε με σκοπό την εξοικείωση των τελειόφοιτων οικονομικών και συναφών σχολών με το excel. Μέσα από τις εφαρμογές που παρουσιάζονται φαίνεται ξεκάθαρα η σημασία της χρήσης του excel για την επίλυση χρηματοοικονομικών προβλημάτων.
Από πλευράς των συντακτών της παρούσας πτυχιακής υπάρχει η ελπίδα ότι η παρούσα εργασία κινήθηκε στη σωστή κατεύθυνση.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στα πλαίσια της παρούσας πτυχιακής εργασίας πραγματοποιήθηκε η ανάλυση και παρουσίαση των βασικών εννοιών των χρηματοοικονομικών μαθηματικών καθώς και η επίλυση καθημερνών προβλημάτων με τη χρήση προγραμμάτων excel. Πιο συγκεκριμένα στην αρχή γίνεται μία εισαγωγή στις βασικές έννοιες των χρηματοοικονομικών μαθηματικών όπως τα ανάλογα ποσά, ο μερισμός και τα ποσοστά. Οι συγκεκριμένες έννοιες είναι εξαιρετικά χρήσιμες για την κατανόηση των εννοιών που αναλύονται στη συνέχεια στης παρούσας εργασίας.

Στη συνέχεια αναλύονται διεξοδικά όλες οι πράξεις που αποτελούν το σύνολο των χρηματοοικονομικών μαθηματικών όπως ο Απλός Τόκος, η Προεξόφληση, τα Ισοδύναμα Γραμμάτια, ο Ανατοκισμός, οι Ράντες και τα Δάνεια.

Σε κάθε κεφάλαιο μετά από την παρουσίαση της κάθε πράξης και της ανάλυσης των βασικών μεγεθών που χρησιμοποιούνται σε αυτή, γίνεται λεπτομερής παρουσίαση της επίλυσης των προβλημάτων με τη χρήση προγραμμάτων excel.

Στο τέλος γίνεται παράθεση των συμπερασμάτων που προκύπτουν καθώς και μελλοντικών εργασιών.

Λέξεις κλειδιά: Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά, Απλός Τόκος, Προεξόφληση, Ισοδύναμα Γραμμάτια, Ράντες, Ανατοκισμός, Δάνεια, Excel

ABSTRACT

In this thesis we analyze the basic concepts of financial mathematics and the solving of everyday problems using excel programs.
In particular at the beginning is an introduction to the basic concepts of financial mathematics as the corresponding amounts, sharing and percentages. These concepts are very helpful for understanding the concepts discussed later in this paper.
Then thoroughly analyzed all operations of financial mathematics as simple interest, the discounting, equivalent bills, the compound interest, the suspenders, loans etc.
In each chapter, after a brief presentation of each instrument and analysis of key sizes used in each operation, a detailed presentation of solving problems using excel programs is given.
At the end is quote the conclusions drawn and future work.

Keywords: Financial mathematics, Simple Interest, Discount, Equivalent Bills, Suspenders, Compound Interest, Loan, Excel.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Γενικά

Η χρηματοοικονομική επιστήμη ασχολείται με τον κόσμο των χρηματαγορών, των κεφαλαιαγορών και των επιχειρήσεων. Βασικές έννοιες της χρηματοοικονομικής είναι το χρήμα, το κεφάλαιο, ο χρόνος, ο τόκος, η νομισματική μονάδα καθώς και το επιτόκιο.
Το χρήμα είναι οτιδήποτε αναγνωρίζεται σε μία κοινωνία ανθρώπων σαν μέσο ανταλλαγής για απόκτηση αγαθών ή ως μέτρο της αξίας διαφόρων πραγμάτων. Με τη βοήθεια του χρήματος πραγματοποιούνται οι οικονομικές συναλλαγές μεταξύ νομικών ή φυσικών προσώπων. Η ανάγκη για τη δημιουργία του χρήματος προέκυψε από την αρχέγονη ανάγκη των ανθρώπων να συναλλάσσονται με σκοπό την κάλυψη των ελλείψεων σε είδη πρώτης ανάγκης. Σε πρώτο στάδιο η συγκεκριμένη ανάγκη καλύφθηκε μέσω της ανταλλαγής αγαθών. Η ανταλλαγή όμως των αγαθών εκτός από αρκετά δύσκολη για πρακτικούς λόγους εμφάνιζε και το πρόβλημα της απουσίας ενός σταθερού μέτρου υπολογισμού της αξίας των συναλλασσόμενων αγαθών. Απόρροια των παραπάνω ήταν οι συναλλαγές πολλές φορές να μην πραγματοποιούνται λόγω ασυμφωνίας μεταξύ των συναλλασσόμενων και ως εκ τούτου δημιουργήθηκε το χρήμα. Το χρήμα δεν είχε πάντα την ίδια μορφή, αρχικά για παράδειγμα ως χρήμα χρησιμοποιήθηκαν όστρακα και κελύφη ζώων ενώ στη συνέχεια χρησιμοποιήθηκαν διάφορα μέταλλα με κύριο τον χρυσό και τον χαλκό.
Το κεφάλαιο, το οποίο συμβολίζεται στην βιβλιογραφία με K, είναι ένα χρηματικό ποσό το οποίο όταν αποταμιευθεί ή δανεισθεί παράγει νέο χρηματικό ποσό.
Ο χρόνος (στη βιβλιογραφία συμβολίζεται με n, t ή m ανάλογα με το χρονικό διάστημα που χρησιμοποιείται) είναι το χρονικό διάστημα για το οποίο ένα κεφάλαιο αποταμιεύεται ή δανείζεται. Το τόκος (στη βιβλιογραφία συμβολίζεται με I) είναι το χρηματικό ποσό που δίνει ο δανειζόμενος στο δανειστή ως αμοιβή γιατί ο δανειστής έδωσε σε αυτόν ένα κεφάλαιο προκειμένου να το εκμεταλλευτεί για ένα ορισμένο χρονικό διάστημα.
Το επιτόκιο (στη βιβλιογραφία συμβολίζεται με i) είναι ο τόκος που δίνει μία νομισματική μονάδα για μία ορισμένη χρονική περίοδο. Η χρονική αυτή περίοδος μπορεί να είναι από μήνες μέχρι έτη με πιο συνηθισμένη περίοδο να αποτελεί το ένα έτος. Το επιτόκιο είναι συνήθως ευμετάβλητο και η διακύμανσή του εξαρτάται από τους παρακάτω παράγοντες:

- Την διεθνή οικονομική κατάσταση.
- Την οικονομική κατάσταση της χώρας.
- Τις προσωπικές σχέσεις δανειστή και δανειζόμενου.

Σύγχρονες μορφές χρήματος

Όπως αναφέρθηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο η μορφή του χρήματος δεν μένει σταθερή, αντίθετα αλλάζει με βάση τις ανάγκες των συναλλασσόμενων. Οι σύγχρονες μορφές χρήματος είναι οι εξής:

- **Επιταγές**: Ως επιταγή καλείται ένα έντυπο (πιστωτικό έντυπο), ο κάτοχος του οποίου μπορεί να εισπράξει από μία τράπεζα το χρηματικό ποσό που αναγράφεται σε αυτό. Τα είδη επιταγών που υπάρχουν είναι πολλά. Κάποια από αυτά τα είδη είναι οι

Ιδιωτικές ή Προσωπικές Επιταγές, οι Τραπεζικές επιταγές, οι Ταχυδρομικές επιταγές, οι ταξιδιωτικές επιταγές, οι επιταγές του Ελληνικού Δημοσίου κ.α.

- **Πιστωτικές Κάρτες**: Οι πιστωτικές κάρτες εκδίδονται από τις τράπεζες για λογαριασμό πελατών τους, για να χρησιμοποιούνται αντί των τραπεζογραμματίων, με συγκεκριμένο όμως όριο όπως αυτό καθορίζεται κάθε φορά (στη παρούσα φάση αυτό το ποσό είναι 420 ευρώ ανά εβδομάδα λόγω των ελέγχων κεφαλαίων που έχουν τεθεί). Με την χρήση της πιστωτικής κάρτας ο κάτοχός της έχει την δυνατότητα πραγματοποίησης πληθώρας εμπορικών συναλλαγών με την αποπληρωμή των συγκεκριμένων συναλλαγών να γίνεται άμεσα από την τράπεζα ενώ ο κάτοχος της κάρτας θα πρέπει να εξοφλήσει το ποσό εντός ενός συγκεκριμένου χρονικού διαστήματος ανάλογα με τους όρους έκδοσης της κάρτας.
- **Γραμμάτιο σε διαταγή, Συναλλαγματική, Επισυναλλαγματική**: Οι παραπάνω τίτλοι αποτελούν ένα άλλο είδος πιστωτικών τίτλων και χρησιμοποιούνται σε πληθώρα συναλλαγών αντί των τραπεζογραμματίων. Χρησιμοποιούνται συχνά σε συναλλαγές μεγάλης αξίας όπου η χρήση των τραπεζογραμματίων καθίσταται σχετικά δύσκολη (π.χ. η αγορά ενός αυτοκινήτου). Με τους συγκεκριμένους τίτλους ουσιαστικά ο αγοραστής “υπόσχεται” ή υποχρεούται να καταβάλει συγκεκριμένο μέρος του οφειλόμενου ποσού εντός δεδομένου χρονικού διαστήματος. Αν ο αγοραστής δε τηρήσει τη δέσμευσή του τότε εγείρονται έννομες απαιτήσεις από την πλευρά του πωλητή. Τα γραμμάτια εκδίδονται από τον οφειλέτη (ή αγοραστή) ενώ οι συναλλαγματικές εκδίδονται από τον πιστωτή (ή πωλητή).

Οι μορφές χρήματος που αναφέρθηκαν σε συνδυασμό με τις βασικές έννοιες που αναλύθηκαν όπως το κεφάλαιο, το επιτόκιο και ο χρόνος αποτελούν τη βάση των χρηματοοικονομικών μαθηματικών όπως θα παρουσιαστούν και στη συνέχεια της παρούσας πτυχιακής εργασίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

Βασικές έννοιες Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών

1.1 Ποσά Ανάλογα

Γενικά με τον όρο **ποσό** ονομάζεται οτιδήποτε μπορεί να αυξηθεί ή να μειωθεί. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα ενός ποσού στην οικονομική επιστήμη είναι οι καταθέσεις-αναλήψεις που έχει μια τράπεζα.

Δύο ποσά ονομάζονται **ανάλογα** (ή ευθέως ανάλογα) όταν πολλαπλασιαζόμενη η τιμή ενός ποσού επί έναν αριθμό, πολλαπλασιάζεται και η τιμή του άλλου ποσού επί τον ίδιο αριθμό. Η ίδια λογική ισχύει και για την διαίρεση δύο ποσών.

Δύο ποσά ονομάζονται **αντίστροφα** (ή αντιστρόφως ανάλογα) όταν πολλαπλασιαζόμενη η τιμή του ενός ποσού επί έναν αριθμό, διαιρείται η τιμή του άλλου ποσού δια τον ίδιο αριθμό, ή διαιρούμενη η τιμή του ενός ποσού δια ενός αριθμού, πολλαπλασιάζεται η τιμή του άλλου ποσού επί τον ίδιο αριθμό αντίστοιχα.

1.2 Μέθοδος των τριών

Απλή μέθοδος των τριών ονομάζεται η μέθοδος εκείνη στην οποία δίνονται τρία ποσά (οι αριθμοί αυτοί είναι γνωστοί) και ζητείται να υπολογιστεί ένα τέταρτο άγνωστο ποσό. Η πρώτη ενέργεια που γίνεται για την επίλυση ενός προβλήματος με την απλή μέθοδο των τριών είναι η κατάταξη των ποσών και η σύγκρισή για το αν είναι ευθέως ή αντιστρόφως ανάλογα μεταξύ τους. Ένα παράδειγμα είναι το εξής:

"Τέσσερα τρακτέρ οργώνουν μία έκταση σε 9 ημέρες αν λειτουργούν τον ίδιο αριθμό κάθε μέρα. Πόσα τρακτέρ χρειάζονται για να οργώσουν την ίδια έκταση σε 6 ημέρες;"

Από την εκφώνηση του παραδείγματος προκύπτει ότι τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα και η κατάταξή τους θα είναι:

4 τρακτέρ οργώνουν την έκταση σε 9 ημέρες

x τρακτέρ οργώνουν την έκταση σε 6 ημέρες

Με δεδομένο ότι τα παραπάνω ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα θα ισχύει:

4/x=6/9 ή x=4∗6/9=6

Παρατηρούμε ότι το x ισούται με τον αριθμό που βρίσκεται από πάνω του επί το κλάσμα όπως είναι.

Πολλές φορές παρατηρείται το φαινόμενο σε ένα πρόβλημα που επιλύεται με την απλή μέθοδο των τριών να δίνονται περισσότερα από δύο ανάλογα ή αντιστρόφως ανάλογα ποσά. Στις περιπτώσεις αυτές το πρόβλημα μπορεί να αναλυθεί σε δύο ή περισσότερα προβλήματα απλής μεθόδου των τριών οπότε σε αυτή την περίπτωση η επίλυση γίνεται με τη **σύνθετη μέθοδο των τριών**.

Για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων η λογική επίλυσης είναι η ίδια με πριν, δηλαδή το x ισούται με τον αριθμό που βρίσκεται από πάνω του, πολλαπλασιαζόμενο επί κάθε ένα από τα κλάσματα που σχηματίζονται από τα ποσά, αντεστραμμένα αν αυτά είναι ανάλογα ή όπως είναι αν αυτά είναι αντιστρόφως ανάλογα.

Ένα παράδειγμα προβλήματος που επιλύεται με την σύνθετη μέθοδο των τριών είναι το εξής:

“Δώδεκα εργαζόμενοι, με οκτάωρη απασχόληση ημερησίως, τελειώνουν ένα συγκεκριμένο έργο σε 25 μέρες. Πόσες ημέρες πρέπει να απασχοληθούν 20 εργαζόμενοι για να τελειώσουν το ίδιο έργο, αλλά με εξάωρη απασχόληση ημερησίως;’’

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα η κατάταξη του προβλήματος όπως αυτή προκύπτει θα είναι η εξής:

Οι 12 εργαζόμενοι με 8 ώρες την ημέρα τελειώνουν σε 25 μέρες.

Οι 20 εργαζόμενοι με 6 ώρες την ημέρα τελειώνουν σε x;

Με βάση τη σύγκριση των παραπάνω ποσών βλέπουμε ότι οι εργαζόμενοι και οι μέρες είναι ποσά αντιστρόφως ανάλογα, ενώ το ίδιο ισχύει και για τις ώρες ημερησίως και τις ημέρες. Συνεπώς προκύπτει η παρακάτω λύση:

x=25*8/6*12/20 άρα το x=20.

Άρα οι 20 εργαζόμενοι θα τελειώσουν το έργο σε 20 μέρες αν εργάζονται 6 ώρες κάθε μέρα.

1.3 Ποσοστά

Σε προβλήματα όπου είναι αναγκαίο να υπολογιστούν τα κέρδη ή οι ζημίες, ή οι προμήθειες μίας εταιρείας, οι εκπτώσεις στις πωλήσεις, τα ασφάλιστρα, οι μεσιτείες, οι αυξομειώσεις σε πληθυσμούς, η αύξηση στους μισθούς των εργαζομένων κ.α. η ανάγκη της χρήσης της **μεθόδου των ποσοστών** καθίσταται επιτακτική. Τα παραπάνω προβλήματα επιλύονται με την απλή μέθοδο των τριών, με τα εκάστοτε ποσά να είναι πάντα ευθέως ανάλογα μεταξύ τους και ένα από αυτά είναι το 100 ή το 1000. Τα προβλήματα ποσοστών διακρίνονται στις εξής κύριες κατηγορίες:

- Δίνεται η αρχική αξία ενός ποσού και ζητείται η τελική του αξία.
- Δίνεται η τελική αξία και ζητείται η αρχική.
- Υπολογισμός του ποσού.
- Ειδικά προβλήματα ποσοστών.

Ένα τέτοιο παράδειγμα επίλυσης με την μέθοδο των ποσοστών είναι το εξής:

“Η χρηματιστηριακή τιμή μίας εταιρείας ήταν 5 ευρώ στις 4/6/2015 και στις 12/10/2015 ήταν 3,32 ευρώ. Να υπολογιστεί η ποσοστιαία μείωση της μετοχής της εταιρείας για το πιο πάνω χρονικό διάστημα.”

Από το πρόβλημα προκύπτει ότι η μείωση της μετοχής για το χρονικό διάστημα από 4/6/2015 έως 12/10/2015 είναι 1,68 ευρώ (από τα 5 ευρώ πήγε στα 3,32 ευρώ). Με βάση και αυτό το στοιχείο η κατάταξη που προκύπτει είναι η εξής:

Στα 5 ευρώ έχουμε μείωση 1,68 ευρώ

Στα 100 ευρώ έχουμε μείωση x;

Άρα ή λύση θα είναι : x=1,68*100/5 ή x=33,6%

1.4 Μερισμός

Μερισμός καλείται ο χωρισμός ενός ποσού σε μέρη σύμφωνα με τα δεδομένα μιας σειράς αριθμών διάφορων μεταξύ τους. Τα μέρη αυτά που θα προκύψουν από το μερισμό ενός ποσού μπορεί να είναι ευθέως ή αντιστρόφως ανάλογα με τους δεδομένους κάθε φορά αριθμούς.

Δύο ή περισσότεροι αριθμοί ονομάζονται ανάλογοι προς δύο η περισσότερους αριθμούς αντίστοιχα, αν οι πρώτοι προκύπτουν από τους δεύτερους όταν αυτοί πολλαπλασιαστούν επί τον ίδιο αριθμό. Για παράδειγμα οι αριθμοί 5, 30, 50 είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς 1, 6, 10 καθώς οι πρώτοι προκύπτουν από τους δεύτερους αν αυτοί πολλαπλασιαστούν επί 5. Το ίδιο συμβαίνει και από την άλλη πλευρά, δηλαδή οι δεύτεροι αριθμοί προκύπτουν από τους πρώτους αν αυτοί πολλαπλασιαστούν επί τον ίδιο αριθμό, το 1/5.

Αυτό που φαίνεται να ισχύει είναι το εξής:

5/1=30/6=50/5=5

Αν η παραπάνω παρατήρηση γενικευτεί προκύπτει ότι αν οι αριθμοί a,b,c είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς x,y,z τότε θα ισχύει:

a/x=b/y=c/z=k

Οπότε:

a=k*x, b=k*y, c=k*z

Στην παραπάνω περίπτωση προκύπτει ότι ο λόγος των ομολόγων αριθμών είναι ο ίδιος για όλους και αυτός ο λόγος είναι ίσος με k.

Δύο ή περισσότεροι αριθμοί ονομάζονται αντιστρόφως ανάλογοι προς δύο οι περισσότερους αριθμούς αντίστοιχα, αν και μόνο αν, οι πρώτοι είναι ανάλογοι προς τους αντίστροφους των δεύτερων. Για παράδειγμα οι αριθμοί 8, 20, 28, 40, 60 είναι αντιστρόφως ανάλογοι προς τους αριθμούς 1/2, 1/5, 1/7, 1/10, 1/15 αφού είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς 2, 5, 7, 10 και 15 που είναι οι αντίστροφοι των δεύτερων αριθμών.

Ένα ποσό K που πρόκειται να μεριστεί, ονομάζεται μεριστέος. Αν ζητείται να μεριστεί ο αριθμός K σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς a, b, c τότε διαιρείται με το άθροισμα αυτών των αριθμών και το πηλίκο πολλαπλασιάζεται επί κάθε επιμέρους αριθμό ξεχωριστά.

Ως εκ τούτου ο μεριστέος K θα μεριστεί σε τρία μέρη ως εξής:

- (K/(a+b+c))*a
- (K/(a+b+c))*b
- (K/(a+b+c))*c

Το δε πηλίκο K/(a+b+c) ονομάζεται συντελεστής μερισμού.

Στην περίπτωση όπου ζητείται να μεριστεί ένα ποσό K σε μέρη αντιστρόφως ανάλογα προς μία δοσμένη σειρά αριθμών a, b, c τότε πρέπει το K να μεριστεί σε μέρη ανάλογα προς τους αντίστροφους αριθμούς αυτών, δηλαδή τους 1/a, 1/b, 1/c και γίνονται τα εξής:

- Οι αριθμοί 1/a, 1/b, 1/c πρέπει να γίνουν ομώνυμα κλάσματα
- Το K μερίζεται ανάλογα με τους αριθμητές των πιο πάνω κλασμάτων και έτσι προκύπτει:
    - (K/(a*b+a*c+b*c))*b*c
    - (K/(a*b+a*c+b*c))*a*c
    - (K/(a*b+a*c+b*c))*a*b

Παρατήρηση: Ένας αριθμός μπορεί να μεριστεί σε μέρη ανάλογα περισσότερων δεδομένων σειρών αριθμών

Ένα παράδειγμα εφαρμογής των παραπάνω είναι το εξής:

"Να μεριστεί το ποσό των 690 ευρώ σε μέρη αντιστρόφως ανάλογα προς τους αριθμούς 4,5 και 8."

Οι αντίστροφοι αριθμοί των 4,5 και 8 είναι οι αριθμοί 1/4,1/5 και 1/8. Αφού τα κλάσματα γίνουν ομώνυμα προκύπτουν τα εξής κλάσματα: 20,80,16/80 και 10/80. Συνεπώς το ποσό των 690 ευρώ μερίζεται σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς 20,16 και 10,άρα προκύπτουν τα εξής:

- (690/(20+16+10))*20=300 ευρώ
- (690/(20+16+10))*16=240 ευρώ,
- (690/(20+16+10))*10=150 ευρώ.

1.5 Εταιρείες

Όταν δύο ή περισσότερα άτομα συμφωνούν εγγράφως και αναλαμβάνουν την υποχρέωση να αναπτύξουν από κοινού μία επιχειρηματική δραστηριότητα, καταβάλλοντας κάποιο ποσό έκαστος, τότε τα άτομα αυτά δημιούργησαν μία εταιρεία. Η δίκαιη διανομή των κερδών ή των ζημιών μία εταιρείας στους μετόχους της, γίνεται με τη μέθοδο του μερισμού.

Το πιο συνηθισμένο πρόβλημα σε μία εταιρεία είναι ο μερισμός μεταξύ των μετόχων, του κέρδους ή της ζημίας, ανάλογα προς τα κεφάλαια που έχει καταβάλλει ο κάθε μέτοχος καθώς και προς τους χρόνους που τα κεφάλαια αυτά καταβλήθηκαν στην εταιρεία. Για κάθε εταιρεία δημιουργείται ένα καταστατικό, όπου καταγράφονται οι τρόποι διανομής των κερδών ή των ζημιών της εταιρείας, οι υποχρεώσεις των εταίρων, οι τρόποι λειτουργίας της εταιρείας κ.α. Σε περίπτωση που στο καταστατικό κάποιας εταιρείας δεν αναφέρεται ρητά ο τρόπος κατανομής των κερδών, ζημιών ή άλλων περιουσιακών στοιχείων αυτής, τότε ο μερισμός γίνεται ως εξής:

- **Άνισα Κεφάλαια-ίσα χρονικά διαστήματα**: ανάλογα προς το μετοχικό κεφάλαιο που κατέβαλε κάθε μέτοχος και για το ίδιο χρονικό διάστημα για κάθε έναν από αυτούς.
- **Ίσα Κεφάλαια-άνισα χρονικά διαστήματα**: ανάλογα προς τα χρονικά διαστήματα, που ίδια κεφάλαια για κάθε εταίρο παρέμειναν στην εταιρεία.
- **Άνισα κεφάλαια-άνισα χρονικά διαστήματα**: ανάλογα προς τα γινόμενα των κεφαλαίων που κατέβαλε κάθε εταίρος επί το χρονικό διάστημα που αυτά παρέμειναν στη διάθεση της εταιρείας.

Ένα παράδειγμα είναι το εξής:

" Ο κ. Αναστασίου ξεκίνησε, πριν από 4 μήνες μία επιχείρηση, με αρχικό κεφάλαιο 60000 ευρώ και σήμερα βάζει συνέταιρο του τον κ. Αλεξάνδρου, ο οποίος καταβάλλει στην επιχείρηση κεφάλαιο 60000 ευρώ. Αν μετά από οκτώ μήνες η επιχείρηση των δύο μετόχων έχει καθαρά κέρδη 68000 ευρώ, πως θα μεριστεί το ποσό αυτό στους δύο συνεταίρους;"

Με δεδομένο ότι ο κ. Αναστασίου κατέβαλλε μετοχικό κεφάλαιο στην επιχείρηση ίσο με αυτό του κ. Αλεξάνδρου, μετά από τέσσερις μήνες ακριβώς, ο μερισμός θα γίνει ανάλογα προς το χρόνο που τα κεφάλαια χρησιμοποιήθηκαν στην επιχείρηση. Δηλαδή για 12 μήνες για τον πρώτο εταίρο και για 8 μήνες για τον άλλο εταίρο. Άρα προκύπτουν τα εξής:

- (68000/(12+8))*12= 40800 για τον κ. Αναστασίου,
- (68000/(12+8))*8= 27200 για τον κ. Αλεξάνδρου.

1.6 Εφαρμογές για τον υπολογισμό των κερδών μίας επιχείρησης με το Excel

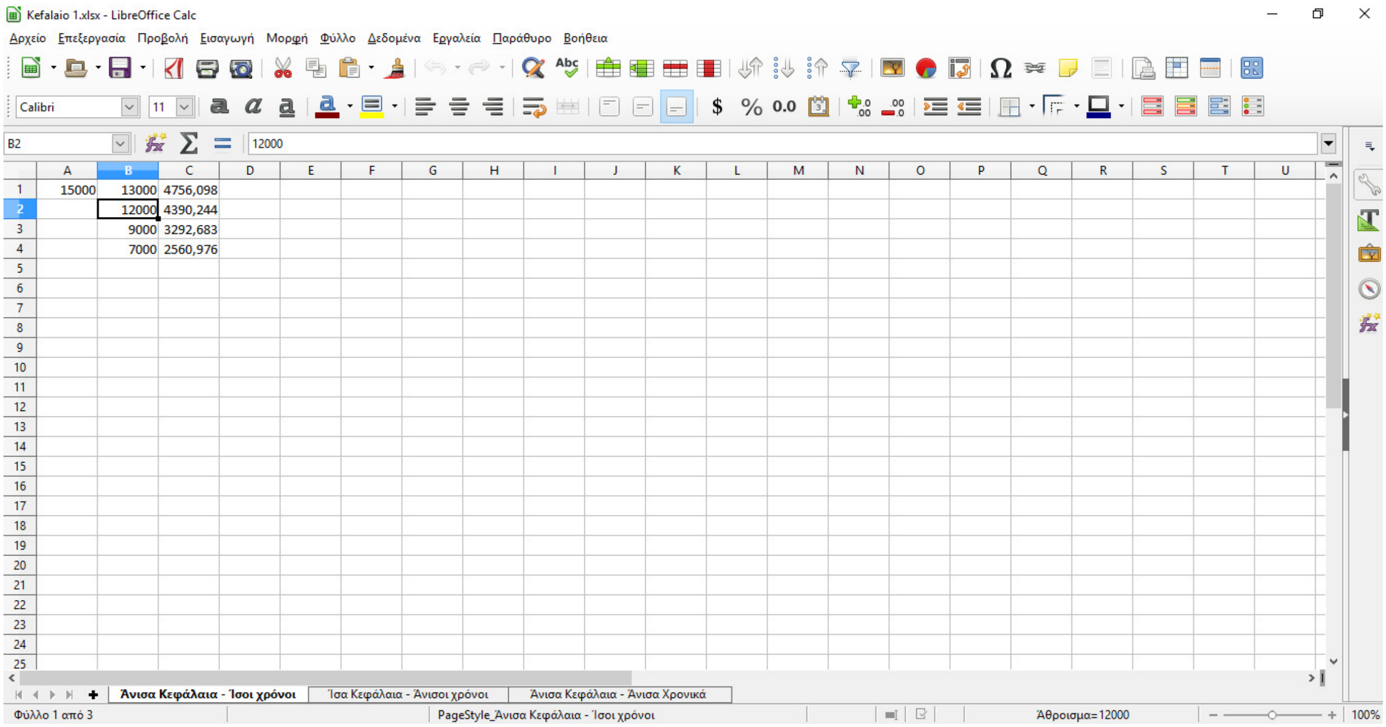
Στις εφαρμογές που ακολουθούν γίνεται υπολογισμός του μερίσματος των κερδών μίας εταιρείας όταν δίνονται σε ένα πρόβλημα μέχρι και 4 μέτοχοι με εφαρμογή και σε μεγαλύτερο αριθμό μετόχων.

- Άνισα κεφάλαια-ίσα χρονικά διαστήματα

Το κέρδος 15000 ευρώ μίας εταιρείας πρέπει να μεριστεί στους τέσσερις μετόχους της, οι οποίοι κατέβαλαν ταυτόχρονα σε αυτήν τα εξής αρχικά κεφάλαια: 13000 ευρώ ο πρώτος, 12000 ο δεύτερος, 9000 ευρώ ο τρίτος και 7000 ευρώ ο τέταρτος μέτοχος αντίστοιχα. Ζητείται να υπολογιστεί το ποσό του κέρδους που πρέπει να πάρει κάθε ένας από τους μετόχους.

Όπως φαίνεται και στο παρακάτω φύλλο excel στη πρώτη στήλη είναι το κέρδος της εταιρείας, στη δεύτερη στήλη βρίσκονται τα αρχικά κεφάλαια που έχει επενδύσει ο κάθε μέτοχος και στην τρίτη στήλη υπολογίζονται τα μερίσματα των μετόχων με βάση τον παρακάτω τύπο:

=A1*Bi/SUM(B1:B4), i=1,2,3,4



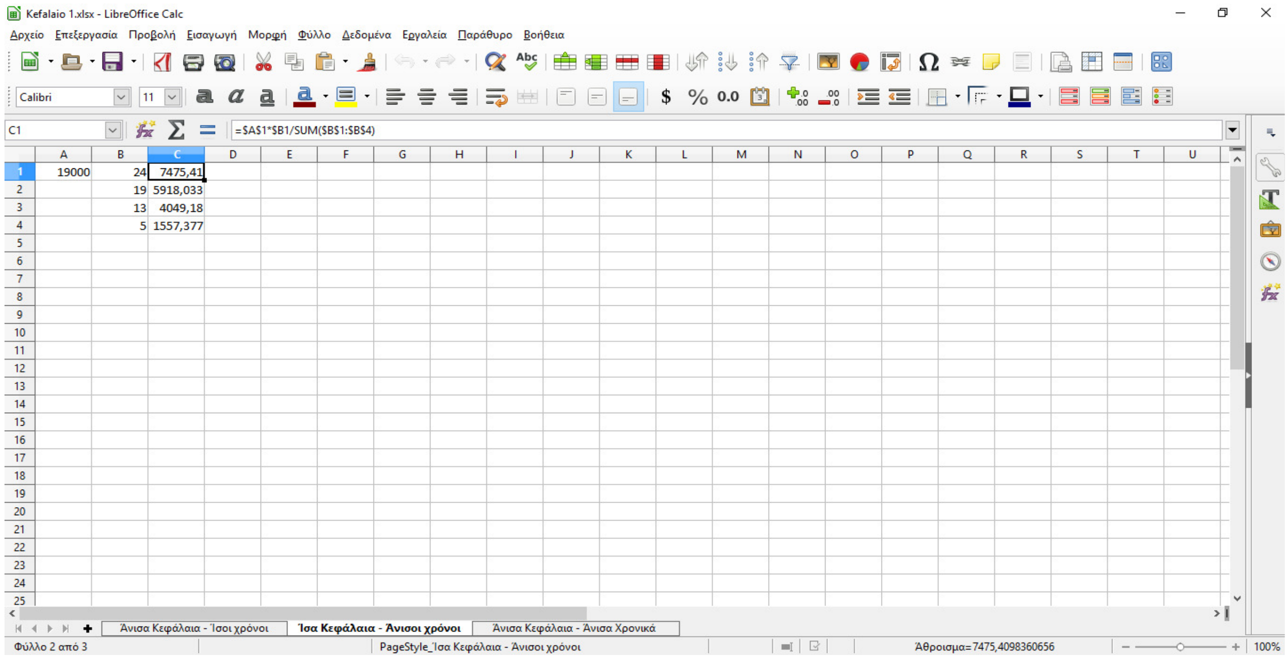
Εικόνα 1:Άνισα Κεφάλαια-Ίσα Χρονικά Διαστήματα

- Ίσα κεφάλαια-άνισα χρονικά διαστήματα

Το κέρδος 19000 ευρώ μίας εταιρείας πρέπει να μεριστεί στους τέσσερις μετόχους της, οι οποίοι κατέβαλλαν σε αυτήν ίσα αρχικά κεφάλαια, αλλά σε διαφορετικούς χρόνους μεταξύ τους, ήτοι: ο πρώτος είχε συμμετοχή 24 μήνες στην εταιρεία, ο δεύτερος 19 μήνες, ο τρίτος 13 μήνες και ο τέταρτος 5 μήνες. Ζητείται να υπολογιστεί το ποσό του κέρδους που πρέπει να λάβει ο κάθε μέτοχος.

Όπως φαίνεται και στο παρακάτω φύλλο excel στη πρώτη στήλη είναι το κέρδος της εταιρείας, στη δεύτερη είναι η συμμετοχή σε μήνες του κάθε μετόχου και στην τελευταία υπολογίζονται τα κέρδη που θα λάβουν οι μέτοχοι με βάση το χρονικό διάστημα που συμμετείχαν με βάση τον παρακάτω τύπο:

=A1*Bi/SUM(B1:B4), i=1,2,3,4



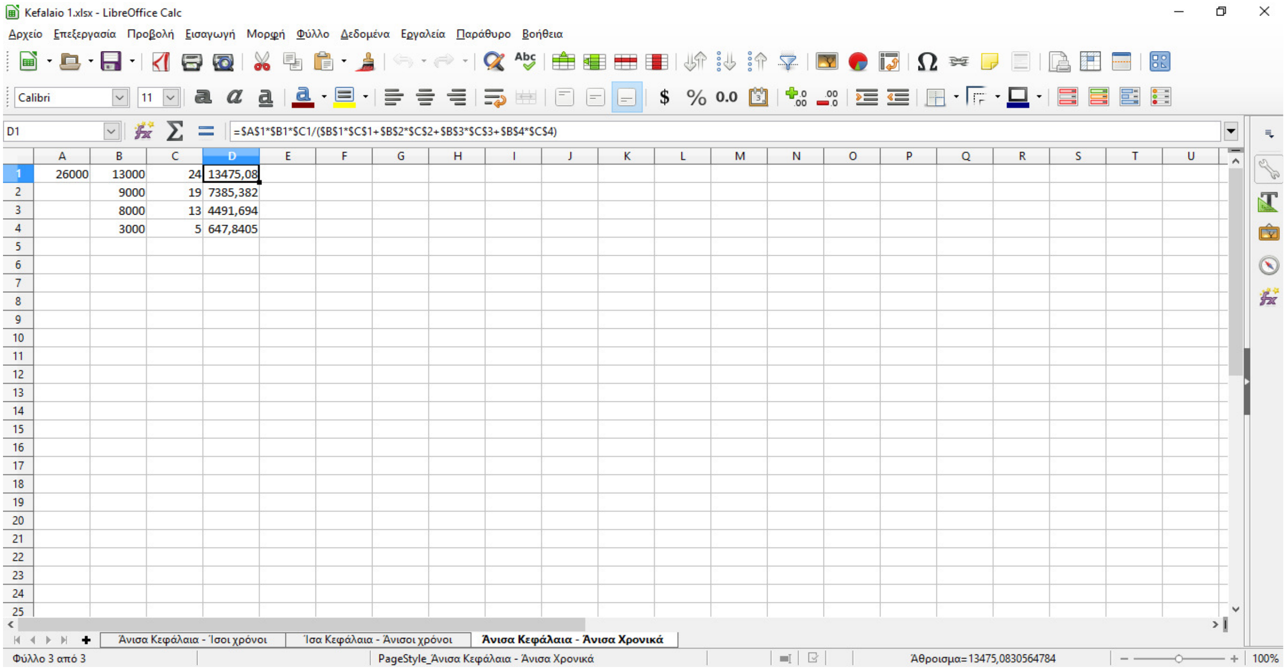
Εικόνα 2:Ίσα Κεφάλαια-Άνισα Χρονικά Διαστήματα

- Άνισα κεφάλαια-άνισα χρονικά διαστήματα

Το κέρδος 26000 ευρώ μίας επιχείρησης πρέπει να μεριστεί στους τέσσερις μετόχους της, οι οποίοι κατέβαλλαν σε αυτή αρχικά κεφάλαια 13000, 9000, 8000 και 3000 ευρώ αλλά σε διαφορετικούς χρόνους μεταξύ τους. Ο ένας είχε συμμετοχή 24 μήνες, ο δεύτερος 19 μήνες, ο τρίτος 13 μήνες και ο τέταρτος 5 μήνες. Ζητείται να υπολογιστεί το ποσό του κέρδους που πρέπει αν λάβει ο κάθε μέτοχος.

Στη πρώτη στήλη είναι είναι το συνολικό κέρδος, στη δεύτερη στήλη είναι τα επενδυμένα κεφάλαια των μετόχων και στην τρίτη στήλη είναι η συμμετοχή του κάθε μετόχου εκφρασμένη σε μήνες. Στη τελευταία στήλη είναι υπολογισμένα τα μερίσματα που αντιστοιχούν στον κάθε μέτοχο. Ο υπολογισμός έγινε με τον παρακάτω τύπο:

=A1*Bi*Ci/(B1*C1+B2*C2+B3*C3+B4*B4), i=1,2,3,4



Εικόνα 3: Άνισα Κεφάλαια-Άνισα Χρονικά Διαστήματα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

Απλός Τόκος

2.1 Βασικοί τύποι υπολογισμού του απλού τόκου

Απλός τόκος ονομάζεται η διαδικασία τοκισμού χρημάτων κατά την οποία από χρονική περίοδο τοκισμού σε χρονική περίοδο τοκισμού ο δανειστής εισπράττει το τόκο του αρχικού κεφαλαίου που έδωσε στον δανειζόμενο και αφήνει μόνο το αρχικό κεφάλαιο να τοκίζεται για κάθε επόμενη χρονική περίοδο τοκισμού. Ο δανειζόμενος με τη λήξη του δανείου οφείλει και επιστρέφει μόνο το αρχικό κεφάλαιο που δανείσθηκε.

Κάποιες γενικευμένες μορφές των προβλημάτων που επιλύονται με τον απλό τόκο είναι οι εξής:

Πρόβλημα 1ο: Κεφάλαιο Κ ευρώ τοκίσθηκε με απλό τόκο και ετήσιο επιτόκιο ε% για n έτη. Να βρεθεί ο συνολικός τόκος που θα δώσει το κεφάλαιο αυτό στο τέλος των n ετών.

Λύση: Το επιτόκιο είναι ε%. Οπότε το ένα ευρώ για ένα έτος θα δώσει τόκο i=ε/100 . Άρα το κεφάλαιο των Κ ευρώ για ένα έτος θα δώσει τόκο Κ*i.

Συνεπώς το κεφάλαιο των Κ ευρώ για n έτη θα δώσει τόκο:

I=K*i+K*i+….+K*i (n-φορές)

ή

I=K*n*i (1)

Η παραπάνω εξίσωση είναι η θεμελιώδης εξίσωση του απλού τόκου.

Πρόβλημα 2ο: Κεφάλαιο Κ ευρώ τοκίσθηκε με απλό τόκο και ετήσιο επιτόκιο ε% για m μήνες. Να βρεθεί ο τόκος που θα δώσει το κεφάλαιο αυτό στο τέλος των m μηνών.

Λύση: Το κεφάλαιο των Κ ευρώ για ένα έτος θα δώσει τόκο Κ*i όπου i=ε/100. Άρα για το διάστημα των m μηνών θα δώσει τόκο:

$$I = \left(\frac{m}{12}\right) * K * i = \frac{K * m * i}{12} \qquad (2)$$

Πρόβλημα 3ο: Κεφάλαιο Κ ευρώ τοκίζεται με απλό τόκο και ετήσιο επιτόκιο e% για t ημέρες. Να βρεθεί ο τόκος που θα δώσει το κεφάλαιο αυτό στο τέλος των t ημερών.

Λύση: Το κεφάλαιο των Κ ευρώ για ένα έτος θα δώσει τόκο Κ*i, όπου i=ε/100. Άρα για το χρονικό διάστημα των t ημερών θα δώσει τόκο:

$$I = \left(\frac{t}{365}\right) * K * i = \frac{K * t * i}{365} \ (3)$$

Αν το έτος είναι δίσεκτο τότε ο παρονομαστής θα γίνει 366.

2.2 Μεικτό, εμπορικό και πολιτικό έτος

Όταν ο χρόνος δίνεται σε ημέρες ο υπολογισμός του απλού τόκου γίνεται με τις παρακάτω μεθόδους:

- Μικτό έτος: Εδώ θεωρείται ότι όλοι οι μήνες του έτους έχουν ακριβώς τις ίδιες μέρες που έχουν ημερολογιακά αλλά το έτος έχει 360 μέρες. Αν χρησιμοποιηθεί αυτή τη πρακτική τότε ο τύπος για τον υπολογισμό του τόκου είναι ο εξής:

$$I = \frac{K * t * i}{360}$$

- Εμπορικό έτος: Εδώ θεωρείται ότι ο κάθε μήνας έχει 30 μέρες και στο έτος έχει 360 μέρες. Αν χρησιμοποιηθεί αυτή η πρακτική τότε ο τύπος για τον υπολογισμό του τόκου είναι ο εξής:

$$I = \frac{K * t * i}{360}$$

- Πολιτικό έτος: Εδώ θεωρείται ότι όλοι οι μήνες του έτους έχουν ακριβώς τις ημέρες που έχουν ημερολογιακά και το έτος 365 ημέρες (εκτός αν είναι δίσεκτο). Αν χρησιμοποιηθεί αυτή η πρακτική τότε ο τύπος που προκύπτει για τον υπολογισμό του τόκου είναι ο εξής:

$$I = \frac{K * t * i}{366}$$

<u>Παρατήρηση:</u> Οι τοκοφόρες ημέρες όταν αποταμιεύονται χρήματα σε μία τράπεζα, αρχίζουν από την επόμενη μέρα της κατάθεσης του κεφαλαίου και τελειώνουν την ημέρα ανάληψης του κεφαλαίου. Ενώ οι τοκοφόρες ημέρες όταν κάποιος δανείζεται ένα κεφάλαιο από μία τράπεζα, ξεκινούν από την ημέρα δανεισμού του κεφαλαίου και τελειώνουν την ημέρα επιστροφής του.

2.3 Τοκάριθμος και σταθερός διαιρέτης

Έστω ένα κεφάλαιο K Ευρώ που τοκίζεται για t ημέρες με ετήσιο επιτόκιο i. Το γινόμενο K*t συμβολίζεται με N και ονομάζεται τοκάριθμος.

Το πηλίκο 360/i ή 365/i συμβολίζεται με Δ και ονομάζεται σταθερός διαιρέτης.

Με βάση τα παραπάνω ο τύπος του απλού τόκου μετασχηματίζεται στον εξής τύπο:

$$I = \frac{K * t * i}{360} = \frac{K * t}{\frac{360}{i}} = \frac{N}{\Delta}$$

2.4 Υπολογισμός του τόκου μιας σειράς κεφαλαίων που κατατέθηκαν σε χρόνους διαφορετικούς μεταξύ τους

Πολλοί καταθέτες (ιδίως αν έχουν αποταμιευτικό λογαριασμό) ενώ έχουν λογαριασμούς με το ίδιο επιτόκιο δεν καταθέτουν μόνο μία φορά αλλά σε διαφορετικούς χρόνους. Σε αυτές τις περιπτώσεις ο συνολικός απλός τόκος δεν είναι τίποτα άλλο από το άθροισμα των τόκων που αντιστοιχούν σε κάθε κεφάλαιο. Σε αυτή την περίπτωση ισχύει:

$$I=I_1+I_2+I_3+\ldots+I_v$$

Ο παραπάνω τύπος με βάση τον τύπο της προηγούμενης ενότητας μετασχηματίζεται ως εξής:

$$I=\frac{N_1+N_2+N_3+\ldots+N_v}{\Delta} \qquad (4)$$

Παρατηρήσεις:

1. Το $N_l=K_l*t_l$ με $l=1,2,3,\ldots,v$
2. Το Δ είναι σταθερό μιας και το i είναι το ίδιο και συνήθως σταθερό για μεγάλο χρονικό διάστημα.

Άρα ο συνολικός τόκος μίας σειράς κεφαλαίων που κατατίθενται για απλή κεφαλαιοποίηση, σε χρόνους διαφορετικούς μεταξύ τους, υπολογίζεται αν διαιρεθεί το άθροισμα των τοκαρίθμων δια του σταθερού διαιρέτη. Με τον τρόπο αυτό υπολογίζεται ο τόκος καταθέσεων χρηματικών ποσών σε Ταμιευτήρια, Τράπεζες κ.λπ.

2.5 Τελική αξία κεφαλαίου

Τελική αξία κεφαλαίου ονομάζεται το άθροισμα του αρχικού κεφαλαίου και του τόκου που αναλογεί σε αυτό για ένα ορισμένο χρονικό διάστημα.

Ένα παράδειγμα εφαρμογής του υπολογισμού της τελικής αξίας κεφαλαίου είναι το εξής:

“Κεφάλαιο 800 ευρώ τοκίζεται με απλό τόκο και ετήσιο επιτόκιο 5% για 70 μέρες. Να βρεθεί η τελική αξία του κεφαλαίου.”

Η τελική αξία είναι η εξής:

$$K = K + I = K + \frac{K*t*i}{360} = K*\left(1+\frac{t*i}{360}\right)$$

Με αντικατάσταση των δεδομένων του παραδείγματος στον παραπάνω τύπο προκύπτει το εξής αποτέλεσμα:

$$K_{70}=800*(1+((70*0,05)/360))=807,77$$

2.6 Δανεισμός Χρημάτων με προκαταβολή του τόκου

Σε αρκετές περιπτώσεις ο δανειζόμενος προκαταβάλει τους τόκους που αναλογούν στο κεφάλαιο που έχει δανειστεί. Η προκαταβολή αυτή γίνεται κατά τη διαδικασία της δανειοδότησης και ως εκ τούτου στη λήξη του δανείου ο δανειζόμενος καταβάλει μόνο το κεφάλαιο. Ο υπολογισμός του τόκου προκύπτει από τον τύπο:

I= K*n*i

όπου K το κεφάλαιο που έχει δανειστεί ο δανειζόμενος, n τα έτη και i το επιτόκιο δανεισμού

Το καθαρό ποσό K_δ που θα εισπράξει ο δανειστής είναι ίσο με :

K_δ=K-I=K-K*n*i=K*(1-n*i) (5)

Παρατήρηση: Αν αντί για έτη το πρόβλημα αναφέρει μήνες ή ημέρες τότε στη θέση του n θα είναι είτε m/12, είτε t/360 αντίστοιχα. Για τις μέρες δε ενδέχεται να είναι και t/360 ανάλογα με τον τρόπο υπολογισμού.

2.7 Μέσο Επιτόκιο

Μέσο Επιτόκιο καλείται το επιτόκιο με το οποίο πρέπει να τοκίσουμε διάφορα Κεφάλαια, για διάφορους χρόνους, ώστε να πάρουμε τον ίδιο συνολικό τόκο που θα παίρναμε, αν τοκίζαμε τα ίδια Κεφάλαια στους ίδιους χρόνους αλλά με διαφορετικά επιτόκια.

Έστω ότι τα κεφάλαια K_j, j=1,2,…,m τοκίσθηκαν για t_j μέρες, j=1,2,…,m με απλό τόκο και ετήσιο επιτόκιο i_j, j=1,2,…,m όπως ορίζεται στον παρακάτω πίνακα:

Κεφάλαιο	Ημέρες	Επιτόκιο	Τόκος
K_1	t_1	i_1	I_1
K_2	t_2	i_2	I_2
...	...	...	...
K_m	t_m	i_m	I_m

Ο συνολικός τόκος που θα δώσουν τα κεφάλαια αυτά είναι:

$$I=I_1+I_2+...+I_m$$

$$=\frac{K_1*t_1*i_1}{360}+...+\frac{K_m*t_m*i_m}{360}$$

$$=\frac{K_1*t_1*i_1+...+K_m*t_m*i_m}{360}$$

Τώρα έστω ότι τα κεφάλαια K_j, j=1, 2, …, m τοκίσθηκαν για t_j μέρες, j=1, 2, …, m με απλό τόκο και ετήσιο επιτόκιο i όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Κεφάλαιο	Ημέρες	Επιτόκιο	Τόκος
K_1	t_1	i	I_1’
K_2	t_2	i	I_2’
...	...	...	...
K_j	t_j	i	I_j’

Ο συνολικός τόκος που θα δώσουν τα κεφάλαια αυτά είναι:

$$I'=I_1'+I_2'+...+I_m'$$

$$=\frac{K_1*t_1*i+...+K_m*t_m*i}{360}$$

Μέσο επιτόκιο των επιτοκίων i_1 , i_2 ,…, i_m ονομάζεται εκείνο το επιτόκιο για το οποίο ισχύει:

$$I=I' \quad (6)$$

Παρατηρήσεις:

1. Από την παραπάνω σχέση και σε συνδυασμό με τους τύπους που έχουν προκύψει από την αρχή του κεφαλαίου προκύπτουν τα εξής:

$$I = I'$$

ή

$$\frac{K_1 * t_1 * i_1 + ... + K_m * t_m * i_m}{360} = \frac{K_1 * t_1 * i + ... + K_m * t_m * i}{360}$$

ή

$$K_1 * t_1 * i_1 + ... + K_m * t_m * i_m = i * \left(K_1 * t_1 + ... + K_m * t_m\right)$$

ή

$$i = \frac{K_1 * t_1 * i_1 + ... + K_m * t_m * i_m}{K_1 * t_1 + ... + K_m * t_m}$$

2. Αν στον τύπο του μέσου επιτοκίου είναι $K_1=K_2=...=K_m$ και $t_1=t_2=...=t_m$ τότε αυτός ο τύπος γίνεται:

$$i = \frac{i_1 + ... + i_m}{m}$$

Άρα σε αυτή την περίπτωση το μέσο επιτόκιο είναι ο μέσος όρος των επιτοκίων.

2.8 Εφαρμογές για τον υπολογισμό του τόκου, της τελικής αξίας και του μέσου επιτοκίου με το Excel

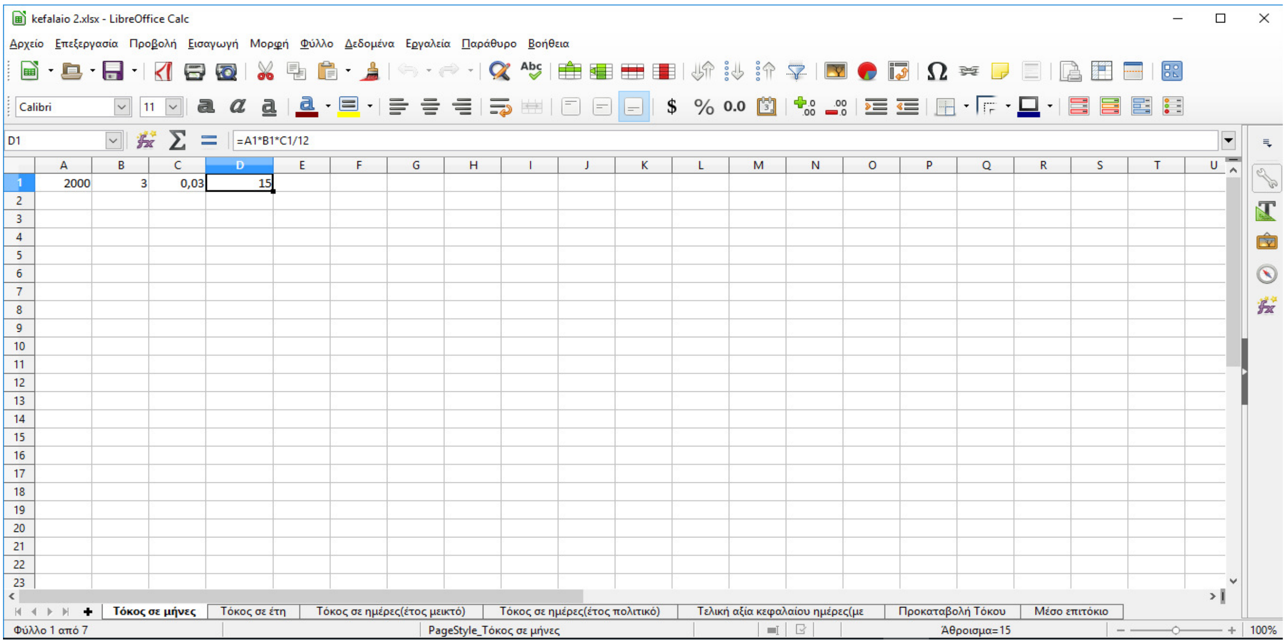
- Υπολογισμός του τόκου όταν ο χρόνος δίνεται σε μήνες

Κεφάλαιο ύψους 2000 ευρώ έχει επενδυθεί για διάστημα 3 μηνών με επιτόκιο 3%. Να βρεθεί ο τόκος που αναλογεί.

Στην πρώτη στήλη εμφανίζεται το κεφάλαιο (2000 ευρώ), στη δεύτερη στήλη το χρονικό διάστημα εκφρασμένο σε μήνες και στη τρίτη στήλη το ύψος του επιτοκίου (0,03). Ο τόκος που προκύπτει είναι 15 ευρώ.

Ο υπολογισμός έγινε με τον παρακάτω τύπο:

=A1*B1*C1/12



Εικόνα 4:Υπολογισμός του τόκου όταν ο τόκος δίνεται σε μήνες

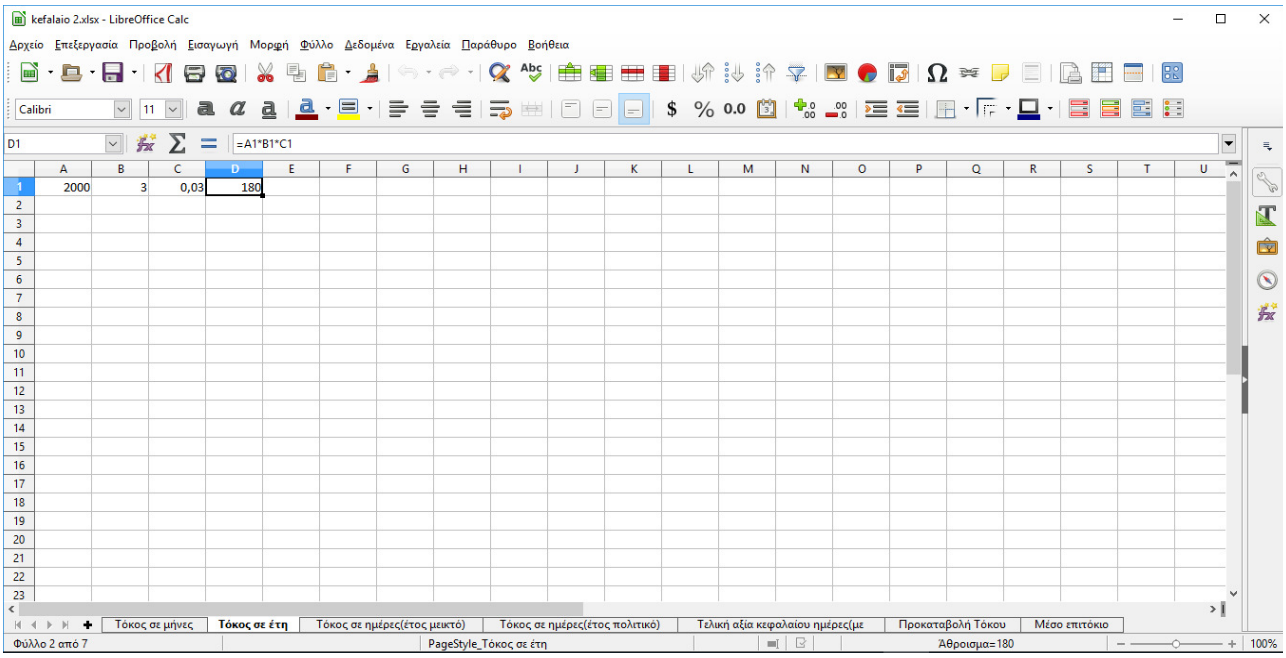
➢ Υπολογισμός του τόκου όταν ο χρόνος δίνεται σε έτη

Κεφάλαιο ύψους 2000 ευρώ έχει επενδυθεί για διάστημα 3 ετών με επιτόκιο 3%. Να βρεθεί ο τόκος που αναλογεί.

Στην πρώτη στήλη εμφανίζεται το κεφάλαιο (2000 ευρώ), στη δεύτερη στήλη το χρονικό διάστημα εκφρασμένο σε έτη και στη τρίτη στήλη το ύψος του επιτοκίου (0,03). Ο τόκος που προκύπτει είναι 180 ευρώ.

Ο υπολογισμός έγινε με τον παρακάτω τύπο:

=A1*B1*C1



Εικόνα 5:Υπολογισμός του τόκου όταν ο τόκος δίνεται σε έτη

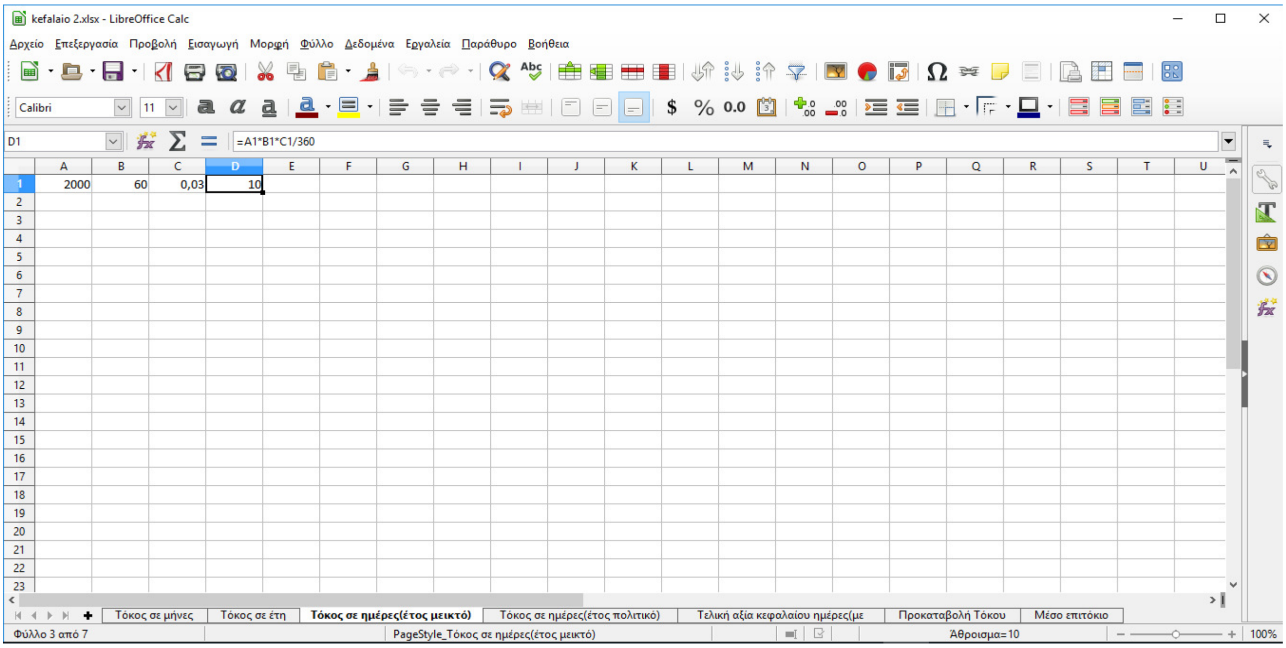
- Υπολογισμός του τόκου όταν ο χρόνος δίνεται σε ημέρες. Έτος μικτό.

Κεφάλαιο ύψους 2000 ευρώ έχει επενδυθεί για διάστημα 60 ημερών με επιτόκιο 3%. Να βρεθεί ο τόκος που αναλογεί με το έτος να είναι μικτό.

Στην πρώτη στήλη εμφανίζεται το κεφάλαιο (2000 ευρώ), στη δεύτερη στήλη το χρονικό διάστημα εκφρασμένο σε ημέρες και στη τρίτη στήλη το ύψος του επιτοκίου (0,03). Ο τόκος που προκύπτει είναι 10 ευρώ.

Ο υπολογισμός έγινε με τον παρακάτω τύπο:

=A1*B1*C1/360



Εικόνα 6:Υπολογισμός του τόκου όταν ο χρόνος δίνεται σε ημέρες-έτος μεικτό

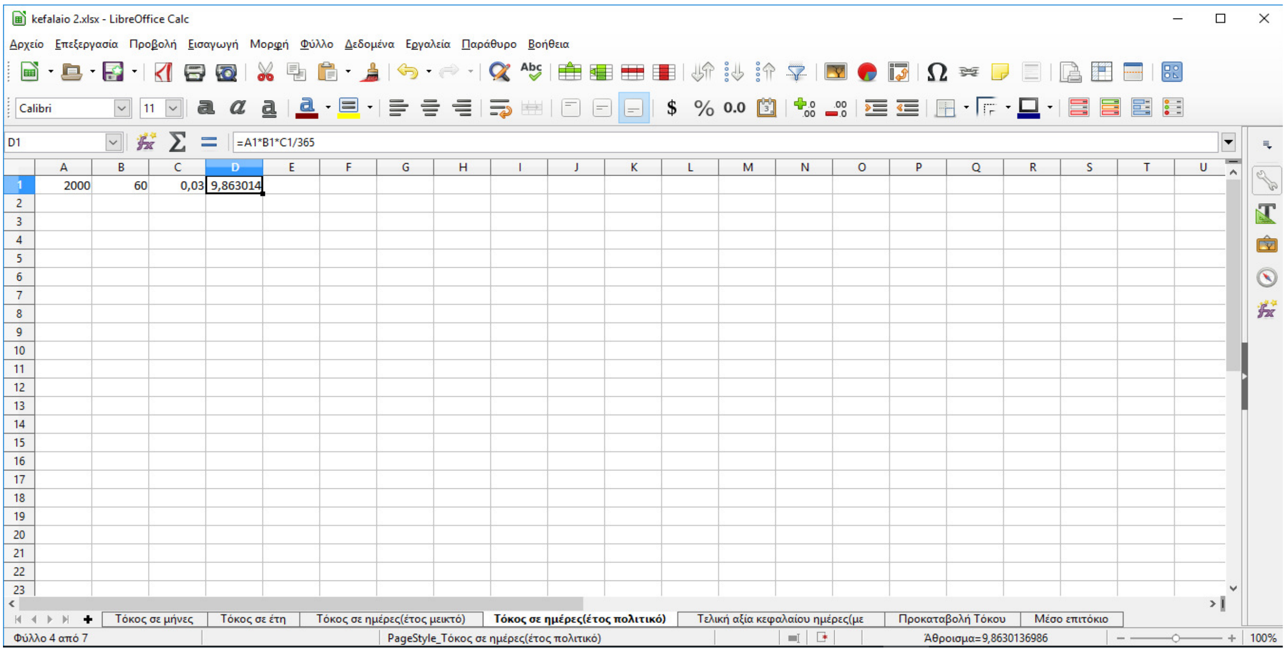
- Υπολογισμός του τόκου όταν ο χρόνος δίνεται σε ημέρες. Έτος πολιτικό.

Κεφάλαιο ύψους 2000 ευρώ έχει επενδυθεί για διάστημα 60 ημερών με επιτόκιο 3%. Να βρεθεί ο τόκος που αναλογεί με το έτος να είναι πολιτικό.

Στην πρώτη στήλη εμφανίζεται το κεφάλαιο (2000 ευρώ), στη δεύτερη στήλη το χρονικό διάστημα εκφρασμένο σε ημέρες και στη τρίτη στήλη το ύψος του επιτοκίου (0,03). Ο τόκος που προκύπτει είναι 9,86 ευρώ.

Ο υπολογισμός έγινε με τον παρακάτω τύπο:

$$=A1*B1*C1/365$$



Εικόνα 7:Υπολογισμός του τόκου όταν χρόνος δίνεται σε ημέρες-έτος πολιτικό

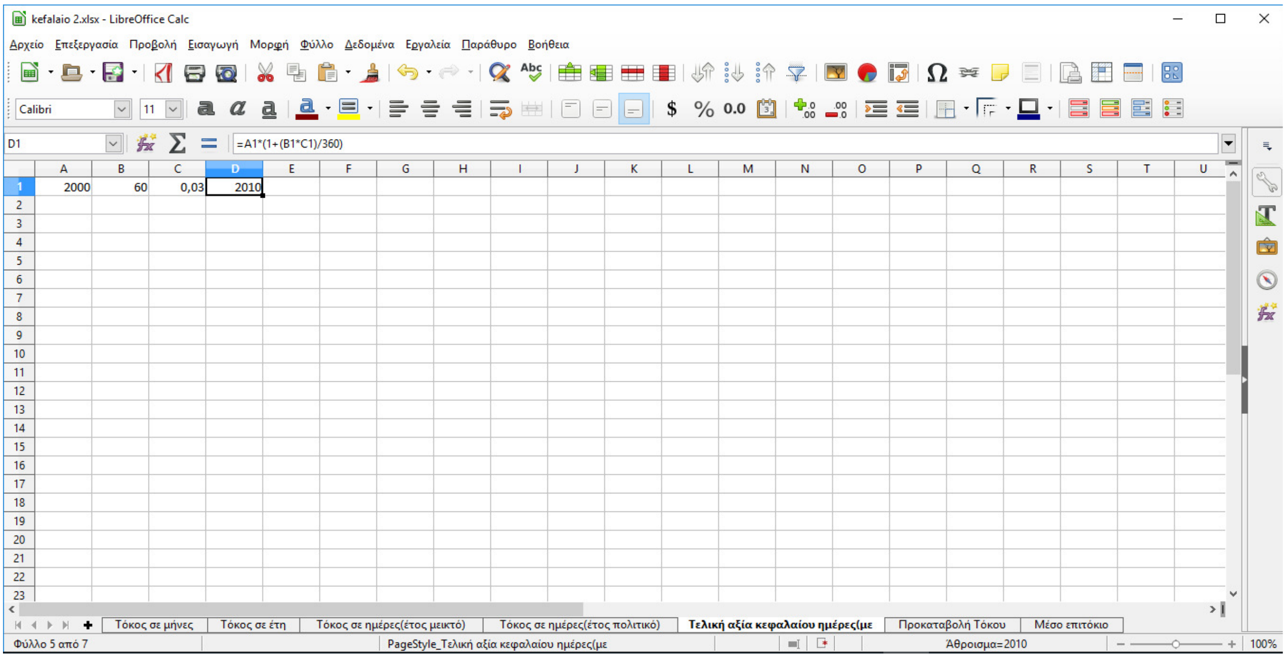
- Υπολογισμός της τελικής αξίας ενός κεφαλαίου όταν ο χρόνος δίνεται σε ημέρες. Έτος μικτό.

Κεφάλαιο ύψους 2000 ευρώ έχει επενδυθεί για διάστημα 60 ημερών με επιτόκιο 3%. Να βρεθεί η τελική αξία ενώ το έτος είναι μικτό.

Στην πρώτη στήλη εμφανίζεται το κεφάλαιο (2000 ευρώ), στη δεύτερη στήλη το χρονικό διάστημα εκφρασμένο σε ημέρες και στη τρίτη στήλη το ύψος του επιτοκίου (0,03). Η τελική αξία που προκύπτει είναι 2010 ευρώ.

Ο υπολογισμός έγινε με τον παρακάτω τύπο:

=A1*(1+(B1*C1)/360)



Εικόνα 8: Υπολογισμός της τελικής αξίας ενός κεφαλαίου όταν ο χρόνος δίνεται σε ημέρες.-έτος μικτό.

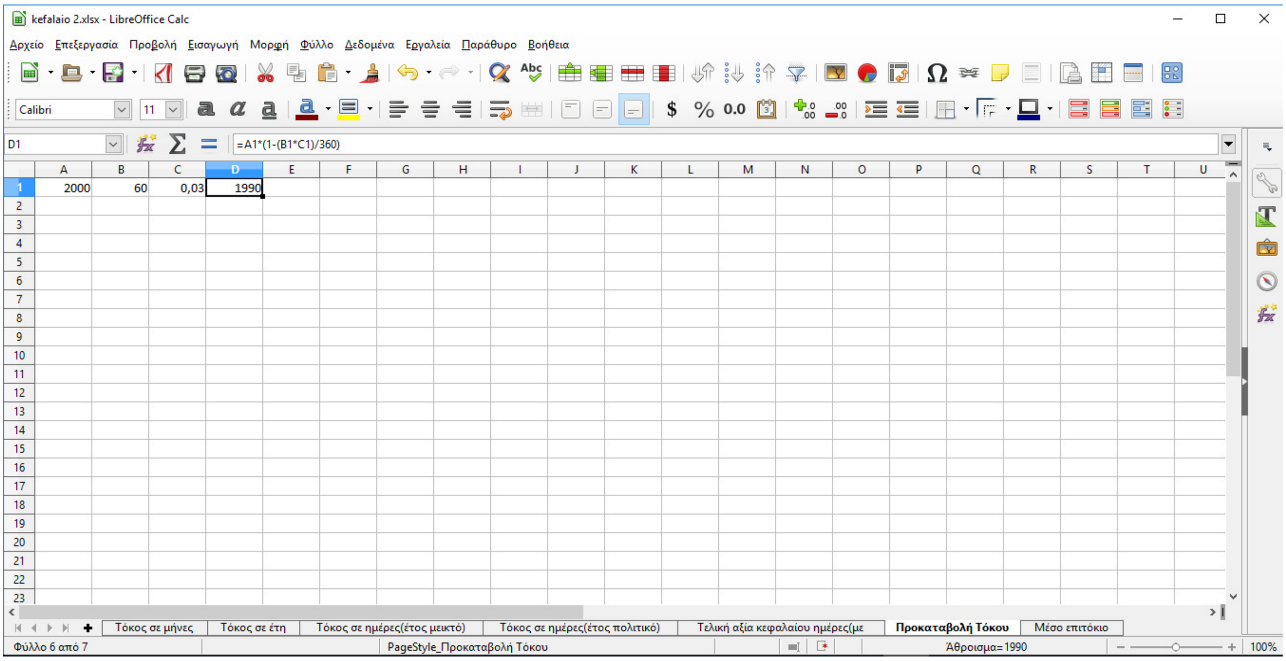
- Υπολογισμός του καθαρού ποσού που εισπράττει ο δανειζόμενος ενός κεφαλαίου, όταν έχουμε δανεισμό χρημάτων με προκαταβολή του τόκου και ο χρόνος δίνεται σε ημέρες. Έτος μικτό.

Κεφάλαιο ύψους 2000 ευρώ δίνεται σε δανειζόμενο με προκαταβολή τόκου. Το επιτόκιο είναι 3% ενώ το χρονικό διάστημα είναι 60 ημέρες. Να βρεθεί το καθαρό ποσό που θα εισπράξει ο δανειζόμενος.

Στην πρώτη στήλη εμφανίζεται το κεφάλαιο (2000 ευρώ), στη δεύτερη στήλη το χρονικό διάστημα εκφρασμένο σε ημέρες και στη τρίτη στήλη το ύψος του επιτοκίου (0,03). Το καθαρό ποσό που θα εισπράξει ο δανειζόμενος είναι 1990 ευρώ.

Ο υπολογισμός έγινε με τον παρακάτω τύπο:

=A1*(1-(B1*C1)/360)



Εικόνα 9: Υπολογισμός του καθαρού ποσού που εισπράττει ο δανειζόμενος ενός κεφαλαίου, όταν έχουμε δανεισμό χρημάτων με προκαταβολή του τόκου και ο χρόνος δίνεται σε ημέρες.-έτος μικτό.

- Υπολογισμός του μέσου επιτοκίου

Τα κεφάλαια 1000, 2000, 3000, 4000, 5000 ευρώ τοκίσθηκαν με απλό τόκο για 20, 30, 40, 50 και 60 ημέρες αντίστοιχα με επιτόκια 4%, 5%, 7%, 9%, 11%. Να βρεθεί το μέσο επιτόκιο αυτών.

Η παρακάτω εφαρμογή υλοποιήθηκε για υπολογισμό του μέσου επιτοκίου μέχρι και για 5 επιτόκια αλλά μπορεί εύκολα να επεκταθεί και για παραπάνω. Στην πρώτη στήλη είναι τα πέντε κεφάλαια που έχουν δοθεί. Στη δεύτερη στήλη είναι οι ημέρες τοκισμού που αντιστοιχούν στο κάθε κεφάλαιο και στην τρίτη στήλη είναι τα επιτόκια που αντιστοιχούν στο κάθε κεφάλαιο.

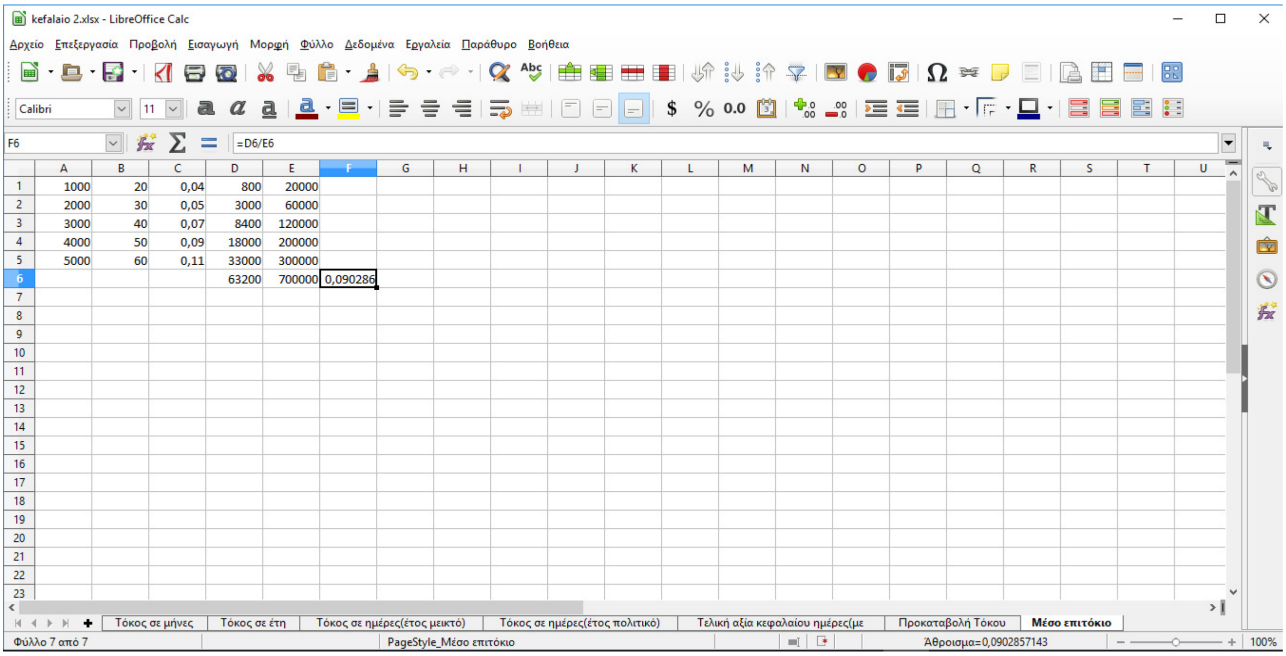
Στη τέταρτη στήλη έχει υπολογιστεί η ποσότητα Ai*Bi*Ci με i=1,2,3,4,5

Στη πέμπτη στήλη έχει υπολογιστεί η ποσότητα Ai*Bi με i=1,2,3,4,5

Στα κελιά D6 και E6 υπολογίστηκαν τα αθροίσματα των στηλών D και E αντίστοιχα.

Εφόσον έχουν υπολογιστεί και τα αθροίσματα των στηλών D και E το μέσο επιτόκιο δεν είναι τίποτα άλλο από την διαίρεση του D6 με το E6 (D6/E6) και το αποτέλεσμα εμφανίζεται στο κελί F6.

Το μέσο επιτόκιο είναι περίπου 9%



Εικόνα 10:Υπολογισμός του μέσου επιτοκίου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

Προεξόφληση

3.1 Βασικοί Ορισμοί

Πολλές φορές σε εμπορικές συναλλαγές οι συναλλαγές μεταξύ των πωλητών και των αγοραστών γίνονται μέσω συναλλαγών με πίστωση. Η **συναλλαγή με πίστωση** πρακτικά σημαίνει τη μη εξόφληση μιας χρηματικής υποχρέωσης με μετρητά. Στην περίπτωση της συναλλαγής με πίστωση ο πωλητής ή πιστωτής δεν πληρώνεται σε μετρητά και ο αγοραστής ή οφειλέτης δεν εξοφλεί τον πιστωτή σε μετρητά αλλά του υπόσχεται γραπτώς την εξόφληση του ποσού που οφείλει.

Οι πιστωτικοί τίτλοι που χρησιμοποιούνται στην συναλλαγή με πίστωση είναι οι εξής:

1. **Γραμμάτιο σε διαταγή**: εκδίδεται από τον οφειλέτη, ο οποίος και υπογράφει.
2. **Συναλλαγματική**: Εκδίδεται από τον πιστωτή, ο οποίος και υπογράφει, αλλά φέρει και την υπογραφή του οφειλέτη.

Και οι δύο πιστωτικοί τίτλοι εκδίδονται κυρίως για την αγορά εμπορευμάτων και χρησιμοποιούνται ως μέσο πληρωμών αντικαθιστώντας το χρήμα.

Η ημερομηνία που αναγράφεται επάνω στο τίτλο (συναλλαγματική ή γραμμάτιο) για την πληρωμή του οφειλόμενου ποσού από τον οφειλέτη στον πιστωτή ονομάζεται **ημερομηνία λήξης συναλλαγματικής ή γραμματίου**.

Γενικά η εξόφληση των συναλλαγματικών ή των γραμματίων μπορεί να γίνει είτε στην ημερομηνία λήξης τους είτε νωρίτερα. Αν η εξόφληση αυτών των τίτλων γίνει νωρίτερα από την λήξη τους στις τράπεζες τότε προκύπτει η **προεξόφληση**.

Στην περίπτωση όπου η συναλλαγματική ή το γραμμάτιο δεν πληρωθεί μέχρι και την ημερομηνία λήξεως τότε προκύπτει η δικαστική απαίτηση είσπραξης του ποσού. Τότε έχουμε τη λεγόμενη **διαμαρτύρηση συναλλαγματικής ή δανείου**. Μέσω αυτή της διαδικασίας ουσιαστικά ζητείται ή εκποίηση κινητής και ακίνητης περιουσίας του οφειλέτη ώστε να ικανοποιηθούν οι έννομες απαιτήσεις του πιστωτή.

Ονομαστική αξία συναλλαγματικής ή γραμματίου είναι το ποσό που αναγράφεται πάνω στη συναλλαγματική.

Προεξόφλημα είναι το ποσό που παρακρατείται από τη τράπεζα στην περίπτωση προεξόφλησης μίας συναλλαγματικής ή ενός γραμματίου. Το προεξόφλημα διακρίνεται σε απλό και σύνθετο. **Απλό προεξόφλημα** ονομάζεται αυτό που αφορά τις βραχυπρόθεσμες οικονομικές πράξεις, ενώ **σύνθετο προεξόφλημα** ονομάζεται αυτό που αφορά τις μακροπρόθεσμες οικονομικές πράξεις.

Παρούσα αξία ονομάζεται το ποσό που θα εισπράξει κάποιος που θα προεξοφλήσει μία συναλλαγματική ή ένα γραμμάτιο σε μία ορισμένη χρονική στιγμή πριν από τη λήξη της.

Η ονομαστική αξία της συναλλαγματικής ή ενός γραμματίου είναι το άθροισμα της παρούσας αξίας και του προεξοφλήματος.

Στη συνέχεια θα αναλυθούν τα είδη του απλού προεξοφλήματος. Το απλό προεξόφλημα διακρίνεται σε δύο κατηγορίες οι οποίες είναι οι εξής:

- **Εξωτερική προεξόφληση**: είναι ο τόκος της ονομαστικής αξίας.
- **Εσωτερική προεξόφληση**: είναι ο τόκος της παρούσας αξίας.

3.2 Εξωτερική Προεξόφληση

Όπως έγινε αναφορά και σε προηγούμενη ενότητα η εξωτερική προεξόφληση είναι η προεξόφληση κατά την οποία το προεξόφλημα υπολογίζεται με βάση την ονομαστική αξία της συναλλαγματικής. Η εξωτερική προεξόφληση χρησιμοποιείται σχεδόν σε όλη την Ευρώπη (εκτός από το Ηνωμένο Βασίλειο όπου χρησιμοποιείται η εσωτερική προεξόφληση).

Συμβολισμοί:

K: Ονομαστική αξία της συναλλαγματικής

E: Εξωτερικό προεξόφλημα

i: Επιτόκιο προεξόφλησης

A: Πραγματική ή παρούσα αξία συναλλαγματικής

t: Αριθμός ημερών πριν από τη λήξη της συναλλαγματικής

Μία συναλλαγματική ονομαστικής αξίας K, προεξοφλείται εξωτερικά t ημέρες πριν από τη λήξη της με επιτόκιο προεξόφλησης i. Αν το έτος είναι μικτό ή εμπορικό, τότε για το προεξόφλημα E και την πραγματική αξία αυτού του πιστωτικού τίτλου ισχύουν οι παρακάτω τύποι:

$$E = \frac{K * t * i}{360}$$

ή

$$E = \frac{K * t}{\Delta}$$

με $\Delta = \dfrac{360}{i}$ και Α= Κ-Ε

<u>Παρατήρηση:</u> Αν ο χρόνος των t ημερών είναι n έτη ή m μήνες, τότε το προεξόφλημα υπολογίζεται από τους παρακάτω τύπους:

$$E = K * n * i$$

και

$$E = \frac{K * m * i}{12}$$

αντίστοιχα. Ένα παράδειγμα εφαρμογής της εξωτερικής προεξόφλησης είναι το εξής:

“Συναλλαγματική ονομαστικής αξίας 200 ευρώ προεξοφλείται εξωτερικά 50 μέρες πριν από τη λήξη της και δίνει πραγματική αξία 197 ευρώ. Να βρεθεί το προεξόφλημα και το επιτόκιο προεξόφλησης.”

Αρχικά υπολογίζεται το εξωτερικό προεξόφλημα

Ε=Κ-Α=200-197=3

Στη συνέχεια και με δεδομένο το εξωτερικό προεξόφλημα μπορεί να υπολογιστεί και το επιτόκιο προεξόφλησης.

$$E = \frac{K * t * i}{360}$$

ή

$$3 = \frac{200 * 50 * i}{360}$$

ή

$$i = 0{,}108$$

<u>Παρατήρηση</u>:

Αν στον τύπο $E = \dfrac{K * t}{\Delta}$ έχουμε:

- t=Δ, τότε Ε=Κ
- t>Δ, τότε Ε>Κ άρα το εξωτερικό προεξόφλημα μπορεί να γίνει μεγαλύτερο της ονομαστικής αξίας ή ίσο

3.3 Εσωτερική Προεξόφληση

Η εσωτερική προεξόφληση είναι η προεξόφληση όπου το προεξόφλημα υπολογίζεται με βάση την πραγματική αξία της συναλλαγματικής.

Συμβολισμοί:

K: Ονομαστική αξία

E_1: Εσωτερικό προεξόφλημα

i: Επιτόκιο προεξόφλησης

A_1: Πραγματική αξία συναλλαγματικής

t: Αριθμός ημερών πριν από τη λήξη της συναλλαγματικής

Έστω ότι υπάρχει μία συναλλαγματική ονομαστικής αξίας K, η οποία προεξοφλείται εσωτερικά t ημέρες πριν από τη λήξη της με επιτόκιο εσωτερικής προεξόφλησης i και δίνει πραγματική αξία A_1. Αν το έτος είναι εμπορικό, τότε για το προεξόφλημα και την πραγματική αξία αυτής ισχύουν τα εξής:

$$E_1 = \frac{A_1 * t * i}{360}$$

ή

$$E_1 = \frac{A_1 * t}{\Delta}$$

όπου $\Delta = \dfrac{360}{i}$ και $A_1=K-E_1$

Παρατηρήσεις:

- Αν ο χρόνος t ημερών είναι n έτη και m μήνες, τότε το εσωτερικό προεξόφλημα υπολογίζεται από τους τύπους:

$$E_1 = A_1 * n * i$$

και

$$E_1 = \frac{A_1 * m * i}{12}$$

- Οι τύποι που έχουν αναφερθεί σχετικά με τον υπολογισμό του εσωτερικού προεξοφλήματος έχουν το μειονέκτημα ότι έχουν δύο άγνωστες ποσότητες, το A_1 και το E_1. Γι’αυτό το λόγο είναι η επιτακτική η ανάγκη εφαρμογής ενός πιο εύχρηστου τύπου, έτσι ισχύει το εξής:

$$E_1=K-A_1$$

ή

$$A_1=K-E_1$$

Κάνοντας χρήση του παραπάνω στον τύπο του εσωτερικού προεξοφλήματος προκύπτει το εξής:

$$E_1 = \frac{A_1 * t * i}{360}$$

ή

$$E_1 = \frac{(K - E_1) * t * i}{360}$$

ή

$$E_1 = \frac{K * t}{\Delta + t}$$

- Πάντα ισχύει ότι $t<t+\Delta$, άρα $\frac{t}{t+\Delta} < 1$. Συνεπώς $\frac{K * t}{\Delta + t} < K$ και επιπλέον $E_1<K$. Άρα το εσωτερικό προεξόφλημα δεν μπορεί σε καμία περίπτωση να είναι μεγαλύτερο από την πραγματική αξία.

3.4 Διαφορά προεξοφλημάτων και πραγματικών αξιών

Έστω ότι μία συναλλαγματική έχει ονομαστική αξία Κ η οποία προεξοφλείται t ημέρες πριν από τη λήξη της με επιτόκιο i τότε ισχύει:

$$E = \frac{K * t}{\Delta}$$

και

$$E_1 = \frac{K * t}{\Delta + t}$$

Από τους παραπάνω τύπους προκύπτει ότι η εσωτερική προεξόφληση είναι μικρότερη από την εξωτερική μιας και ο παρονομαστής είναι μεγαλύτερος. Άρα $E>E_1$.

Η διαφορά μεταξύ των δύο τύπων προεξοφλήσεων δίνει τα εξής:

$$E - E_1 = \frac{K * t}{\Delta} - \frac{K * t}{\Delta + t} = \frac{K * t * (\Delta + t) - K * t * \Delta}{\Delta * (\Delta + t)} = \frac{K * t^2}{\Delta * (\Delta + t)}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι A_1=K-E_1 και A=K-E προκύπτει ότι A_1>A με δεδομένο ότι E>E_1.

Άρα για την διαφορά A_1-A προκύπτουν τα εξής:

$$A_1 - A = K - E_1 - (K - E) = E - E_1 = \frac{K * t^2}{\Delta * (\Delta + t)}$$

3.5 Προεξόφληση με έξοδα

Οι τράπεζες πολλές φορές εκτός από το προεξόφλημα κρατούν και άλλα ποσά για προμήθεια, χαρτόσημο και άλλα επιμέρους έξοδα τα οποία υπολογίζονται επί της ονομαστικής αξίας είτε του γραμματίου, είτε της συναλλαγματικής.

Έστω ότι υπάρχει μία συναλλαγματική με ονομαστική αξία K. Η συγκεκριμένη συναλλαγματική προεξοφλείται t ημέρες πριν από τη λήξη της με επιτόκιο i. Κατά την προεξόφληση κρατείται προμήθεια π%, έξοδα ε% και χαρτόσημο χ ευρώ. Η καθαρή παρούσα αξία θα προσδιοριστεί με δύο τρόπους:

1. Με εξωτερική προεξόφληση
2. Με εσωτερική προεξόφληση

- Με εξωτερική προεξόφληση

Για την εξωτερική προεξόφληση της συναλλαγματικής κρατούνται τα παρακάτω ποσά από τη τράπεζα:

- Εξωτερικό προεξόφλημα: $E = \frac{K * t}{\Delta}$
- Προμήθεια: $\Pi = \frac{\pi * K}{100}$
- Διάφορα έξοδα: $E_\delta = \frac{\varepsilon * K}{100}$
- Χαρτόσημο: χ

Άρα:

$$A = K - E - \Pi - E_\delta - \chi = K - \frac{K * t}{\Delta} - \frac{\pi * K}{100} - \frac{\varepsilon * K}{100} - \chi$$

- Με εσωτερική προεξόφληση

Για την εσωτερική προεξόφληση της συναλλαγματικής κρατούνται τα παρακάτω ποσά από τη τράπεζα:

- Εξωτερικό προεξόφλημα: $E_1 = \dfrac{K * t}{\Delta + t}$
- Προμήθεια: $\Pi = \dfrac{\pi * K}{100}$
- Διάφορα έξοδα: $E_\delta = \dfrac{\varepsilon * K}{100}$
- Χαρτόσημο: χ

Άρα:

$$A_1 = K - E_1 - \Pi - E_\delta - \chi = K - \frac{K * t}{\Delta + t} - \frac{\pi * K}{100} - \frac{\varepsilon * K}{100} - \chi$$

Είναι φανερό ότι η μόνη αλλαγή ανάλογα με την μέθοδο που θα ακολουθηθεί είναι μόνο στο ύψος της προεξόφλησης. Δεν υπάρχει καμία διαφορά ούτε στις προμήθειες, ούτε στα διάφορα έξοδα, ούτε και στο χαρτόσημο το οποίο έτσι και αλλιώς είναι ένα συγκεκριμένο ποσό.

3.6 Επισυναλλαγματική, πραγματικό επιτόκιο προεξόφλησης και πινάκιο προεξόφλησης

- Επισυναλλαγματική

Στις περιπτώσεις όπου ο οφειλέτης δεν μπορεί να πληρώσει τη συναλλαγματική κατά τη λήξη της εκδίδει μία νέα συναλλαγματική για την κάλυψη της οφειλής της παλιάς συναλλαγματικής που έληξε. Αυτή η συναλλαγματική ονομάζεται επισυναλλαγματική και έχει πραγματική αξία την ημέρα λήξης της παλιάς συναλλαγματικής ίση με την ονομαστική αξία αυτής.

Για την εύρεση της ονομαστικής αξίας της επισυναλλαγματικής αρκεί να βρεθεί το Κ. Για να βρεθεί το Κ αρκεί να γίνει το εξής:

$$A = K - E - \Pi - E_\delta - \chi \Rightarrow K = A + E + \Pi + E_\delta + \chi \Rightarrow K = A + \frac{K * t}{\Delta} + \frac{\pi * K}{100} + \frac{\varepsilon * K}{100} + \chi$$

- Πραγματικό επιτόκιο προεξόφλησης

Οι τράπεζες κατά τη διάρκεια της προεξόφλησης με έξοδα, με την κράτηση επιπλέον ποσών: προμήθεια, διάφορα έξοδα και χαρτόσημο ουσιαστικά αυξάνουν το επιτόκιο προεξόφλησης. Αυτό το επιτόκιο ονομάζεται πραγματικό επιτόκιο προεξόφλησης.

Έστω ότι μία συναλλαγματική αξίας Κ ευρώ προεξοφλείται με έξοδα, t μέρες πριν από τη λήξη της και δίνει πραγματική αξία Α, τότε το πραγματικό επιτόκιο j είναι εκείνο το επιτόκιο βάσει του οποίου πρέπει να τοκιστεί το ποσό Α για t μέρες ώστε να προκύψει ως τόκος το συνολικό ποσό που κρατάει η τράπεζα κατά την προεξόφληση που είναι Κ-Α.

Άρα ισχύει το εξής (αν το έτος είναι μικτό):

$$\frac{A * t * j}{360} = K - A \Rightarrow j = \frac{(K - A) * 360}{A * t}$$

Αν το έτος είναι πολιτικό τότε στη θέση του 360 θα είναι 365.

- Πινάκιο προεξόφλησης

Όταν ένας πιστωτής προσκομίζει στη τράπεζα συναλλαγματικές οφειλετών για προεξόφληση, τότε καταχωρούνται τα στοιχεία τους σε ένα ειδικό έντυπο το οποίο ονομάζεται πινάκιο προεξόφλησης. Η χρήση του πινακίου προεξόφλησης έχει αρχίσει να καταργείται καθώς η συμπλήρωσή του είναι χρονοβόρα και η χρήση του είναι δύσκολη.

3.7 Υπολογισμός του προεξοφλήματος και της πραγματικής αξίας ενός γραμματίου με τη χρήση Excel

- Υπολογισμός του εξωτερικού και εσωτερικού προεξοφλήματος

Έστω ότι υπάρχει συναλλαγματική με ονομαστική αξία Κ=400 ευρώ και προεξοφλείται. Οι ημέρες μέχρι την λήξη είναι 45 και το επιτόκιο προεξόφλησης είναι 9%. Να βρεθεί το εσωτερικό και το εξωτερικό προεξόφλημα καθώς και η διαφορά αυτών.

Στη πρώτη στήλη είναι η ονομαστική αξία, στη δεύτερη οι ημέρες μέχρι τη λήξη και στη τρίτη το επιτόκιο προεξόφλησης.

Στο κελί D1 είναι η τιμή του εξωτερικού προεξοφλήματος. Για τον υπολογισμό αυτού χρησιμοποιήθηκε ο τύπος:

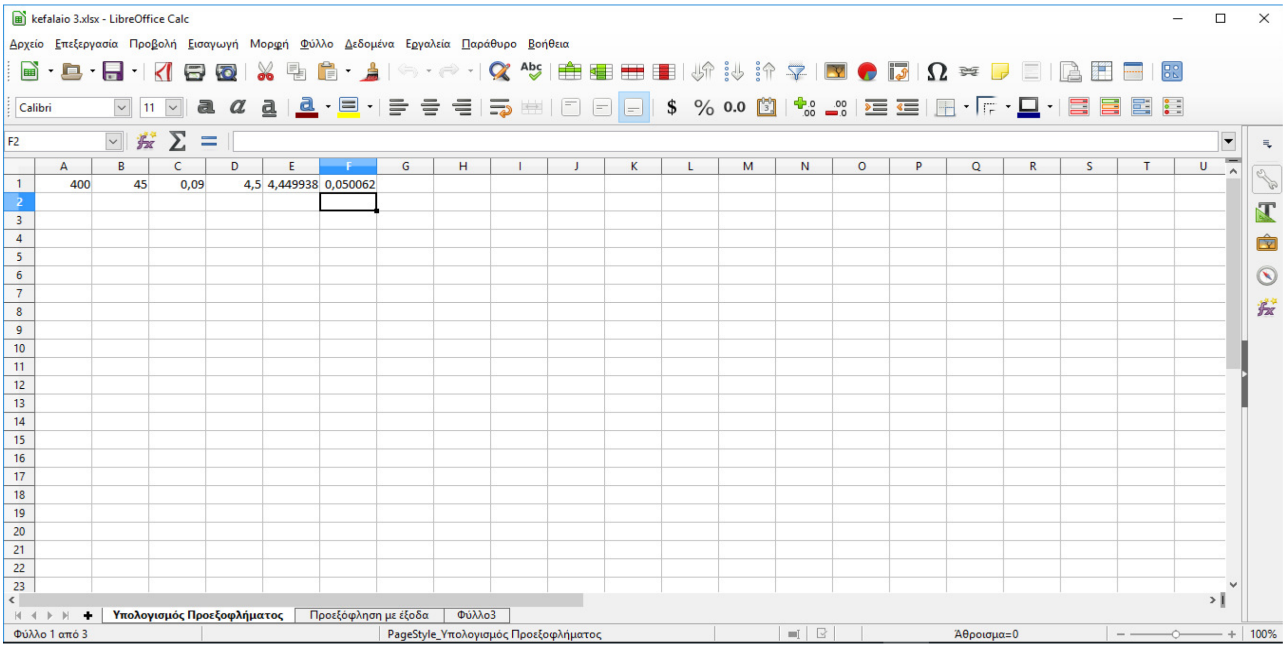
=A1*B1*C1/360

Στο κελί E1 είναι η τιμή του εσωτερικού προεξοφλήματος. Για τον υπολογισμό αυτού χρησιμοποιήθηκε ο τύπος:

=(A1*B1)/((360/C1)+B1)

Στο κελί F1 είναι η διαφορά των δύο προεξοφλημάτων. Για τον υπολογισμό αυτής της διαφοράς χρησιμοποιήθηκε ο τύπος:

=D1-E1



Εικόνα 11:Υπολογισμός του εσωτερικού και του εξωτερικού προεξοφλήματος

- Προεξόφληση με έξοδα-Υπολογισμός της πραγματικής αξίας στην εξωτερική και εσωτερική προεξόφληση

Έστω ότι υπάρχει συναλλαγματική με ονομαστική αξία K=400 ευρώ και προεξοφλείται. Οι ημέρες μέχρι την λήξη είναι 45 και το επιτόκιο προεξόφλησης είναι 9%. Να βρεθεί το εσωτερικό και το εξωτερικό προεξόφλημα καθώς και η διαφορά αυτών. Το ποσοστό προμήθειας είναι 0,25%, το ποσοστό των εξόδων είναι 0,5% και το χαρτόσημο είναι 1,5 ευρώ. Ζητείται να βρεθεί η πραγματική προεξόφληση του γραμματίου όταν η εξόφληση είναι εσωτερική, η πραγματική αξία του γραμματίου όταν η προεξόφληση είναι εξωτερική, καθώς και το πραγματικό επιτόκιο προεξόφλησης.

Στη πρώτη στήλη είναι η ονομαστική αξία, στη δεύτερη οι ημέρες μέχρι τη λήξη και στη τρίτη το επιτόκιο προεξόφλησης. Στη τέταρτη στήλη είναι το ποσοστό προμήθειας, στην πέμπτη το ποσοστό των εξόδων και στην έκτη το χαρτόσημο.

Στο κελί G1 είναι η πραγματική αξία στην εξωτερική προεξόφληση. Για τον υπολογισμό αυτής χρησιμοποιήθηκε ο τύπος:

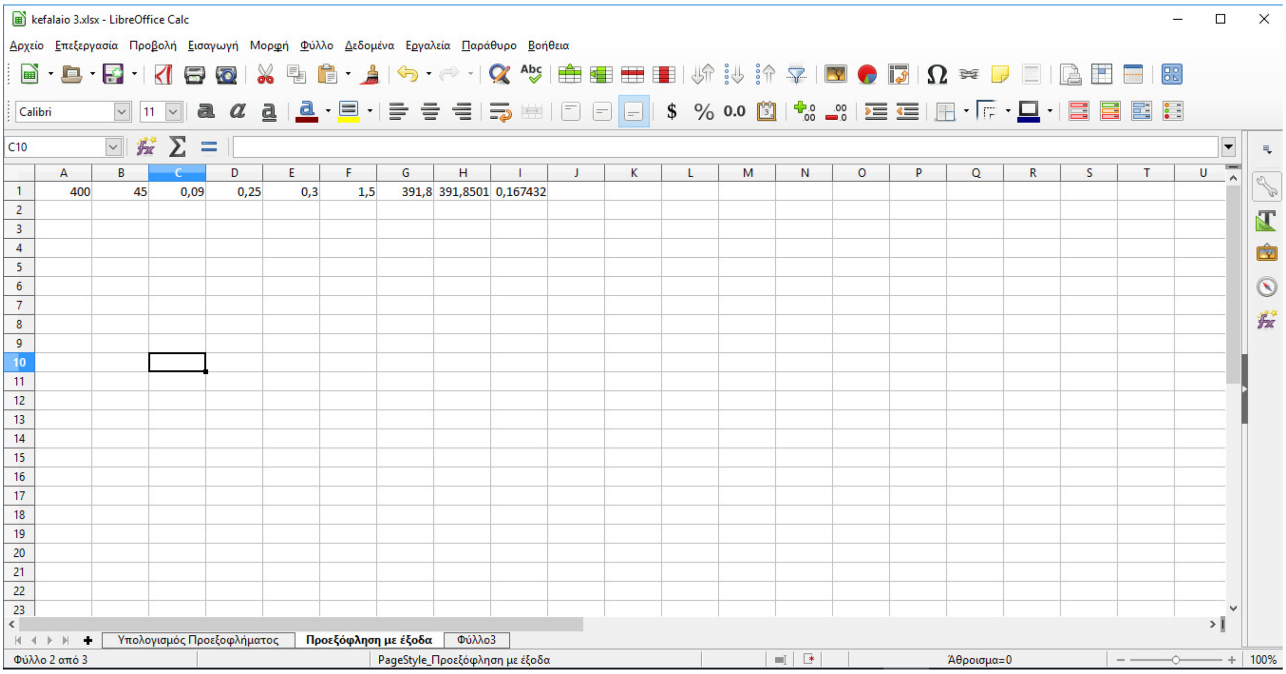
=A1-((A1*B1*C1)/360)-((D1*A1)/100)-((E1*A1)/100)-F1

Στο κελί H1 είναι η πραγματική αξία στην εσωτερική προεξόφληση. Για τον υπολογισμό αυτής χρησιμοποιήθηκε ο τύπος:

=A1-((A1*B1)/((360/C1)+B1))-((D1*A1)/100)-((E1*A1)/100)-F1

Στο κελί I1 είναι το πραγματικό επιτόκιο προεξόφλησης. Για τον υπολογισμό αυτής της διαφοράς χρησιμοποιήθηκε ο τύπος:

=((A1-G1)*360)/(G1*B1).



Εικόνα 41: Προεξόφληση με έξοδα-Υπολογισμός της πραγματικής αξίας στην εξωτερική και εσωτερική προεξόφληση

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

Ισοδύναμα Γραμμάτια

4.1 Βασικοί Ορισμοί

Πολλές φορές κατά τη διάρκεια εμπορικών συναλλαγών υπάρχει η ανάγκη αντικατάστασης γραμματίων από κάποια άλλα για μία σειρά από λόγους (το γραμμάτιο δεν μπορεί να εξοφληθεί στην ημερομηνία λήξεως κλπ). Στις περισσότερες συναλλαγές όμως δεν υπάρχει ένα μόνο γραμμάτιο όπου θα μπορούσε να αντικατασταθεί από μία επισυναλλαγματική, αλλά δύο ή περισσότερα γραμμάτια που θα πρέπει να αντικατασταθούν. Σε αυτή τη περίπτωση γίνεται χρήση του **ενιαίου γραμματίου** που είναι ένα γραμμάτιο που αντικαθιστά περισσότερα άλλα γραμμάτια που έχουν διαφορετικές ημερομηνίες λήξης. Στην περίπτωση όπου γίνεται χρήση ενός ενιαίου γραμματίου θα πρέπει να μην υπάρχει κέρδος ή ζημία για τον πιστωτή και τον χρεώστη. Αυτή η αρχή ονομάζεται **αρχή της οικονομικής ισοδυναμίας**. Πιο συγκεκριμένα θα πρέπει το άθροισμα των παρουσών αξιών να είναι ίσο με την παρούσα αξία του ενιαίου γραμματίου με το ίδιο επιτόκιο και τον ίδιο τύπο προεξόφλησης.

Ένα γραμμάτιο ονομάζεται **ισοδύναμο** με ένα ή περισσότερα άλλα γραμμάτια σε μία χρονική στιγμή, όταν η παρούσα αξία του γραμματίου είναι ίση με την παρούσα αξία ενός άλλου ή το άθροισμα των παρουσών αξιών περισσότερων άλλων γραμματίων που το αντικαταστεί/ούν, με ίδιο ισχύον επιτόκιο και ίδιο είδος προεξόφλησης.

Εποχή ισοδυναμίας ή χρόνος ισοδυναμίας είναι η ημέρα κατά την οποία ένα η περισσότερα γραμμάτια είναι ισοδύναμα.

Ημέρα υπολογισμού είναι η ημέρα κατά την οποία γίνεται η αντικατάσταση των γραμματίων.

Κοινή λήξη είναι η ημέρα λήξης του ενιαίου γραμματίου.

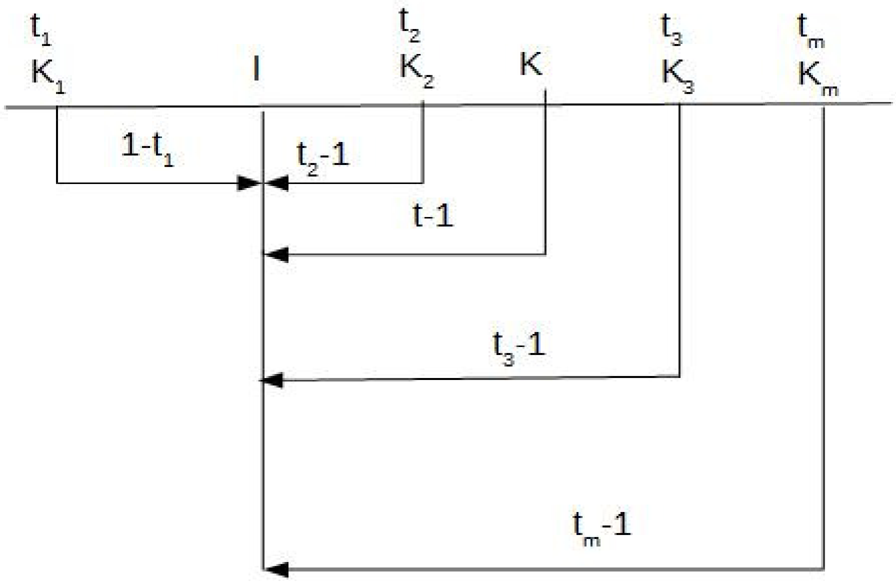
4.2 Εποχή Ισοδυναμίας μία χρονική στιγμή l - Προεξόφληση εξωτερική

Για να γίνει πιο κατανοητή η εποχή ισοδυναμίας μία χρονική στιγμή l ακολουθεί το παρακάτω παράδειγμα. Η προεξόφληση είναι εξωτερική.

Πρόβλημα: Μία σειρά συναλλαγματικών με ονομαστικές αξίες $K_1,K_2,...,K_m$ οι οποίες λήγουν μετά από $t_1,t_2,\ldots,t_m$ ημέρες από σήμερα αντίστοιχα, αντικαθίστανται από μία ενιαία συναλλαγματική ονομαστικής αξίας K η οποία λήγει μετά από t ημέρες από σήμερα. Να εκφραστούν οι μεταβλητές K, t ως συνάρτηση των μεταβλητών $K_1, K_2, ..., K_m, t_1, t_2, …,t_m$. Η προεξόφληση θα είναι εξωτερική, η εποχή ισοδυναμίας είναι μία στιγμή l ημέρες από σήμερα, ενώ το έτος είναι μεικτό και το επιτόκιο i.

<u>*Λύση:*</u> Χωρίς βλάβη της γενικότητας ισχύει ότι:

$$t_1<l<t_2<t_3<...<t_m.$$



Εικόνα 45:Εποχή Ισοδυναμίας τη χρονική στιγμή l

Για να βρεθεί η λύση θα πρέπει πρώτα να βρεθούν οι πραγματικές αξίες των συναλλαγματικών με ονομαστικές αξίες $K_1,K_2,...,K_m$ και K τη χρονική στιγμή l ημέρες από σήμερα. Άρα προκύπτουν τα εξής:

Η συναλλαγματική με ονομαστική αξία K_1 λήγει πριν από τη χρονική στιγμή l. Οπότε η "πραγματική αξία" του K_1 θα είναι:

$$A^1 = K_1 + \frac{K_1 * (l - t_1)}{\Delta} = K_1 - \frac{K_1 * (t_1 - l)}{\Delta}$$

άρα η πραγματική αξία του K_1 είναι το K_1 συν το τόκο $l\text{-}t_1$ ημέρες. Η συναλλαγματική με ονομαστική αξία K_2 λήγει μετά τη χρονική στιγμή l. Οπότε η πραγματική αξία του K_2 είναι:

$$A^2 = K_2 - \frac{K_2 * (t_2 - l)}{\Delta}$$

δηλαδή η πραγματική αξία του K_2 είναι K_2 μείον το προεξόφλημα για t_2-l ημέρες. Με παρόμοιο τρόπο προκύπτουν και οι πραγματικές αξίες των συναλλαγματικών με ονομαστικές αξίες $K_3, K_4, ..., K_m, K$ είναι:

$$A^3 = K_3 - \frac{K_3 * (t_3 - l)}{\Delta}$$

$$A^4 = K_4 - \frac{K_4 * (t_4 - l)}{\Delta}$$

...

...

...

$$A^m = K_m - \frac{K_m * (t_m - l)}{\Delta}$$

και

$$A = K - \frac{K * (t - l)}{\Delta}$$

Κατά την χρονική στιγμή l υπάρχει οικονομική ισοδυναμία. Σε αυτή την περίπτωση ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$A^1 + A^2 + ... + A^m = A$$

ή

$$K_1 - \frac{K_1 * (t_1 - l)}{\Delta} + ... + K_m - \frac{K_m * (t_m - l)}{\Delta} = K - \frac{K * (t - l)}{\Delta}$$

ή

$$(K_1 + ... + K_m) - \frac{K_1 * (t_1 - l) + ... + K_m * (t_m - l)}{\Delta} = K - \frac{K * (t - l)}{\Delta}$$

ή

$$\Delta * (K_1 + ... + K_m) - (K_1 * t_1 + ... + K_m * t_m) + (K_1 + ... + K_m) * l = K * \Delta - K * (t - l) \quad (1)$$

ή

$$K * [\Delta - (t - l)] = (\Delta + l) * (K_1 + ... + K_m) - (K_1 * t_1 + ... + K_m * t_m)$$

ή

$$K = \frac{(\Delta + l) * (K_1 + ... + K_m) - (K_1 * t_1 + ... + K_m * t_m)}{\Delta - (t - l)} \quad (2)$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει το εξής:

$$\Delta * (K_1 + ... + K_m) - (K_1 * t_1 + ... + K_m * t_m) + (K_1 + ... + K_m) * l = K * \Delta - K * t + K * l$$

ή

$$K * t = \Delta * [K - (K_1 + ... + K_m)] + (K_1 * t_1 + ... + K_m * t_m) + l * [K - (K_1 + ... + K_m)]$$

ή

$$t = \frac{\Delta * [K - (K_1 + ... + K_m)] + (K_1 * t_1 + ... + K_m * t_m)}{K} + \frac{l * [K - (K_1 + ... + K_m)]}{K} \quad (3)$$

Από τα παραπάνω προκύπτουν κάποιες παρατηρήσεις:

1. Αν η εποχή ισοδυναμίας είναι η ημέρα υπολογισμού, τότε το l=0. Άρα οι τύποι για τον υπολογισμό του K και του t μετασχηματίζονται ως εξής:

$$K_1 - \frac{K_1 * t_1}{\Delta} + ... + K_m - \frac{K_m * t_m}{\Delta} = K - \frac{K * t}{\Delta},$$

$$K = \frac{\Delta * (K_1 + ... + K_m) - (K_1 * t_1 + ... + K_m * t_m)}{\Delta - t},$$

$$t = \frac{\Delta * [K - (K_1 + ... + K_m)] + (K_1 * t_1 + ... + K_m * t_m)}{K}$$

2. Αν η εποχή ισοδυναμίας είναι η κοινή λήξη, τότε l=t. Συνεπώς οι τύποι του προβλήματος για τον υπολογισμό του K και του t μετασχηματίζονται ως εξής:

$$K = K_1 - \frac{K_1 * (t_1 - t)}{\Delta} + ... + \frac{K_m * (t_m - t)}{\Delta}$$

ή

$$K = \frac{(\Delta + t) * (K_1 + ... + K_m) - (K_1 * t_1 + ... + K_m * t_m)}{\Delta}$$

ή

$$K = K_1 + ... + K_m - \frac{K_1 * (t_1 - 1) + ... + K_m * (t_m - 1)}{\Delta},$$

$$t = \frac{\Delta * [K - (K_1 + ... + K_m)] + (K_1 * t_1 + ... + K_m * t_m)}{K_1 + ... + K_m}$$

4.3 Εποχή ισοδυναμίας ή ημέρα υπολογισμού και προεξόφληση εσωτερική

Νωρίτερα μέσω του υποδείγματος που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη παράγραφο τα K, t εκφράστηκαν ως συνάρτηση των μεταβλητών $K_1,K_2,...,K_m$, $t_1,t_2,\dots,t_m$ με την προεξόφληση να είναι εξωτερική. Τώρα θα γίνει παρουσίαση της περίπτωσης όπου η προεξόφληση θα είναι εσωτερική. Η συγκεκριμένη περίπτωση δεν έχει καμία πρακτική αξία όμως, καθώς δεν χρησιμοποιείται σε καμία εμπορική συναλλαγή.

<u>Πρόβλημα:</u> Έστω ότι υπάρχει μία σειρά συναλλαγματικών με ονομαστικές αξίες $K_1,K_2,...,K_m$ οι οποίες λήγουν μετά από $t_1,t_2,\dots,t_m$ ημέρες από σήμερα αντίστοιχα, αντικαθίστανται από μία ενιαία συναλλαγματική ονομαστικής αξίας K η οποία λήγει μετά από t ημέρες. Ζητείται να εκφραστούν οι μεταβλητές K και t ως συνάρτηση των μεταβλητών $K_1,K_2,...,K_m$, $t_1,t_2,\dots,t_m$. Η προεξόφληση θα είναι εσωτερική, η εποχή ισοδυναμίας είναι η ημέρα υπολογισμού ,ενώ το έτος είναι μεικτό και το επιτόκιο i.

<u>Λύση:</u> Χωρίς βλάβη της γενικότητας ισχύει ότι:

$$t_1<t_2<t<t_3<...<t_m.$$

Αρχικά υπολογίζονται οι πραγματικές αξίες των συναλλαγματικών με ονομαστικές αξίες $K_1,K_2,...,K_m,K$ κατά την ημέρα υπολογισμού. Άρα προκύπτουν τα εξής:

Η συναλλαγματική με ονομαστική αξία K_1 έχει πραγματική αξία:

$$A_1^1 = K_1 - \frac{K_1 * t_1}{\Delta + t_1}$$

Με παρόμοιο τρόπο προκύπτουν και οι πραγματικές αξίες των συναλλαγματικών με ονομαστικές αξίες $K_2,K_3,...,K_m,K$ οι οποίες και θα είναι οι εξής:

$$A_1^2 = K_1 - \frac{K_2 * t_2}{\Delta + t_2},$$

...

...

...

$$A_1^m = K_1 - \frac{K_m * t_m}{\Delta + t_m},$$

$$A = K - \frac{K * t}{\Delta + t}.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η εποχή ισοδυναμίας είναι η ημέρα υπολογισμού προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$A_1^1 + A_1^2 + \ldots + A_1^m = A$$

ή

$$K_1 - \frac{K_1 * t_1}{\Delta + t_1} + \ldots + K_m - \frac{K_m * t_m}{\Delta + t_m} = K - \frac{K * t}{\Delta + t} \quad (4)$$

Από τη σχέση (4) λύνοντας ως προς Κ προκύπτει ο παρακάτω τύπος:

$$K = \frac{(\Delta + t) * \left[(K_1 + \ldots + K_m) - \left(\frac{K_1 * t_1}{\Delta + t_1} + \ldots + \frac{K_m * t_m}{\Delta + t_m} \right) \right]}{\Delta}$$

ή

$$K = (\Delta + t) * \left[\frac{K_1}{\Delta + t_1} + \ldots + \frac{K_m}{\Delta + t_m} \right] \quad (5)$$

Από τη σχέση (4) αν λυθεί ως προς t προκύπτει ο παρακάτω τύπος:

$$t = \frac{K * \Delta}{\left[(K_1 + \ldots + K_m) - \left(\frac{K_1 * t_1}{\Delta + t_1} + \ldots + \frac{K_m * t_m}{\Delta + t_m} \right) \right]} - \Delta$$

ή

$$t = \frac{K}{\frac{K_1}{\Delta + t_1} + \ldots + \frac{K_m}{\Delta + t_m}} - \Delta \quad (6)$$

4.4 Μέση λήξη

Σε ένα πρόβλημα των ισοδύναμων συναλλαγματικών, δηλαδή σε ένα πρόβλημα που μία σειρά συναλλαγματικών με ονομαστικές αξίες $K_1, K_2, \ldots, K_m$ αντικαθίστανται ή αντικαθιστά μία ενιαία συναλλαγματική με ονομαστική αξία Κ τότε δημιουργείται το λεγόμενο πρόβλημα μέσης λήξης όταν:

$$K = K_1 + K_2 + \ldots + K_m$$

Σε αυτή την περίπτωση το t ονομάζεται μέση λήξη.

Όταν η προεξόφληση είναι εξωτερική, από τον τύπο (3) όπως παρουσιάστηκε σε προηγούμενη ενότητα, ανεξάρτητα από την εποχή ισοδυναμίας που έχουμε, προκύπτει ο τύπος:

$$t = \frac{K_1 * t_1 + ... + K_m * t_m}{K} \quad (7)$$

Παρατηρήσεις:

1. Στα προβλήματα μέσης λήξης όταν η προεξόφληση είναι εξωτερική, η μέση λήξη είναι ανεξάρτητη του επιτοκίου.
2. Αν $K_1=K_2=...=K_m$ τότε ο τύπος (7) γίνεται ως εξής:

$$t = \frac{t_1 + ... + t_m}{m}$$

3. Αν η προεξόφληση είναι εξωτερική, τότε στα προβλήματα που αφορούν τη μέση λήξη, η μέση λήξη είναι ανεξάρτητη από την ημερομηνία που ορίζεται ως εποχή ισοδυναμίας.

4.5 Μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων ισοδύναμων συναλλαγματικών

Για την επίλυση προβλημάτων ισοδύναμων γραμματίων υπάρχει μία γενική μεθοδολογία που μπορεί να βρει εφαρμογή στα προβλήματα όπου η προεξόφληση είναι εξωτερική. Τα βήματα είναι τα εξής:

*Βήμα 1ο:*Αρχικά γίνεται έλεγχος αν το δοθέν πρόβλημα είναι πρόβλημα μέσης λήξης. Στην περίπτωση αυτή για τη λύση του προβλήματος εφαρμόζεται ο παρακάτω τύπος:

$$t = \frac{K_1 * t_1 + ... + K_m * t_m}{K}$$

*Βήμα 2ο:*Στην περίπτωση όπου το πρόβλημα δεν είναι πρόβλημα μέσης λήξης ή δεν μπορεί να πιστοποιηθεί αυτό, τότε για τη λύση του προβλήματος πρέπει να δημιουργηθεί το αντίστοιχο χρονοδιάγραμμα που προκύπτει από την άσκηση και από εκεί εντοπίζεται και η εποχή ισοδυναμίας του προβλήματος. Εν συνεχεία ανάλογα εφαρμόζεται για τη λύση ένας από τους παρακάτω τύπους:

1) Εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού (l=0).

$$K - \frac{K * t}{\Delta} = K_1 - \frac{K_1 * t_1}{\Delta} + ... + K_m - \frac{K_m * t_m}{\Delta}$$

2) Εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη (l=t).

$$K = K_1 - \frac{K_1 * (t_1 - t)}{\Delta} + \ldots + K_m - \frac{K_m * (t_m - t)}{\Delta}$$

3) Εποχή ισοδυναμίας l ημέρες από σήμερα.

$$K - \frac{K * (t - l)}{\Delta} = K_1 - \frac{K_1 * (t_1 - l)}{\Delta} + \ldots + K_m - \frac{K_m * (t_m - l)}{\Delta}$$

4.6 Υπολογισμός του ενιαίου γραμματίου και του χρόνου λήξης του στα ισοδύναμα γραμμάτια με τη χρήση Excel

Σε όλα τα παραδείγματα η προεξόφληση είναι εξωτερική.

4.6.1 Εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού – Υπολογισμός του ενιαίου γραμματίου και του χρόνου λήξης του.

- Εποχή Ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού - Υπολογισμός της ονομαστικής αξίας του ενιαίου γραμματίου.

Έστω ότι υπάρχει μία σειρά γραμματίων με ονομαστικές αξίες 2000, 1500, 3500, 12000, 25000 ευρώ τα οποία λήγουν μετά από 20, 25, 35, 60 και 45 ημέρες αντίστοιχα. Τα συγκεκριμένα γραμμάτια αντικαθίστανται από ένα ενιαίο γραμμάτιο που λήγει μετά από 35 ημέρες. Αν το επιτόκιο προεξόφλησης είναι 3% και εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού να βρεθεί η ονομαστική αξία του ενιαίου γραμματίου (το έτος είναι μικτό).

Στην πρώτη στήλη είναι οι αξίες των σειρών γραμματίων και στο τελευταίο κελί το σύνολο αυτών. Στη δεύτερη στήλη είναι οι λήξεις αυτών των γραμματίων, στη τρίτη στήλη το επιτόκιο προεξόφλησης, στη τέταρτη στήλη η λήξη του ενιαίου γραμματίου. Στην πέμπτη στήλη είναι το γινόμενο των αξιών των γραμματίων με τις μέρες που απομένουν μέχρι την ημερομηνία λήξεως τους και στην έκτη στήλη είναι η ονομαστική αξία του ενιαίου γραμματίου.

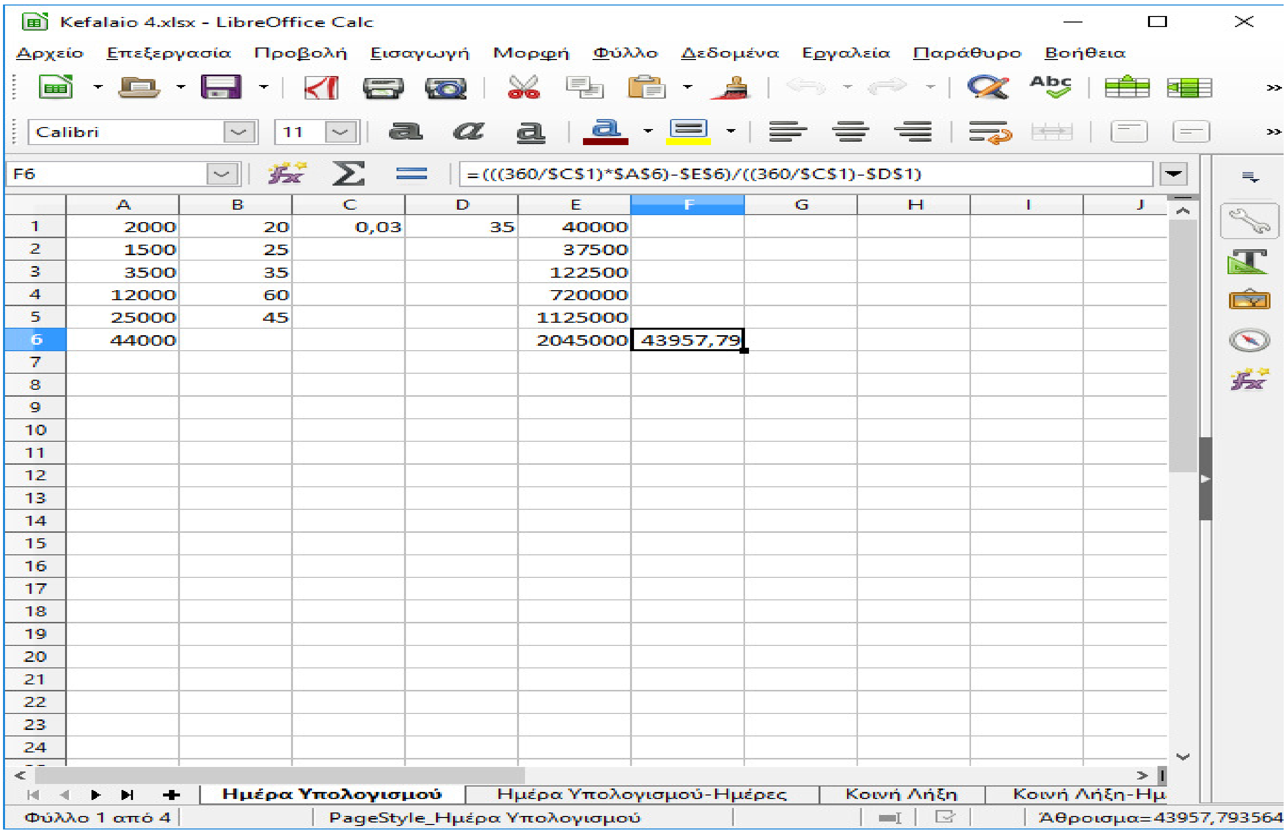
Ο υπολογισμός γίνεται ως εξής:

Στα κελιά E1-E5 είναι το γινόμενο των αξιών των γραμματίων με τις ημέρες μέχρι τη λήξη τους με τον τύπο Ai*Bi με i=1,...,5

Στα κελιά A6 και E6 είναι τα αθροίσματα των κελιών A1-A5 και E1-E5 αντίστοιχα.

Η ονομαστική αξία του ενιαίου γραμματίου στο κελί F6 υπολογίστηκε με βάση τον παρακάτω τύπο:

=(((360/C1)*A6)-E6)/((360/C1)-D1)



Εικόνα 13: Εποχή Ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού - Υπολογισμός της ονομαστικής αξίας του ενιαίου γραμματίου.

- Εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού - Υπολογισμό του αριθμού των ημερών του ενιαίου γραμματίου μέχρι τη λήξη του

Έστω ότι υπάρχει μία σειρά γραμματίων με ονομαστικές αξίες 2000, 1500, 3500, 12000, 25000 ευρώ τα οποία λήγουν μετά από 20, 25, 35, 60 και 45 ημέρες αντίστοιχα. Τα συγκεκριμένα γραμμάτια αντικαθίστανται από ένα ενιαίο γραμμάτιο ονομαστικής αξίας 43957,79. Αν το επιτόκιο προεξόφλησης είναι 3% και εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού να βρεθεί ο αριθμός των ημερών του ενιαίου γραμματίου μέχρι τη λήξη του (το έτος είναι μικτό).

Στην πρώτη στήλη είναι οι αξίες των σειρών γραμματίων και στο τελευταίο κελί το σύνολο αυτών. Στη δεύτερη στήλη είναι οι λήξεις αυτών των γραμματίων, στη τρίτη στήλη το επιτόκιο προεξόφλησης, στη τέταρτη στήλη η ονομαστική αξία του ενιαίου γραμματίου. Στην πέμπτη στήλη είναι το γινόμενο των αξιών των γραμματίων με τις μέρες που απομένουν μέχρι την ημερομηνία λήξεως τους και στην έκτη στήλη είναι ο αριθμός των ημερών του ενιαίου γραμματίου μέχρι τη λήξη του.

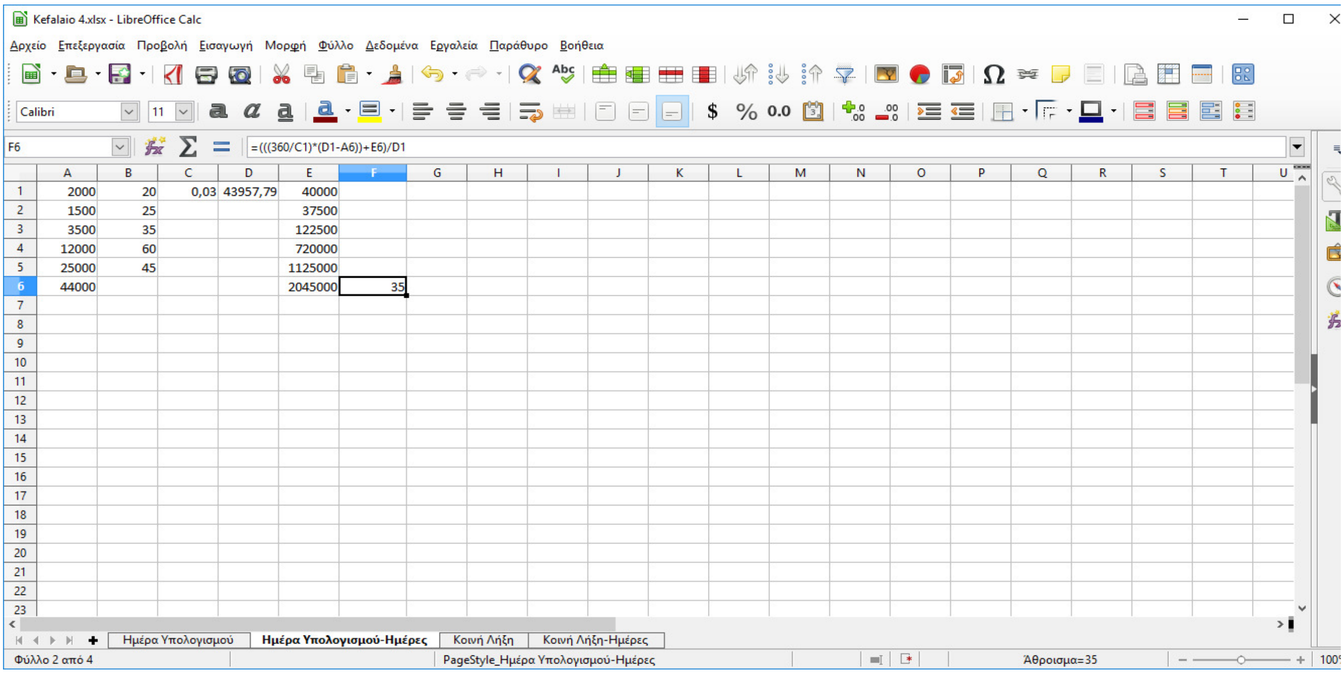
Ο υπολογισμός γίνεται ως εξής:

Στα κελιά E1-E5 είναι το γινόμενο των αξιών των γραμματίων με τις ημέρες μέχρι τη λήξη τους με τον τύπο Ai*Bi με i=1,...,5

Στα κελιά A6 και E6 είναι τα αθροίσματα των κελιών A1-A5 και E1-E5 αντίστοιχα.

Ο αριθμός των ημερών του ενιαίου γραμματίου μέχρι τη λήξη του στο κελί F6 υπολογίστηκε με βάση τον παρακάτω τύπο:

=(((360/C1)*(D1-A6))+E6)/D1



	A	B	C	D	E	F
1	2000	20	0,03	43957,79	40000	
2	1500	25			37500	
3	3500	35			122500	
4	12000	60			720000	
5	25000	45			1125000	
6	44000				2045000	35

Εικόνα 14: Εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού - Υπολογισμό του αριθμού των ημερών του ενιαίου γραμματίου μέχρι τη λήξη του

4.6.2 Εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη – Υπολογισμός του ενιαίου γραμματίου και του χρόνου λήξης του.

- Εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη – Υπολογισμός της ονομαστικής αξίας του ενιαίου γραμματίου

Έστω ότι υπάρχει μία σειρά γραμματίων με ονομαστικές αξίες 2000, 1500, 3500, 12000, 25000 ευρώ τα οποία λήγουν μετά από 20, 25, 35, 60 και 45 ημέρες αντίστοιχα. Τα συγκεκριμένα γραμμάτια αντικαθίστανται από ένα ενιαίο γραμμάτιο που λήγει μετά από 35 ημέρες . Αν το επιτόκιο προεξόφλησης είναι 3% και εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη να βρεθεί η ονομαστική αξία του ενιαίου γραμματίου (το έτος είναι μικτό).

Στη πρώτη στήλη είναι οι αξίες των σειρών γραμματίων και στο τελευταίο κελί το σύνολο αυτών. Στη δεύτερη στήλη είναι οι λήξεις αυτών των γραμματίων, στη τρίτη στήλη το επιτόκιο προεξόφλησης, στη τέταρτη στήλη η λήξη του ενιαίου γραμματίου. Στην πέμπτη στήλη είναι το γινόμενο των αξιών των γραμματίων με τις μέρες που απομένουν μέχρι την ημερομηνία λήξεως τους και στην έκτη στήλη είναι το γινόμενο των αξιών των γραμματίων με τις ημέρες που έχουν οριστεί ως η κοινή λήξη. Στην έβδομη στήλη είναι η ονομαστική αξία του γραμματίου

Ο υπολογισμός γίνεται ως εξής:

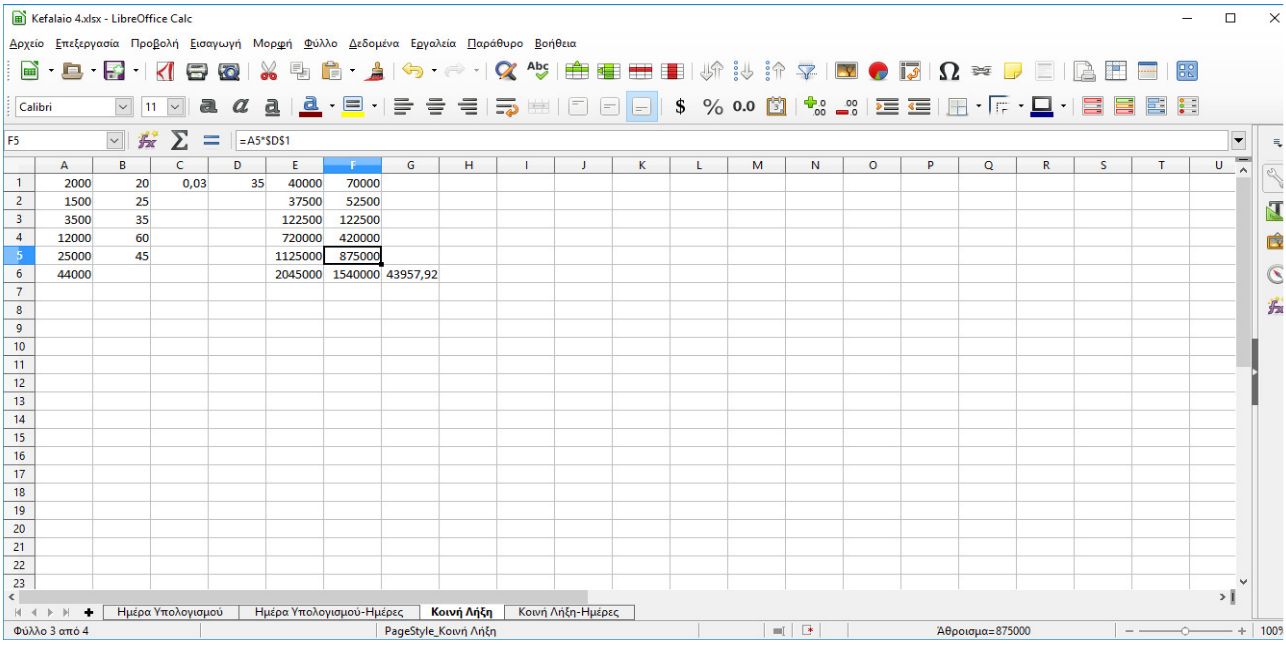
Στα κελιά E1-E5 είναι το γινόμενο των αξιών των γραμματίων με τις ημέρες μέχρι τη λήξη τους με τον τύπο Ai*Bi με i=1,...,5

Στα κελιά F1-F5 είναι το γινόμενο των αξιών των γραμματίων με τη κοινή λήξη (35 ημέρες) με τον τύπο Ai*D1(το δολάριο είναι για να είναι σταθερό το κελί)

Στα κελιά A6, E6 και F6 είναι τα αθροίσματα των κελιών A1-A5, E1-E5 και F1-F5 αντίστοιχα.

Η ονομαστική αξία του ενιαίου γραμματίου στο κελί G6 υπολογίστηκε με βάση τον παρακάτω τύπο:

=A6-((E6-F6)/(360/C1))



Εικόνα 15: Εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη – Υπολογισμός της ονομαστικής αξίας του ενιαίου

- Εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη – Υπολογισμός του αριθμού των ημερών του ενιαίου γραμματίου μέχρι τη λήξη του

Έστω ότι υπάρχει μία σειρά γραμματίων με ονομαστικές αξίες 2000, 1500, 3500, 12000, 25000 ευρώ τα οποία λήγουν μετά από 20, 25, 35, 60 και 45 ημέρες αντίστοιχα. Τα συγκεκριμένα γραμμάτια αντικαθίστανται από ένα ενιαίο γραμμάτιο ονομαστικής αξίας 43957,92. Αν το επιτόκιο προεξόφλησης είναι 3% και εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη να βρεθεί ο αριθμός των ημερών του ενιαίου γραμματίου μέχρι τη λήξη του (το έτος είναι μικτό).

Στην πρώτη στήλη είναι οι αξίες των σειρών γραμματίων και στο τελευταίο κελί το σύνολο αυτών. Στη δεύτερη στήλη είναι οι λήξεις αυτών των γραμματίων, στη τρίτη στήλη το επιτόκιο προεξόφλησης, στη τέταρτη στήλη η ονομαστική αξία του γραμματίου. Στην πέμπτη στήλη είναι το γινόμενο των αξιών των γραμματίων με τις μέρες που απομένουν μέχρι την ημερομηνία λήξεως τους και στην έκτη στήλη είναι η λήξη του ενιαίου γραμματίου.

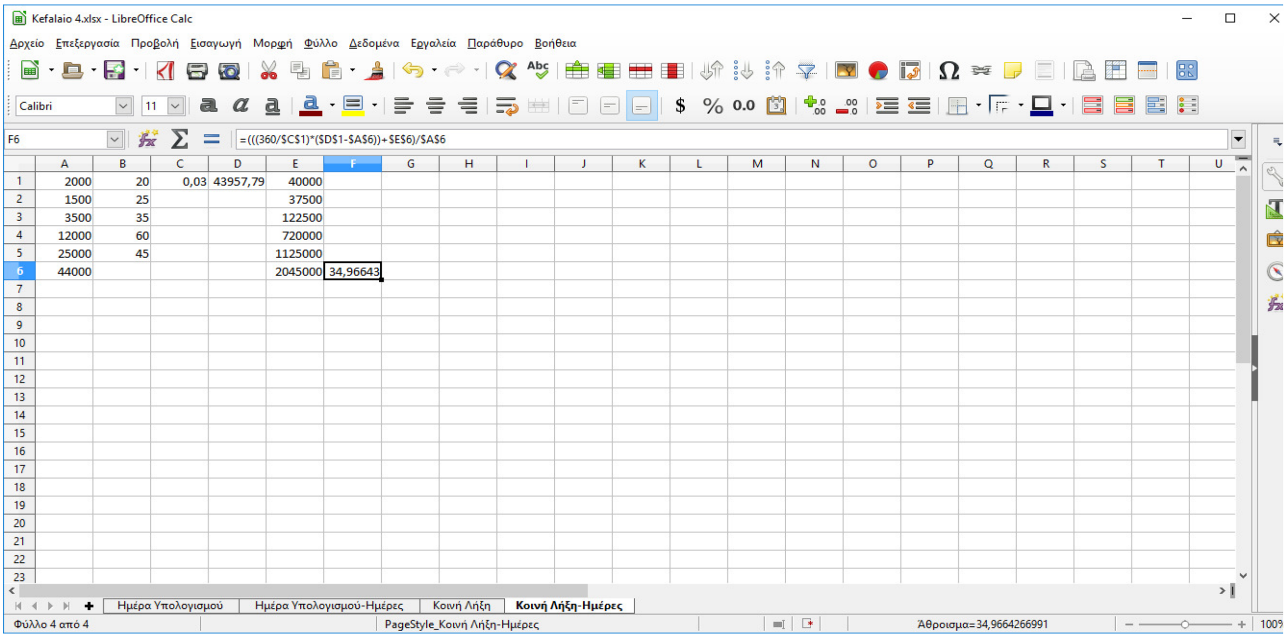
Ο υπολογισμός γίνεται ως εξής:

Στα κελιά E1-E5 είναι το γινόμενο των αξιών των γραμματίων με τις ημέρες μέχρι τη λήξη τους με τον τύπο Ai*Bi με i=1,...,5

Στα κελιά A6 και E6 είναι τα αθροίσματα των κελιών A1-A5 και E1-E5 αντίστοιχα.

Η λήξη του ενιαίου γραμματίου στο κελί F6 υπολογίστηκε με βάση τον παρακάτω τύπο:

=(((360/C1)*(D1-A6))+E6)/A6.



Εικόνα 16: Εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη – Υπολογισμός του αριθμού των ημερών του ενιαίου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο

Ανατοκισμός

5.1 Βασικές έννοιες και τύποι στον ανατοκισμό

Με τον όρο ανατοκισμό ονομάζεται η διαδικασία τοκισμού χρημάτων σύμφωνα με την οποία ο δανειστής στο τέλος κάθε περιόδου δεν εισπράττει τον τόκο αλλά τον αφήνει στο δανειζόμενο και γίνεται κεφάλαιο. Αυτή η διαδικασία οδηγεί εκτός από τον τόκο του αρχικού κεφαλαίου να δημιουργείται και τόκος για τον τόκο του αρχικού κεφαλαίου. Το ίδιο γίνεται και για τις επόμενες χρονικές περιόδους τοκισμού. Ο ανατοκισμός επειδή διαρκεί περισσότερο από ένα έτος, συγκαταλέγεται στις μακροπρόθεσμες οικονομικές πράξεις.

Ο ανατοκισμός επιτρέπεται σε ορισμένες περιπτώσεις όπως για παράδειγμα σε καταθέσεις ταμιευτηρίου, για περιορισμένο αριθμό ετών και γενικά μέσα στα πλαίσια του πνεύματος αποταμίευσης των οικονομιών των πολιτών. Ο ανατοκισμός μεγάλων χρηματικών ποσών και για μεγάλα χρονικά διαστήματα δεν επιτρέπεται από το νόμο, καθώς με αυτό τον τρόπο δύναται να παραχθούν τεράστια κεφάλαια που η αποπληρωμή τους θα ήταν εξαιρετικά δύσκολη.

Στα προβλήματα ανατοκισμού χρησιμοποιούνται οι παρακάτω συμβολισμοί:

K_0: Αρχικό Κεφάλαιο

K_n: Τελική αξία κεφαλαίου

i: Επιτόκιο ανατοκισμού

n: Αριθμός χρονικών περιόδων που ανατοκίζεται το αρχικό κεφάλαιο K_0.

Οι βασικοί τύποι που εφαρμόζονται στον ανατοκισμό παρουσιάζονται παρακάτω με τη μορφή προβλημάτων:

<u>Πρόβλημα 1ο:</u> Αρχικό κεφάλαιο K_o τοκίζεται με ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο i για n έτη. Να αποδειχτεί ότι η τελική αξία αυτού K_n δίνεται από τον τύπο:

$$K_n = K_0 * (1+i)^n \qquad (1)$$

<u>Λύση:</u> Η τελική αξία του κεφαλαίου K_1 στο τέλος του πρώτου έτους θα έχει ως εξής:

$$K_1 = K_0 + K_0 * 1 * i = K_0 * (1+i)^1$$

Η τελική αξία του κεφαλαίου K_2 στο τέλος του δευτέρου έτους θα έχει ως εξής:

$$K_2 = K_1 + K_1 * 1 * i = K_1 * (1+i) = K_0 * (1+i) * (1+i) = K_0 * (1+i)^2$$

Με επαγωγή προκύπτει ότι η τελική αξία του κεφαλαίου στο τέλος του έτους n θα είναι:

$$K_n = K_0 * (1+i)^n$$

<u>*Παρατήρηση:*</u> Η εξίσωση που μόλις αποδείχτηκε $K_n = K_0 * (1+i)^n$, η οποία είναι και η θεμελιώδης εξίσωση του ανατοκισμού, έχει εφαρμογή όχι μόνο για περιπτώσεις όπου το επιτόκιο είναι ετήσιο αλλά και σε άλλες περιπτώσεις. Η μόνη προϋπόθεση είναι να το n να αποτελεί ακέραιο αριθμό χρονικών περιόδων του επιτοκίου i.

<u>*Πρόβλημα 2:*</u>Αρχικό κεφάλαιο K_0 ανατοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο i για n έτη και m μήνες. Να αποδειχτεί ότι η τελική αξία αυτού $K_{\left(n+\frac{m}{12}\right)}$ δίνεται από τον τύπο:

$$K_{\left(n+\frac{m}{12}\right)} = K_0 * (1+i)^n * \left(1+\frac{m*i}{12}\right) \quad (2)$$

<u>*Λύση:*</u>Από το προηγούμενο πρόβλημα είναι γνωστό ότι στο τέλος του n έτους το αρχικό κεφάλαιο K_0 το οποίο ανατοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο i δίνει τελική αξία ίση με:

$$K_n = K_0 * (1+i)^n$$

Στη συνέχεια το κεφάλαιο K_n τοκίζεται για m μήνες με επιτόκιο i και δίνει τόκο:

$$I = \frac{K_n * m * i}{12}$$

Άρα η τελική αξία του κεφαλαίου $K_{\left(n+\frac{m}{12}\right)}$ θα είναι ίση με:

$$K_{\left(n+\frac{m}{12}\right)} = K_n + I = K_n + \frac{K_n * m * i}{12} = K_n * \left(1+\frac{m*i}{12}\right) = K_0 * (1+i)^n * \left(1+\frac{m*i}{12}\right)$$

<u>*Πρόβλημα 3ο:*</u>Αρχικό κεφάλαιο K_0 ανατοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο i για n έτη και t ημέρες. Να αποδειχθεί ότι η τελική αξία αυτού $K_{\left(n+\frac{t}{360}\right)}$ δίνεται από το τύπο:

$$K_{\left(n+\frac{t}{360}\right)} = K_0 * (1+i)^n * \left(1+\frac{t*i}{360}\right) \quad (3)$$

Λύση: Στο τέλος του n έτους το αρχικό κεφάλαιο K_0 το οποίο ανατοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο i δίνει τελική αξία:

$$K_n = K_0 * (1+i)^n$$

Στη συνέχεια το κεφάλαιο K_n τοκίζεται για t ημέρες με επιτόκιο i και δίνει τόκο $I = \frac{K_n * t * i}{360}$.Άρα η τελική αξία του κεφαλαίου θα είναι η εξής:

$$K_{\left(n+\frac{t}{360}\right)} = K_n + I = K_n + \frac{K_n * t * i}{360} = K_n * \left(1 + \frac{t * i}{360}\right) = K_0 * (1+i)^n * \left(1 + \frac{t * i}{360}\right)$$

5.2 Εύρεση του αρχικού κεφαλαίου K_0 στον ανατοκισμό

Λαμβάνοντας υπόψη τους τύπους (1), (2), (3) της προηγούμενης παραγράφου προκύπτουν οι παρακάτω τύποι για την εύρεση του αρχικού κεφαλαίου K_0 , όταν είναι γνωστές όλες οι άλλες μεταβλητές ποσότητες του προβλήματος του ανατοκισμού.

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n},$$

$$K_0 = \frac{K_{\left(n+\frac{m}{12}\right)}}{(1+i)^n * \left(1 + \frac{m * i}{12}\right)}$$

και $$K_0 = \frac{K_{\left(n+\frac{t}{360}\right)}}{(1+i)^n * \left(1 + \frac{t * i}{360}\right)}$$

Ένα παράδειγμα εφαρμογής των παραπάνω τύπων είναι το εξής:

“Κεφάλαιο ανατοκίζεται για 4 έτη και 3 μήνες με ετήσιο επιτόκιο 7% και δίνει τελική αξία 500 ευρώ. Να βρεθεί το αρχικό κεφάλαιο.”

Τα δεδομένα της άσκησης είναι τα εξής:

n=4, m=3, i=0,07 και $K_{\left(4+\frac{3}{12}\right)} = 500$ και ζητείται το K_0. Η άσκηση είναι ουσιαστικά απλή εφαρμογή του τύπου, έτσι προκύπτει το εξής αποτέλεσμα:

$$K_0 = \frac{K_{\left(4+\frac{3}{12}\right)}}{(1+i)^4 * \left(1+\frac{3*i}{12}\right)} = \frac{500}{(1+0{,}07)^4 * \left(1+\frac{3*0{,}07}{12}\right)} = 374{,}80$$

5.3 Εύρεση του χρόνου n στον ανατοκισμό

Λογάριθμος Έστω α>0,α≠1 και θ>0. Τότε: $\log_\alpha \theta = x \Leftrightarrow \alpha^x = \theta$

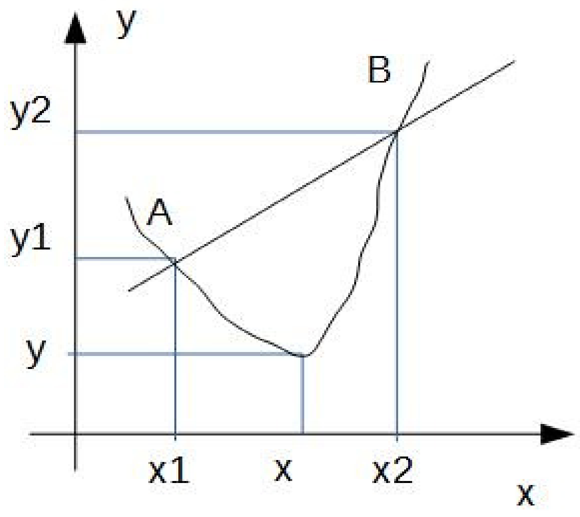
Ιδιότητες Λογαρίθμου

Έστω α>0, α≠1 και θ>0 και k∈R. Τότε ισχύουν τα εξής:

1. $\log_\alpha(\theta_1 * \theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$
2. $\log_\alpha\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) = \log_\alpha \theta_1 - \log_\alpha \theta_2$
3. $\log_\alpha \theta^k = k * \log_\alpha \theta$
4. $\alpha^{\log_\alpha \theta} = \theta$

Αν α=10, τότε ο λογάριθμος καλείται δεκαδικός και συμβολίζεται logθ. Ενώ αν το α=e,όπου e≈2,718 τότε ο λογάριθμος καλείται φυσικός ή Νεπέρειος και συμβολίζεται με lnθ.

Μέθοδος της παρεμβολής



Εικόνα 17:Μέθοδος της Παρεμβολής

Έστω μία συνάρτηση y=f(x) και έστω ότι είναι γνωστά για την συγκεκριμένη συνάρτηση δύο σημεία τα A=(x_1,y_1) και B=(x_2,y_2). Αν δοθεί ένα σημείο x’ του διαστήματος (x_1,x_2), τότε ζητείται να βρεθεί προσεγγιστικά η τιμή y’=f(x’).

Έστω η ευθεία AB. Η εξίσωση αυτής της ευθείας θα είναι η εξής:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} * (x - x_1)$$

Άρα το y’ που θα αντιστοιχεί προσεγγιστικά στο x’ είναι:

$$y' = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} * (x' - x_1)$$

Επίσης από τη σχέση:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} * (x - x_1)$$

έχουμε:

$$x - x_1 = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} * \left(y - y_1\right)$$

ή

$$x = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} * \left(y - y_1\right)$$

Η παραπάνω σχέση είναι χρήσιμη όταν είναι γνωστή η τιμή y' και ζητείται η x'.

Για να βρεθεί ο χρόνος n,όταν οι άλλες μεταβλητές ποσότητες στον τύπο του ανατοκισμού είναι γνωστές υπάρχουν τρεις τρόποι:

- Με λογάριθμο
- Με χρήση του τύπου της παρεμβολής
- Με απλή μέθοδο των τριών

Για να γίνει κατανοητή η εφαρμογή των τριών τρόπων θα γίνει επίλυση ενός παραδείγματος και με τους τρεις τρόπους. Το παράδειγμα έχει ως εξής:

"Κεφάλαιο 100 ευρώ ανατοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο 4% και δίνει τελική αξία 120 ευρώ. Να βρεθεί ο χρόνος που ανατοκίστηκε το κεφάλαιο αυτό."

Λύση: Τα δεδομένα της άσκησης είναι τα εξής:

K_0=100, i=0,04 και K_n=120

Άρα $K_n = K_0 * \left(1 + i\right)^n$ ή 120=100*(1+0,04)^n ή (1+0,04)^n=1,2

Για να υπολογιστεί το n υπάρχουν οι τρεις τρόποι που προαναφέρθηκαν. Οι τρόποι αυτοί θα μας δώσουν τα εξής αποτελέσματα:

- Με λογάριθμο

Ισχύουν τα εξής:

$\left(1 + 0{,}04\right)^n = 1{,}2$

ή

$\log\left(1 + 0{,}04\right)^n = \log 1{,}2$

ή

$n * \log 1{,}04 = \log 1{,}2$

ή

$$n = \frac{\log 1{,}2}{\log 1{,}04} = \frac{0{,}079181246}{0{,}017033339} = 4{,}64$$

- Με τη χρήση του τύπου της παρεμβολής

Εδώ θα πρέπει να υπολογιστούν αρχικά τα y_1,y_2. Λαμβάνοντας υπόψη τα δεδομένα του παραδείγματος προκύπτουν τα εξής:

$$y_1 = (1+0{,}04)^4 = 1{,}1698586 \; \textit{και} \; y_2 = (1+0{,}04)^5 = 1{,}2166529$$

το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι το εξής:

$$x = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} * (y - y_1) = 4 + \frac{5-4}{1{,}2166529 - 1{,}1698586} * (1{,}2 - 1{,}1698586) = 4{,}6441$$

- Με την απλή μέθοδο των τριών

Εδώ θα πρέπει να υπολογιστούν αρχικά τα y_1,y_2. Λαμβάνοντας υπόψη τα δεδομένα του παραδείγματος προκύπτουν τα εξής:

$$y_1 = (1+0{,}04)^4 = 1{,}1698586 \; \textit{και} \; y_2 = (1+0{,}04)^5 = 1{,}2166529$$

Η απλή μέθοδος των τριών εφαρμόζεται στο συγκεκριμένο παράδειγμα ως εξής:

Στη διαφορά 1,2166529-1,1698586=0,046800424 αντιστοιχεί διαφορά 5-4=1. Στη διαφορά 1,2- 1,1698586=0,0301414 ποια διαφορά x αντιστοιχεί; Με δεδομένη την παραπάνω απλή μέθοδο των τριών προκύπτει το παρακάτω αποτέλεσμα:

$$x = \frac{0{,}0301414 * 1}{0{,}046800424} = 0{,}6441$$

Άρα ο ζητούμενος χρόνος ανατοκισμού είναι n=4+0,6441=4,6441,άρα 4 έτη και 232 ημέρες.

5.4 Εύρεση του επιτοκίου i στον ανατοκισμό

Για να βρεθεί το επιτόκιο i, όταν οι άλλες μεταβλητές ποσότητες στον τύπο του ανατοκισμού είναι γνωστές υπάρχουν τρεις τρόποι:

- Με λογάριθμο
- Με χρήση του τύπου της παρεμβολής
- Με απλή μέθοδο των τριών

Για να γίνει κατανοητή η εφαρμογή των τριών τρόπων θα γίνει επίλυση ενός παραδείγματος και με τους τρεις τρόπους. Το παράδειγμα έχει ως εξής:

"Κεφάλαιο 100 ευρώ ανατοκίζεται για 5 έτη και δίνει τελική αξία 125 ευρώ. Να βρεθεί το ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού."

Λύση: Τα δεδομένα της άσκησης είναι τα εξής:

K_0=100, n=5 και K_5=125

Άρα $K_5 = K_0 * (1+i)^5$ ή 125=100*(1+i)^5 ή (1+i)^5=1,25

Για να υπολογιστεί το n υπάρχουν οι τρεις τρόποι που προαναφέρθηκαν. Οι τρόποι αυτοί θα μας δώσουν τα εξής αποτελέσματα:

- Με λογάριθμο

Ισχύουν τα εξής:

$$(1+i)^5 = 1,25$$

ή

$$\log(1+i)^5 = \log 1,25$$

ή

$$5 * \log(1+i) = \log 1,25$$

ή

$$\log(1+i) = \frac{\log 1,25}{5}$$

ή

$$\log(1+i) = 0,0193820002$$

ή $1+i = 1,0456396 \, ή \, i = 0,0456396$

- Με τη χρήση του τύπου της παρεμβολής

Εδώ θα πρέπει να υπολογιστούν αρχικά τα y_1,y_2. Λαμβάνοντας υπόψη τα δεδομένα του παραδείγματος προκύπτουν τα εξής:

$$y_1 = (1+0,045)^5 = 1,2461819 \; και \; y_2 = (1+0,05)^5 = 1,2762816$$

το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι το εξής:

$$x = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} * (y - y_1) = 0,045 + \frac{0,05 - 0,045}{1,2762816 - 1,2461819} * (1,25 - 1,2461819) = 0,0456342$$

- Με την απλή μέθοδο των τριών

Εδώ θα πρέπει να υπολογιστούν αρχικά τα y_1,y_2. Λαμβάνοντας υπόψη τα δεδομένα του παραδείγματος προκύπτουν τα εξής:

$$y_1 = (1+0{,}045)^5 = 1{,}2461819 \; \kappa\alpha\iota \; y_2 = (1+0{,}05)^5 = 1{,}2762816$$

Η απλή μέθοδος των τριών εφαρμόζεται στο συγκεκριμένο παράδειγμα ως εξής:

Στη διαφορά 1,2762816-1,2461819=0,03009962 αντιστοιχεί διαφορά επιτοκίων 0,05-0,045=0,005. Στη διαφορά 1,25- 1,2461819= 0,00381806 ποια διαφορά x αντιστοιχεί; Με δεδομένη την παραπάνω απλή μέθοδο των τριών προκύπτει το παρακάτω αποτέλεσμα:

$$x = \frac{0{,}00381806}{0{,}03009962} * 0{,}005 = 0{,}000634237$$

Άρα το ζητούμενο επιτόκιο i είναι i=0,045+0,000634237=0,0456342

5.5 Ανάλογα και ισοδύναμα επιτόκια

- Ανάλογα επιτόκια

Δύο επιτόκια i_1,i_2 στα οποία αντιστοιχούν διαφορετικές χρονικές περίοδοι ανατοκισμού t_1,t_2 καλούνται ανάλογα όταν ο λόγος των επιτοκίων i_1,i_2 είναι ίδιος με το λόγο των αντίστοιχων χρονικών περιόδων τοκισμού που αντιστοιχούν στα δύο αυτά επιτόκια. Άρα $\frac{i_1}{i_2} = \frac{t_1}{t_2}$.

- Ισοδύναμα επιτόκια

Δύο επιτόκια i_1,i_2 στα οποία αντιστοιχούν διαφορετικές χρονικές περίοδοι ανατοκισμού καλούνται ισοδύναμα όταν δίνουν την ίδια τελική αξία σε ένα κεφάλαιο που θα ανατοκισθεί με τα δύο αυτά διαφορετικά επιτόκια για το ίδιο χρονικό διάστημα.

Οι βασικοί τύποι που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό στα ισοδύναμα επιτόκια θα παρουσιαστούν με τη μορφή προβλημάτων:

Πρόβλημα: Έστω ότι i και i_λ δύο ισοδύναμα επιτόκια και έστω ότι η χρονική περίοδος ανατοκισμού του επιτοκίου i_λ "χωράει" λ φορές στη χρονική περίοδο ανατοκισμού του επιτοκίου i. Τότε η σχέση που συνδέει τα επιτόκια i και i_λ είναι:

$$1 + i = (1 + i_\lambda)^\lambda$$

Λύση: Έστω ότι κεφάλαιο 1 ευρώ ανατοκίζεται για μία χρονική περίοδο ανατοκισμού του i με επιτόκιο i. Τότε η τελική αξία αυτού του κεφαλαίου θα είναι:

$$K_1 = 1 * (1+i)^1 = 1 + i$$

Για το ίδιο χρονικό διάστημα (μία χρονική περίοδο ανατοκισμού του i) το κεφάλαιο 1 ευρώ ανατοκιζόμενο με το επιτόκιο i_λ δίνει τελική αξία:

$$K_\lambda = 1 * (1+i_\lambda)^\lambda = (1+i_\lambda)^\lambda$$

Με βάση την αρχική υπόθεση τα επιτόκια i, i_λ είναι ισοδύναμα. Άρα:

$$K_1 = K_\lambda \text{ ή } 1+i=(1+i_\lambda)^\lambda$$

Ο δείκτης λ του τύπου φανερώνει το είδος του επιτοκίου, ενώ ο εκθέτης λ το πόσες φορές γίνεται ο ανατοκισμός με επιτόκιο i_λ μέσα σε αυτή τη χρονική περίοδο.

<u>*Πρόβλημα:*</u> Κεφάλαιο K_0 ανατοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο i για n έτη και m μήνες. Να αποδειχτεί ότι η τελική αξία αυτού δίνεται από το τύπο:

$$K_{n+\frac{m}{12}} = K_0 * (1+i)^{n+\frac{m}{12}} \qquad (3)$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι ο δεύτερος τρόπος υπολογισμού της τελικής αξίας ενός κεφαλαίου που ανατοκίζεται για n έτη και m μήνες και ονομάζεται “εκθετική συνθήκη”

<u>*Λύση:*</u> Έστω i_λ το ισοδύναμο μηνιαίο επιτόκιο του ετήσιου επιτοκίου i. Τότε $1+i=(1+i_\lambda)^{12}$. Άρα $1+i_\lambda=(1+i)^{1/12}$. Επίσης η τελική αξία του κεφαλαίου K_0 όταν αυτό ανατοκισθεί με το μηνιαίο επιτόκιο i_λ είναι:

$$K_{n+\frac{m}{12}} = K_0 * (1+i_\lambda)^{n*12+m}$$

Άρα προκύπτει το εξής:

$$K_{n+\frac{m}{12}} = K_0 * \left((1+i)^{\frac{1}{12}} \right)^{n*12+m}$$

ή

$$K_{n+\frac{m}{12}} = K_0 * (1+i)^{\frac{n*12+m}{12}} = K_0 * (1+i)^{n+\frac{m}{12}}$$

5.6 Προεξόφληση στον ανατοκισμό

Στην προεξόφληση με ανατοκισμό χρησιμοποιούνται οι παρακάτω συμβολισμοί:

- K_n:Ονομαστική αξία συναλλαγματικής
- K_0: Πραγματική αξία συναλλαγματικής
- i: Επιτόκιο προεξόφλησης
- n: Αριθμός χρονικών περιόδων ανατοκισμού πριν από τη λήξη της συναλλαγματικής

Παράδειγμα: Έστω ότι υπάρχει μία συναλλαγματική ονομαστικής αξίας K_n η οποία προεξοφλείται με επιτόκιο ανατοκισμού i, n χρονικές περιόδους ανατοκισμού του i πριν από τη λήξη της. Να βρεθούν η πραγματική αξία αυτής και το προεξόφλημα.

Λύση: Έστω K_0 η ονομαστική αξία της συναλλαγματικής. Τότε:

$$K_0 * (1+i)^n = K_n$$

Άρα:

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n}$$

Το προεξόφλημα θα είναι ίσο με:

$$E = K_n - K_0 = K_n - \frac{K_n}{(1+i)^n}$$

Παρατήρηση: Όταν είναι γνωστή μόνο η παρούσα αξία K_0 της συναλλαγματικής, τότε το προεξόφλημα Ε δίνεται από το τύπο:

$$E = K_n - K_0 = K_0 * (1+i)^n - K_0$$

5.7 Οικονομική ισοδυναμία

Η οικονομική ισοδυναμία προκύπτει από την ανάγκη τα αντικαθιστάμενα γραμμάτια να είναι οικονομικώς ισοδύναμα με αυτά που τα αντικαθιστούν. Για να επιτευχθεί αυτό πρέπει, το άθροισμα των παρουσών αξιών των αντικαθιστάμενων γραμματίων να ισούται με το άθροισμα των παρουσών αξιών των νέων γραμματίων, σε ορισμένη χρονική στιγμή και με το ίδιο επιτόκιο.

Αν η εποχή ισοδυναμίας είναι η χρονική στιγμή l περιόδους ανατοκισμού από σήμερα και το επιτόκιο προεξόφλησης ανατοκισμού i, τότε ισχύει ότι :

$$\frac{K_n}{(1+i)^{n-1}} = \frac{K_{n1}}{(1+i)^{n1-1}} + \ldots + \frac{K_{nm}}{(1+i)^{nm-1}}$$

Όπου $K_{n1}, K_{n2}, \ldots, K_{nm}$ οι ονομαστικές αξίες των συναλλαγματικών, $n_1, n_2, \ldots n_m$ οι χρονικές περίοδοι ανατοκισμού και K_n η νέα συναλλαγματική.

5.8 Άλλα είδη ανατοκισμού

- Περιοδικός ανατοκισμός

Όταν ο ανατοκισμός γίνεται σε χρονική περίοδο k διαφορετική του έτους, δηλαδή κάθε εξάμηνο ή τρίμηνο κλπ και το επιτόκιο i που δίνεται είναι ετήσιο, τότε για να υπολογίσουμε την τελική αξία ενός κεφαλαίου που ανατοκίζεται k φορές μέσα στο έτος, για n συνεχή έτη, χρησιμοποιείται το ισοδύναμο επιτόκιο ή ανάλογο επιτόκιο, το i/k. Σε αυτές τις περιπτώσεις ο ανατοκισμός καλείται περιοδικός. Από τη θεμελιώδη εξίσωση του ανατοκισμού ένα αρχικό κεφάλαιο K_0 ανατοκίζεται n*k φορές στα n έτη με επιτόκιο i/k και δίνει τελική αξία:

$$K_{n*k} = K_0 * \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{n*k}$$

- Συνεχής ανατοκισμός

Ο συνεχής ανατοκισμός συναντάται όταν ένα αρχικό κεφάλαιο K_0 ανατοκίζεται διαρκώς μέσα στο έτος για n έτη και με ετήσιο επιτόκιο i, δηλαδή όταν οι ποσότητες K_0, i και n παραμένουν σταθερές και k $\to +\infty$. Στην περίπτωση αυτή η τελική αξία K_T του ανατοκιζόμενου κεφαλαίου είναι:

$$K_T = K_0 * \left[\lim_{k \to +\infty} \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{n*k}\right]$$

Αν τεθεί $m = \frac{k}{i}$,τότε k=m*i, m$\to +\infty$ άρα η τελική αξία θα έχει ως εξής:

$$K_T = K_0 * \left[\lim_{m \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m*i*n}\right]$$

Το όριο $\lim_{m \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e$ με το e να είναι περίπου ίσο με 2,7182818(είναι άρρητος αριθμός).

Με βάση αυτό ο τύπος μετασχηματίζεται ως εξής:

$$K_T = K_0 * e^{i*n}$$

Στην περίπτωση του περιοδικού και του συνεχούς ανατοκισμού υπάρχει και η έννοια του ενεργού επιτοκίου i_e. Το ενεργό επιτόκιο είναι εκείνο το επιτόκιο το οποίο αν εφαρμοστεί η θεμελιώδης εξίσωση του ανατοκισμού θα δώσει τόκο ίσο με αυτόν που θα έδιδε αν ο ανατοκισμός γινόταν πολλές φορές μέσα στο έτος. Με άλλα λόγια, στην περίπτωση όπου ο ανατοκισμός ενός κεφαλαίου K_0 γίνεται ετησίως με επιτόκιο i,τότε το ενεργό επιτόκιο είναι ίσο με το ετήσιο ονομαστικό, άρα $i=i_e$. Σε αυτή την περίπτωση που το κεφάλαιο ανατοκίζεται περισσότερες φορές από μία φορά μέσα σε ένα έτος, όπως συμβαίνει στις περιπτώσεις του περιοδικού και του συνεχούς ανατοκισμού, θα ισχύει ότι $i>i_e$. Τότε για τον υπολογισμό του ενεργού επιτοκίου θα ισχύουν τα εξής:

- Με περιοδικό ανατοκισμό

$$K_{n*k} = K_0 * (1+i_e)^n = K_0 * \left(1+\frac{i}{k}\right)^{n*k}$$

ή

$$(1+i_e)^n = \left(1+\frac{i}{k}\right)^{n*k}$$

ή

$$1+i_e = \left(1+\frac{i}{k}\right)^{k}$$

ή

$$i_e = \left(1+\frac{i}{k}\right)^{k} - 1$$

- Με συνεχή ανατοκισμό

$$K_T = K_0 * (1+i_e)^n = K_0 * e^{i*n}$$

ή

$$(1+i_e)^n = e^{i*n}$$

ή

$$1+i_e = e^{i}$$

ή

$$i_e = e^{i} - 1$$

5.9 Υπολογισμός της τελικής αξίας, του χρόνου και του επιτοκίου στον ανατοκισμό με τη χρήση Excel

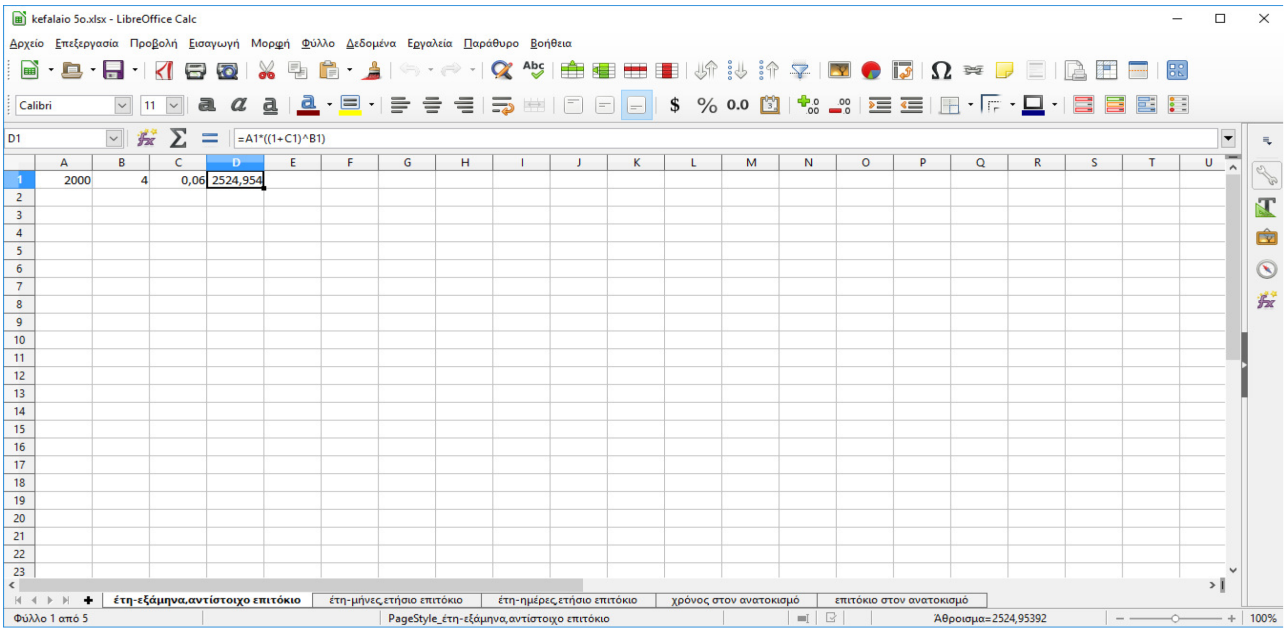
- Υπολογισμός της τελικής αξίας όταν ο χρόνος δίνεται σε έτη, εξάμηνα κλπ και το επιτόκιο είναι αντίστοιχα ετήσιο, εξαμηνιαίο κλπ

Έστω ότι υπάρχει ένα αρχικό κεφάλαιο 2000 ευρώ με το συνολικό χρονικό διάστημα να είναι τέσσερα έτη, το ετήσιο επιτόκιο είναι 6% και ζητείται να βρεθεί η τελική αξία.

Στην πρώτη στήλη είναι το αρχικό κεφάλαιο, στη δεύτερη ο αριθμός των ετών, στην τρίτη το ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού και στην τέταρτη η τελική αξία.

Ο υπολογισμός της τελικής αξίας στο κελί D1 έγινε με τη χρήση του παρακάτω τύπου:

=A1*((1+C1)^B1)



Εικόνα 18:Υπολογισμός της τελικής αξίας όταν ο χρόνος δίνεται σε έτη, εξάμηνα κλπ και το επιτόκιο

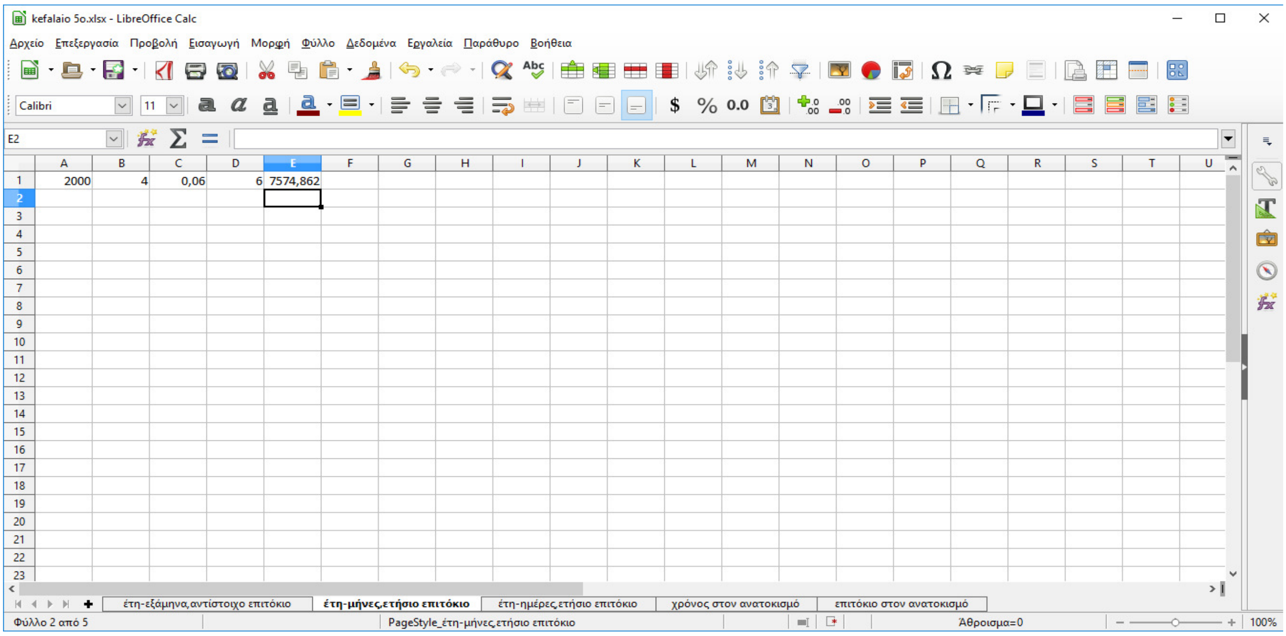
- Υπολογισμός της τελικής αξίας όταν ο χρόνος δίνεται σε έτη και εξάμηνα και το επιτόκιο είναι ετήσιο

Έστω ότι υπάρχει ένα αρχικό κεφάλαιο 2000 ευρώ με το συνολικό χρονικό διάστημα να είναι τέσσερα έτη και έξι μήνες, το ετήσιο επιτόκιο είναι 6% και ζητείται να βρεθεί η τελική αξία.

Στην πρώτη στήλη είναι το αρχικό κεφάλαιο, στη δεύτερη ο αριθμός των ετών, στην τρίτη το ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού και στην τέταρτη στήλη ο αριθμός των μηνών. Στην τελευταία στήλη είναι η τελική αξία που προκύπτει μετά τους υπολογισμούς.

Ο υπολογισμός της τελικής αξίας στο κελί Ε1 έγινε με τη χρήση του παρακάτω τύπου:

=A1*((1+C1)^B1)*(1+(D1*B1)/12)



Εικόνα 68: Υπολογισμός της τελικής αξίας όταν ο χρόνος δίνεται σε έτη και εξάμηνα και το επιτόκιο

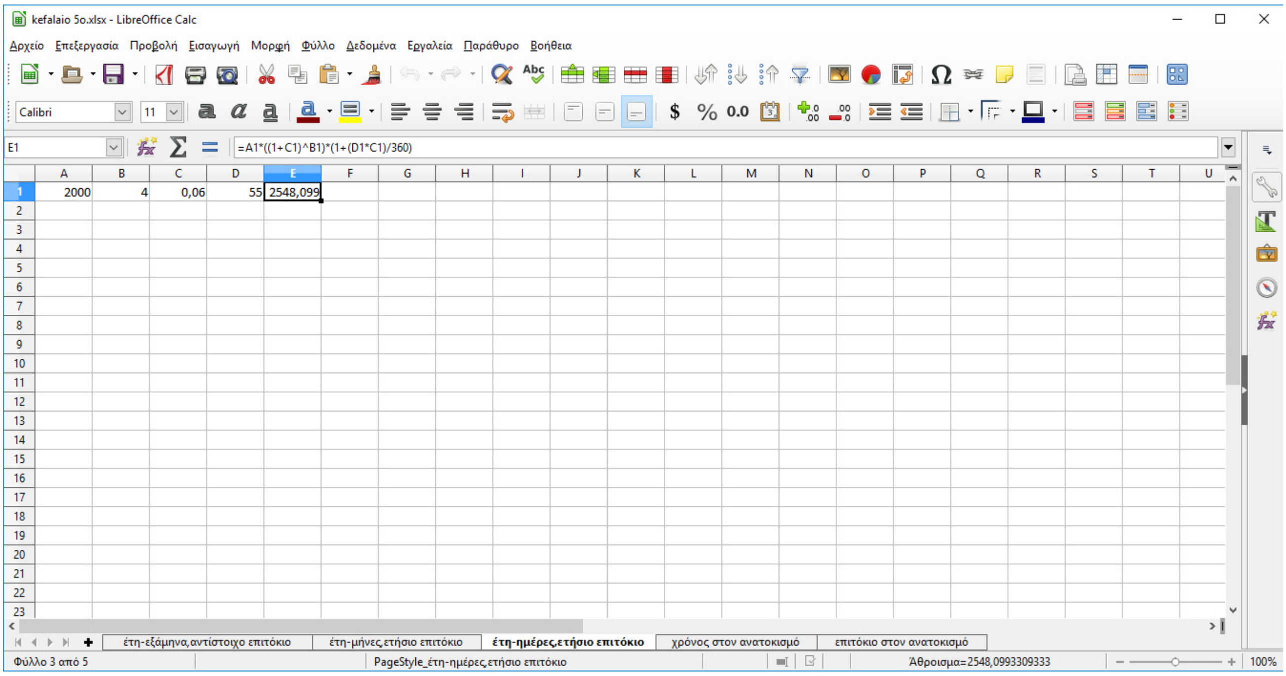
- Υπολογισμός της τελικής αξίας όταν ο χρόνος δίνεται σε έτη και ημέρες και το επιτόκιο είναι ετήσιο

Έστω ότι υπάρχει ένα αρχικό κεφάλαιο 2000 ευρώ με το συνολικό χρονικό διάστημα να είναι τέσσερα έτη και πενήντα πέντε ημέρες, το ετήσιο επιτόκιο είναι 6% και ζητείται να βρεθεί η τελική αξία.

Στην πρώτη στήλη είναι το αρχικό κεφάλαιο, στη δεύτερη ο αριθμός των ετών, στην τρίτη το ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού και στην τέταρτη στήλη ο αριθμός των ημερών. Στην τελευταία στήλη είναι η τελική αξία που προκύπτει μετά τους υπολογισμούς.

Ο υπολογισμός της τελικής αξίας στο κελί Ε1 έγινε με τη χρήση του παρακάτω τύπου:

=A1*((1+C1)^B1)*(1+(D1*C1)/360)



Εικόνα 20: Υπολογισμός της τελικής αξίας όταν ο χρόνος δίνεται σε έτη και ημέρες και το επιτόκιο

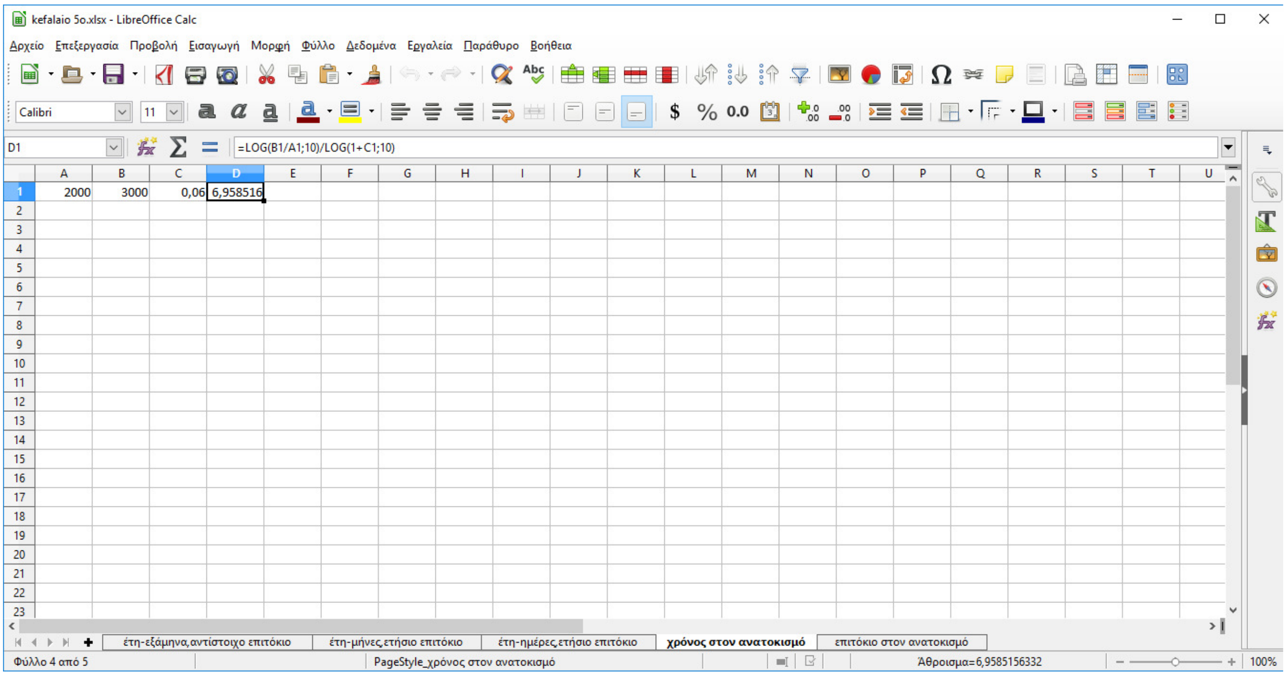
- Υπολογισμός του χρόνου στον ανατοκισμό όταν δίνονται το αρχικό κεφάλαιο, το ετήσιο επιτόκιο και η τελική αξία του κεφαλαίου

Έστω ότι υπάρχει ένα αρχικό κεφάλαιο 2000 ευρώ και η τελική αξία του ανατοκισμού είναι 3000 ευρώ με ετήσιο επιτόκιο 6%. Να βρεθεί ο χρόνος που πρέπει να ανατοκιστεί το αρχικό κεφάλαιο με ετήσιο επιτόκιο 6%

Στην πρώτη στήλη είναι το αρχικό κεφάλαιο, στη δεύτερη στήλη η τελική αξία του ανατοκισμού. Στην τρίτη στήλη είναι το ετήσιο επιτόκιο που είναι 0,06 και στην τέταρτη στήλη είναι το χρονικό διάστημα που πρέπει να ανατοκιστεί το αρχικό κεφάλαιο

Ο υπολογισμός του χρόνου του ανατοκισμού στο κελί D1 έγινε με τη χρήση του παρακάτω τύπου:

=LOG(B1/A1;10)/LOG(1+C1;10)



Εικόνα 21: Υπολογισμός του χρόνου στον ανατοκισμό όταν δίνονται το αρχικό κεφάλαιο, το ετήσιο

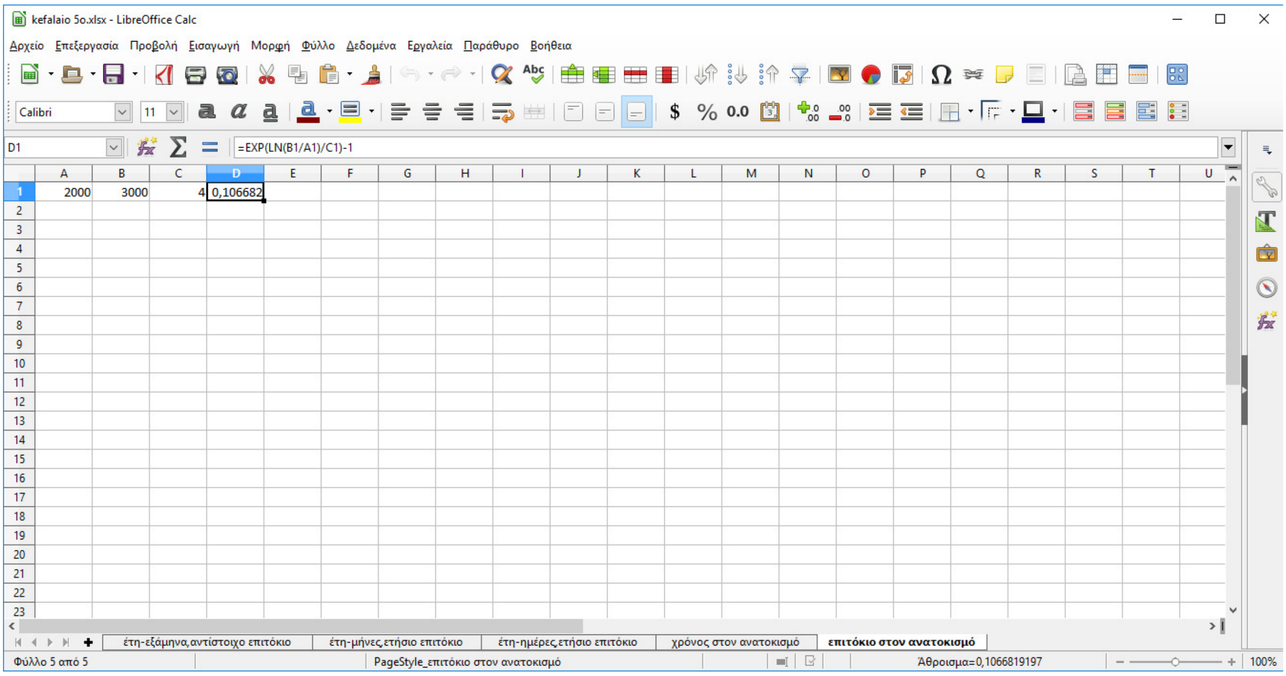
- Υπολογισμός του επιτοκίου στον ανατοκισμό όταν δίνονται το αρχικό κεφάλαιο, ο αριθμός των ετών ανατοκισμού και η τελική αξία του κεφαλαίου

Έστω ότι υπάρχει ένα αρχικό κεφάλαιο 2000 ευρώ και η τελική αξία του ανατοκισμού είναι 3000. Ο αριθμός των ετών που γίνεται ο ανατοκισμός είναι τέσσερα έτη. Να βρεθεί το επιτόκιο στον ανατοκισμό.

Στην πρώτη στήλη είναι το αρχικό κεφάλαιο, στη δεύτερη στήλη η τελική αξία του ανατοκισμού. Στην τρίτη στήλη είναι ο αριθμός των ετών που γίνεται ο ανατοκισμός (τέσσερα έτη). Στην τέταρτη στήλη είναι το επιτόκιο του ανατοκισμού

Ο υπολογισμός του επιτοκίου ανατοκισμού στο κελί D1 έγινε με τη χρήση του παρακάτω τύπου:

=EXP(LN(B1/A1)/C1)-1



Εικόνα 22: Υπολογισμός του επιτοκίου στον ανατοκισμό όταν δίνονται το αρχικό κεφάλαιο, ο

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο

Ράντες

6.1 Βασικές έννοιες στις Ράντες

Στο προηγούμενο κεφάλαιο του ανατοκισμού, το κυριότερο πρόβλημα είναι ο υπολογισμός της τελικής αξίας ενός αρχικού κεφαλαίου, που τοποθετείται με το σύστημα του ανατοκισμού για ένα αριθμό χρονικών περιόδων. Υπάρχουν όμως και οι περιπτώσεις των μακροπρόθεσμων οικονομικών πράξεων, όπου με το σύστημα του ανατοκισμού επιδιώκεται με περιοδικές χρονικά καταβολές η δημιουργία ενός μεγάλου κεφαλαίου ή η αποπληρωμή ενός δανείου. Αν δηλαδή για τη δημιουργία ενός μεγάλου κεφαλαίου ή για την αποπληρωμή ενός δανείου καταβάλλονται ανά ίσα χρονικά διαστήματα διάφορα ποσά (καταθέσεις ή δόσεις) ίσα ή άνισα μεταξύ τους, τότε τα ποσά αυτά αποτελούν μια ράντα.

Χρήσιμοι ορισμοί:

Ράντα καλείται μια σειρά (ακολουθία) χρηματικών κεφαλαίων, τα οποία καταβάλλονται ή λήγουν ανά ίσα χρονικά διαστήματα και στα οποία ισχύει ο ανατοκισμός. Τα χαρακτηριστικά της ράντας είναι τα ακόλουθα:

- **Όρος ή δόση**: το ποσό χρηματικού κεφαλαίου που καταβάλλεται κάθε φορά.
- **Περίοδος ράντας**: ο χρόνος μεταξύ δύο καταβολών.
- **Ληξιπρόθεσμη ράντα**: η ράντα της οποίας το ποσό καταβάλλεται στο τέλος της περιόδου.
- **Προκαταβλητέα ράντα**: η ράντα της οποίας το ποσό καταβάλλεται στην αρχή της περιόδου.
- **Ακέραια ράντα**: η ράντα της οποίας ο αριθμός των όρων είναι ίσος με τον αριθμό των περιόδων της.
- **Κλασματική ράντα**: η ράντα της οποίας ο όρος διαιρείται σε ρ ίσα τμήματα και κάθε ένα από αυτά καταβάλλεται ρ φορές εντός της ακέραιης περιόδου.
- **Σταθερή ράντα**: η ράντα της οποίας οι όροι είναι ίσοι. Μεταβλητή ράντα: η ράντα της οποίας οι όροι (δόσεις) είναι άνισοι.
- **Αρχή της ράντας**: η ημερομηνία που αρχίζει η πρώτη περίοδος. Επομένως αρχή της ληξιπρόθεσμης ράντας είναι η χρονική στιγμή που βρίσκεται μια ολόκληρη περίοδο μπροστά από το χρονικό σημείο που καταβάλλεται ο πρώτος όρος της. Επίσης αρχή

της προκαταβλητέας ράντας είναι η χρονική στιγμή που συμπίπτει με την καταβολή του πρώτου όρου της.

- **Τέλος ή λήξη της ράντας:** η ημερομηνία που τελειώνει η τελευταία περίοδος. Επομένως τέλος της ληξιπρόθεσμης ράντας είναι η χρονική στιγμή που συμπίπτει με την καταβολή του τελευταίου όρου της. Επίσης τέλος της προκαταβλητέας ράντας είναι η χρονική στιγμή που βρίσκεται μια ολόκληρη περίοδο μετά από το χρονικό σημείο που καταβάλλεται ο τελευταίος όρος της.
- **Διάρκεια της ράντας**: το χρονικό διάστημα από την αρχή μέχρι τη λήξη της.

Τα βασικά προβλήματα των ραντών είναι ο υπολογισμός της αξίας όλων των όρων της ράντας σε μια δεδομένη χρονική στιγμή ή ο υπολογισμός του όρου μιας ράντας που γνωρίζουμε την αξία της στο στην αρχή ή στη λήξη της. Στην επίλυση αυτών των προβλημάτων οι όροι που χρησιμοποιούνται είναι οι ακόλουθοι:

- **Παρούσα αξία της ράντας**: το ποσό που είναι ίσο με την αξία όλων των όρων της σε μια ορισμένη χρονική στιγμή, με βάση την αρχή της ισοδυναμίας.
- **Αρχική αξία της ράντας**: το ποσό που είναι ίσο με την αξία όλων των όρων της στην αρχή της, με βάση την αρχή της ισοδυναμίας.
- **Μέλλουσα ή Τελική αξία της ράντας**: το ποσό που είναι ίσο με την αξία όλων των όρων της στην λήξη της, με βάση την αρχή της ισοδυναμίας.

6.2 Βασικές κατηγορίες ραντών

Οι βασικές κατηγορίες ραντών είναι:

- Σταθερές-Μεταβλητές

Σταθερή είναι η ράντα στην οποία όλοι οι όροι είναι ίσοι μεταξύ τους.

Μεταβλητή είναι η ράντα στην οποία υπάρχουν όροι που δεν είναι ίσοι μεταξύ τους

- Ληξιπρόθεσμες-Προκαταβλητέες

Ληξιπρόθεσμη είναι η ράντα στην οποία κάθε όρος της καταβάλλεται στο τέλος κάθε περιόδου.

Προκαταβλητέα είναι η ράντα στην οποία κάθε όρος της καταβάλλεται στην αρχή κάθε περιόδου.

- Πρόσκαιρες-Διηνεκείς

Πρόσκαιρη είναι η ράντα στην οποία το πλήθος των όρων της είναι πεπερασμένο.

Διηνεκής είναι η ράντα στην οποία το πλήθος των όρων της είναι άπειρο.

- Άμεσες-Μέλλουσες-Αρξάμενες

Άμεση είναι η ράντα στην οποία ο πρώτος όρος καταβάλλεται στην πρώτη περίοδο της ράντας.

Μέλλουσα είναι η ράντα στην οποία ο πρώτος όρος καταβάλλεται μετά από ορισμένες περιόδους της ράντας.

Αρξάμενη είναι η ράντα κατά την οποία ο πρώτος όρος καταβάλλεται πριν από ορισμένες περιόδους της ράντας.

- Ακέραιες-Κλασματικές

Ακέραια είναι η ράντα στην οποία η περίοδος ανατοκισμού συμπίπτει με την περίοδο της ράντας.

Κλασματική είναι η ράντα που δεν είναι ακέραια.

- Βέβαιες-Ακέραιες

Βέβαια είναι η ράντα στην οποία η καταβολή των όρων δεν εξαρτάται από την πραγματοποίηση ή μη κάποιου γεγονότος.

Τυχαία είναι η ράντα στην οποία η καταβολή των όρων εξαρτάται από την πραγματοποίηση ή μη κάποιου γεγονότος.

6.3 Τρόποι εύρεσης της αρχικής και της τελικής αξίας ειδικών περιπτώσεων ραντών

- Ράντα, σταθερή, ακέραια, πρόσκαιρη, ληξιπρόθεσμη και άμεση

Έστω i το επιτόκιο ανατοκισμού. Αν καταβάλει κάποιος για n συνεχείς χρονικές περιόδους του επιτοκίου i στο τέλος κάθε περιόδου το ίδιο ποσό R, τότε να βρεθεί η αρχική και η τελική αξία της ράντας.

Για να βρεθεί η αρχική αξία της συγκεκριμένης ράντας τα βήματα είναι τα εξής:

Για να βρεθεί η αρχική αξία της ράντας αρκεί να βρεθεί με ανατοκισμό η πραγματική αξία κάθε όρου της ράντας στην αρχή της και στη συνέχεια να προστεθούν όλες αυτές οι πραγματικές αξίες.

Η πραγματική αξία του πρώτου όρου είναι: $A^1 = \frac{R}{1+i} = R * U$, με $U = \frac{1}{1+i}$

Η πραγματική αξία του δεύτερου όρου είναι: $A^2 = \dfrac{R}{(1+i)^2} = R * U^2$

...

...

...

Η πραγματική αξία του νιοστού όρου είναι: $A^n = \dfrac{R}{(1+i)^n} = R * U^n$

Άρα η αρχική αξία της ράντας είναι:

$$A = A^1 + A^2 + ... + A^n = R * U + R * U^2 + ... + R * U^n$$

ή

$$A = R * \left(U + U^2 + ... + U^n\right) = R * U * \frac{U^n - 1}{U - 1}$$

ή

$$A = R * U * \frac{U^n - 1}{U * \left(1 - \dfrac{1}{U}\right)}$$

ή

$$A = R * \frac{U^n - 1}{1 - (1+i)} = R * \frac{1 - U^n}{i}$$

Για να βρεθεί η τελική αξία της συγκεκριμένης ράντας τα βήματα είναι τα εξής:

Για να βρεθεί η τελική αξία της ράντας αρκεί να βρεθεί με ανατοκισμό η τελική αξία κάθε όρου της ράντας στο τέλος της και στη συνέχεια να προστεθούν όλες αυτές οι τελικές αξίες.

Η τελική αξία του πρώτου όρου είναι: $S^1 = R * (1+i)^{n-1}$

Η τελική αξία του δεύτερου όρου είναι: $S^2 = R * (1+i)^{n-2}$

...

...

...

Η τελική αξία του νιοστού-1 όρου είναι: $S^{n-1} = R * (1+i)$

Η τελική αξία του νιοστού όρου είναι: S^n=R

Άρα η τελική αξία της ράντας είναι:

$$S = S^1 + S^2 + ... + S^n = R*(1+i)^{n-1} + ... + R*(1+i) + R$$

ή

$$S = R*\left(1+(1+i)+...+(1+i)^{n-1}\right) = R*1*\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1}$$

ή

$$S = R*\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

- Ράντα, σταθερή, ακέραια, πρόσκαιρη, προκαταβλητέα και άμεση

Έστω i το επιτόκιο ανατοκισμού. Αν καταβάλει κάποιος για n συνεχείς χρονικές περιόδους του επιτοκίου i στην αρχή κάθε περιόδου το ίδιο ποσό R, τότε να βρεθεί η αρχική και η τελική αξία της ράντας.

Για να βρεθεί η αρχική αξία της συγκεκριμένης ράντας τα βήματα είναι τα εξής:

Για να βρεθεί η αρχική αξία της ράντας αρκεί να βρεθεί με ανατοκισμό η πραγματική αξία κάθε όρου της ράντας στην αρχή της και στη συνέχεια να προστεθούν όλες αυτές οι πραγματικές αξίες.

Η πραγματική αξία του πρώτου όρου είναι: A^1=R.

Η πραγματική αξία του δεύτερου όρου είναι: $A^2 = \frac{R}{(1+i)^1} R*U$

...

...

...

Η πραγματική αξία του νιοστού όρου είναι: $A^n = \frac{R}{(1+i)^{n-1}} = R*U^{n-1}$

Άρα η αρχική αξία της ράντας θα είναι:

$$A = A^1 + A^2 + ... + A^n = R + R*U + ... + R*U^{n-1}$$

ή

$$A = R*\left(1+U+...+U^{n-1}\right) = R*1*\frac{U^n - 1}{U - 1}$$

ή

$$A = R * \frac{U^n - 1}{\frac{1}{1+i} - 1} = R * \frac{1 - U^n}{i} * (1+i)$$

Για να βρεθεί η τελική αξία της συγκεκριμένης ράντας τα βήματα είναι τα εξής:

Για να βρεθεί η τελική αξία της ράντας αρκεί να βρεθεί με ανατοκισμό η τελική αξία κάθε όρου της ράντας στο τέλος της και στη συνέχεια να προστεθούν όλες αυτές οι τελικές αξίες.

Η τελική αξία του πρώτου όρου είναι: $S^1 = R * (1+i)^n$

Η τελική αξία του δεύτερου όρου είναι: $S^2 = R * (1+i)^{n-1}$

...

...

...

Η τελική αξία του νιοστού όρου είναι: $S^n = R * (1+i)^1$

Άρα η τελική αξία της ράντας θα είναι:

$$S = S^1 + S^2 + ... + S^n = R * (1+i)^n + R * (1+i)^{n-1} + ... + R * (1+i)^1$$

ή

$$S = R * \left((1+i) + (1+i)^2 + ... + (1+i)^n\right)$$

ή

$$S = R * (1+i) * \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = R * \frac{(1+i)^n - 1}{i} * (1+i)$$

- Ράντα, σταθερή, ακέραια, πρόσκαιρη, ληξιπρόθεσμη και μέλλουσα

Έστω i το επιτόκιο ανατοκισμού. Αν καταβάλει κάποιος μετά από r χρονικές περιόδους του i από σήμερα, στο τέλος κάθε περιόδου και για n συνεχείς χρονικές περιόδους του i το ίδιο ποσό R, τότε να βρεθεί η αρχική και η τελική αξία της ράντας.

Για να βρεθεί η αρχική αξία της συγκεκριμένης ράντας τα βήματα είναι τα εξής:

Για να βρεθεί η αρχική αξία της ράντας πρέπει να βρεθεί η πραγματική αξία A_1 όλων των όρων της ράντας στο τέλος της r περιόδου και στη συνέχεια να βρεθεί η πραγματική αξία A του A_1 στην αρχή της πρώτης περιόδου.

Άρα θα ισχύουν τα εξής:

$$A_1 = R * \frac{1-U^n}{i} και A = \frac{A_1}{(1+i)^r}$$

Συνεπώς θα προκύψει το εξής αποτέλεσμα:

$$A = R\frac{\frac{1-U^n}{i}}{(1+i)^r} = R * \frac{1-U^n}{i} * (1+i)^{-r}$$

Η τελική αξία της συγκεκριμένης ράντας θα είναι η εξής:

$$S = R * (1+i)^{n-1} + ... + R * (1+i) + R$$

ή

$$S = R * \left[1 + (1+i) + ... + (1+i)^{n-1}\right] = R * \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

- Ράντα, σταθερή, ακέραια, πρόσκαιρη, προκαταβλητέα και μέλλουσα

Έστω i το επιτόκιο ανατοκισμού. Αν καταβάλλει κάποιος μετά από r χρονικές περιόδους του i από σήμερα, για n συνεχείς χρονικές περιόδους του i και στην αρχική κάθε περιόδου το ίδιο ποσό R, τότε να βρεθεί η αρχική και η τελική αξία της ράντας.

Για να βρεθεί η αρχική αξία της συγκεκριμένης ράντας τα βήματα είναι τα εξής:

Για να βρεθεί η αρχική αξία της ράντας πρέπει να βρεθεί η πραγματική αξία A_1 όλων των όρων της ράντας στο τέλος της r περιόδου και στη συνέχεια να βρεθεί η πραγματική αξία A του A_1 στην αρχή της πρώτης περιόδου.

Άρα θα ισχύουν τα εξής:

$$A_1 = R * \frac{1-U^n}{i} * (1+i) και\ A = \frac{A_1}{(1+i)^r}$$

Συνεπώς θα προκύψει το εξής αποτέλεσμα:

$$A = R * \frac{\frac{1-U^n}{i} * (1+i)}{(1+i)^r} = R * \frac{1-U^n}{i} * (1+i)^{1-r}$$

Η τελική αξία της συγκεκριμένης ράντας θα είναι η εξής:

$$S = R * (1+i)^n + ... + R * (1+i)$$

ή

$$S = R * \left[(1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^n\right] = R * \frac{(1+i)^n - 1}{i} * (1+i)$$

- Ράντα, σταθερή, ακέραια, διηνεκής, ληξιπρόθεσμη και άμεση

Έστω ότι δίνεται το επιτόκιο ανατοκισμού i. Αν καταβάλει κάποιος συνεχώς στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου του i το ίδιο ποσό R, τότε να βρεθεί η αρχική αξία της ράντας αυτής.

Για να βρεθεί η αρχική αξία της συγκεκριμένης ράντας τα βήματα είναι τα εξής:

Για να βρεθεί η αρχική αξία της ράντας αρκεί να βρεθεί με ανατοκισμό η πραγματική αξία κάθε όρου της ράντας σήμερα και στη συνέχεια να προστεθούν όλες αυτές οι πραγματικές αξίες.

Η πραγματική αξία του πρώτου όρου είναι: $A^1 = R * \frac{1}{(1+i)^1} = R * U$

Η πραγματική αξία του δεύτερου όρου είναι : $A^2 = R * \frac{1}{(1+i)^2} = R * U^2$

...

...

...

Η πραγματική αξία του νιοστού όρου είναι : $A^n = R * \frac{1}{(1+i)^n} = R * U^n$

...

...

...

Άρα η αρχική αξία της ράντας θα είναι:

$$A = A^1 + A^2 + \ldots A^n + \ldots$$

ή

$$A = R * U + R * U^2 + \ldots + R * U^n + \ldots$$

ή

$$A = R * \left(U + U^2 + \ldots + U^n + \ldots\right)$$

ή

$$A = R * \frac{U}{1-U} = R * \frac{\frac{1}{1+i}}{1-\frac{1}{1+i}}$$

ή

$$A = R * \frac{1}{i}$$

Η τελική αξία της ράντας θα είναι S=+∞. Ο λόγος είναι ότι η παρούσα ράντα δεν είναι πεπερασμένης διάρκειας.

- Ράντα, σταθερή, ακέραια, διηνεκής, προκαταβλητέα και άμεση

Έστω ότι δίνεται το επιτόκιο ανατοκισμού i. Αν καταβάλει κάποιος συνέχεια και στην αρχή κάθε χρονικής περιόδου του i το ίδιο ποσό R, τότε να βρεθεί η αρχική αξία της ράντας αυτής.

Για να βρεθεί η αρχική αξία της συγκεκριμένης ράντας τα βήματα είναι τα εξής:

Για να βρεθεί η αρχική αξία της ράντας αρκεί να βρεθεί με ανατοκισμό η πραγματική αξία κάθε όρου της ράντας σήμερα και στη συνέχεια να προστεθούν όλες αυτές οι πραγματικές αξίες.

Η πραγματική αξία του πρώτου όρου είναι: $A^1 = R$

Η πραγματική αξία του δεύτερου όρου είναι : $A^2 = \frac{R}{(1+i)} = R * U^2$

...

...

...

Η πραγματική αξία του νιοστού όρου είναι : $A^n = \frac{R}{(1+i)^{n-1}} = R * U^{n-1}$

...

Άρα η αρχική αξία της ράντας θα είναι:

$$A = A^1 + A^2 + \ldots A^n + \ldots$$

ή

$$A = R + R*U + R*U^2 + \ldots + R*U^{n-1} + \ldots$$

ή

$$A = R*\left(1 + U + U^2 + \ldots + U^{n-1} + \ldots\right)$$

ή

$$A = \frac{R*1}{1-U} = R*\frac{1}{i}*\left(1+i\right)$$

Η τελική αξία της ράντας θα είναι S=+∞. Ο λόγος είναι ότι η παρούσα ράντα δεν είναι πεπερασμένης διάρκειας.

- Κλασματικές ράντες

Έστω i το επιτόκιο ανατοκισμού και έστω ότι υπάρχει μία ράντα τέτοια ώστε η περίοδος της να χωράει λ φορές στη χρονική περίοδο του επιτοκίου i. Τότε για την εύρεση της αρχικής και της τελικής αξίας αυτής αρκεί να βρεθεί το ισοδύναμο επιτόκιο i_λ του επιτοκίου i που έχει χρονική περίοδο ίση με τη χρονική περίοδο της ράντας. Αυτό γίνεται εφικτό με τον παρακάτω τύπο:

$$1 + i = \left(1 + i_\lambda\right)^\lambda$$

ή

$$i_\lambda = \left(1+i\right)^{\frac{1}{\lambda}} - 1$$

Από εκεί και πέρα η διαδικασία που ακολουθείται για την εύρεση της αρχικής και της τελικής αξίας είναι η ίδια με τις προηγούμενες περιπτώσεις.

6.4 Εύρεση του αριθμού n των όρων μίας ράντας και τακτοποίηση αυτής και εύρεση του επιτοκίου i στις ράντες

Γενικά για τον υπολογισμό του αριθμού n των όρων μίας ράντας μπορούν να εφαρμοστούν οι τρόποι επίλυσης που αναφέρθηκαν στον Ανατοκισμό. Οι τρόποι αυτοί είναι οι εξής:

1. Με λογάριθμο
2. Με χρήση του τύπου της παρεμβολής
3. Με απλή μέθοδο των τριών

Ο αριθμός n όμως σε κάθε περίπτωση πρέπει να είναι ακέραιος. Αν κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει τότε οι όροι της ράντας τακτοποιούνται (τροποποιούνται), κατά τέτοιο τρόπο ώστε ο αριθμός να γίνει ακέραιος. Οι τρόποι τακτοποίησης είναι οι εξής:

- Εντοπίζεται το πόσο που θα πρέπει να κατατεθεί μέχρι n-1 έτη (ίσο ποσό ανά έτος) και το υπόλοιπο ποσό που προκύπτει θα κατατεθεί στο τελευταίο έτος
- Εντοπίζεται μεταξύ ποιων ακέραιων αριθμών βρίσκεται το n και ανάλογα αναπροσαρμόζεται το ποσό της ετήσιας κατάθεσης.

Για να υπολογιστεί το επιτόκιο i σε μία ράντα αρκεί να χρησιμοποιηθεί ο τύπος της παρεμβολής ή η απλή μέθοδος των τριών όπως αυτή παρουσιάστηκε στον Ανατοκισμό.

6.5 Άλλες εφαρμογές των ραντών

- Απόσβεση πάγιων στοιχείων ενεργητικού μίας επιχείρησης

Με την πάροδο του χρόνου, τα πάγια περιουσιακά στοιχεία (κτίρια, έπιπλα, μηχανήματα κλπ) μίας επιχείρησης υφίστανται φθορά και κατά συνέπεια επέρχεται μείωση της αρχικής τους αξίας. Η αξία της μείωσης των περιουσιακών στοιχείων των επιχειρήσεων και οικονομικών οργανισμών ονομάζεται απόσβεση πάγιου ενεργητικού.

Έστω ότι Α είναι η αρχική αξία, n η χρονική διάρκεια ωφέλιμης ζωής αυτού του στοιχείου, S η υπολειμματική αξία του, δηλαδή η αξία που θα έχει το στοιχείο αυτό μετά από n έτη και η αξία προς απόσβεση του D=A-S, τότε το ποσό R της ετήσιας απόσβεσης για το πάγιο αυτό στοιχείο δίνεται από τη σχέση:

$$R * \frac{(1+i)^n - 1}{i} = A - S$$

ή

$$R = (A - S) * \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

- Σύνθετη παραγωγική διάρκεια πάγιων στοιχείων μίας επιχείρησης

Η διάρκεια της ωφέλιμης ζωής, των πάγιων περιουσιακών στοιχείων μιας επιχείρησης, όπως είναι φυσικό, δεν είναι πάντα η ίδια, για παράδειγμα άλλη είναι η φθορά που επέρχεται στα μηχανήματα καθημερινής χρήσης και σε αυτά που χρησιμοποιούνται σπανιότερα, καθώς και στις διάφορες κτιριακές εγκαταστάσεις της επιχείρησης. Σε τέτοιες περιπτώσεις, για να γίνει ο υπολογισμός της συνολικής αποσβεστέας αξίας των πάγιων περιουσιακών στοιχείων μίας επιχείρησης ή οικονομικού οργανισμού, πρέπει να υπολογιστεί η σύνθετη παραγωγική διάρκεια πάγιων στοιχείων. Η χρονική αυτή διάρκεια αποτελείται από το χρόνο εκείνο, τον οποίο χρειάζεται η αποσβεστέα αξία των πάγιων στοιχείων για να γίνει ίση με τη συνολική ετήσια δαπάνη απόσβεσης αυτών. Έτσι αν R_S είναι η συνολική ετήσια δαπάνη για την απόσβεση των πάγιων στοιχείων και R_D η συνολική αποσβεστέα αξία, τότε ισχύει:

$$R_S * \frac{(1+i)^n - 1}{i} = R_D$$

Η σύνθετη παραγωγική διάρκεια δίνεται από το n της σχέσης.

- Προϋπολογισμός Κεφαλαίου- Κριτήρια Επενδυτικών αποφάσεων

Στον οικονομικό τομέα, οι επενδύσεις που κάνει ή σκοπεύει να κάνει μία επιχείρηση ή ένας φορέας, παίζουν σημαντικότατο ρόλο όχι μόνο στην περαιτέρω ανάπτυξη τους αλλά και στη βιωσιμότητά και επέκταση του χρόνου αποδοτικής λειτουργίας τους. Ως εκ τούτου η λήψη σημαντικών επενδυτικών αποφάσεων σε μία επιχείρηση, όπου πρέπει να διατεθούν μεγάλα χρηματικά ποσά με κίνδυνο πολλές φορές η απόδοση της επένδυσης να είναι εις βάρος της επιχείρησης και να χαθεί έτσι το κεφάλαιο που επενδύθηκε, αποτελεί σοβαρό προβληματισμό της διεύθυνσης της επιχείρησης.

Η αξιολόγηση και η λήψη επενδυτικών αποφάσεων στον επιχειρηματικό τομέα γίνεται με βάσει τον προϋπολογισμό κεφαλαίου, δηλαδή πόσο αρχικό κεφάλαιο θα επενδυθεί και τι θα αποφέρει αυτό μελλοντικά στην επιχείρηση που αποφάσισε τη συγκεκριμένη επένδυση. Πολλές φορές υπάρχουν περισσότερες από μία επενδύσεις από τις οποίες μπορεί να επιλέξει μία επιχείρηση και πρέπει να επιλεγεί, όπως είναι φυσικό, εκείνη που θα είναι η πλέον συμφέρουσα.

Υπάρχουν αρκετές μέθοδοι και κριτήρια αξιολόγησης επενδύσεων. Τέτοιες μέθοδοι είναι η μέθοδος της καθαρής παρούσας αξίας (ΚΠΑ), η μέθοδος του εσωτερικού συντελεστή απόδοσης (ΕΣΑ) κ.α. Πιο συνηθισμένη μέθοδος είναι αυτή της καθαρής παρούσας αξίας.

Η μέθοδος της καθαρής παρούσας αξίας στηρίζεται στον υπολογισμό του αθροίσματος των πραγματικών αξιών όλων των ταμειακών ροών που καταβάλλονται σε μία επένδυση. Ο τύπος με τον οποίο υπολογίζεται η ΚΠΑ είναι ο εξής:

$$A_K = \frac{K_1}{(1+i)^1} + \frac{K_2}{(1+i)^2} + ... + \frac{K_n}{(1+i)^n} - K_0$$

Το K_0 είναι το αρχικό κόστος της επένδυσης, K_j ,j=1,2,…,n οι καθαρές ταμειακές ροές (έσοδα μείον έξοδα), i το ισχύον επιτόκιο κόστους κεφαλαίου και n είναι η χρονική διάρκεια της επένδυσης.

Το κριτήριο με το οποίο αποφασίζεται η πραγματοποίηση της επένδυσης είναι:

- Αν $A_K>0$, τότε η επένδυση είναι συμφέρουσα
- Αν $A_K<0$, τότε η επένδυση είναι μη συμφέρουσα και δεν πρέπει να πραγματοποιηθεί.

Σε περίπτωση που υπάρχουν περισσότερες επιλογές επενδύσεων, αλλά πρέπει να επιλεγεί μόνο μία, επιλέγεται αυτή με τη μεγαλύτερη καθαρή παρούσα αξία.

6.6 Υπολογισμός της τελικής και αρχικής αξίας στις ράντες με τη χρήση του Excel

- Υπολογισμός της τελικής και αρχικής αξίας σταθερής, άμεσης και ληξιπρόθεσμης ράντας όταν ο χρόνος δίνεται σε έτη, εξάμηνα κλπ. και το επιτόκιο είναι αντίστοιχα ετήσιο, εξαμηνιαίο κλπ.

Έστω ράντα με σταθερό όρο 2000, με χρόνο λήξης τα τέσσερα χρόνια και με ετήσιο επιτόκιο 6%. Να βρεθεί η αρχική και η τελική αξία της δοσμένης ράντας με δεδομένο ότι πρόκειται για ληξιπρόθεσμη ράντα.

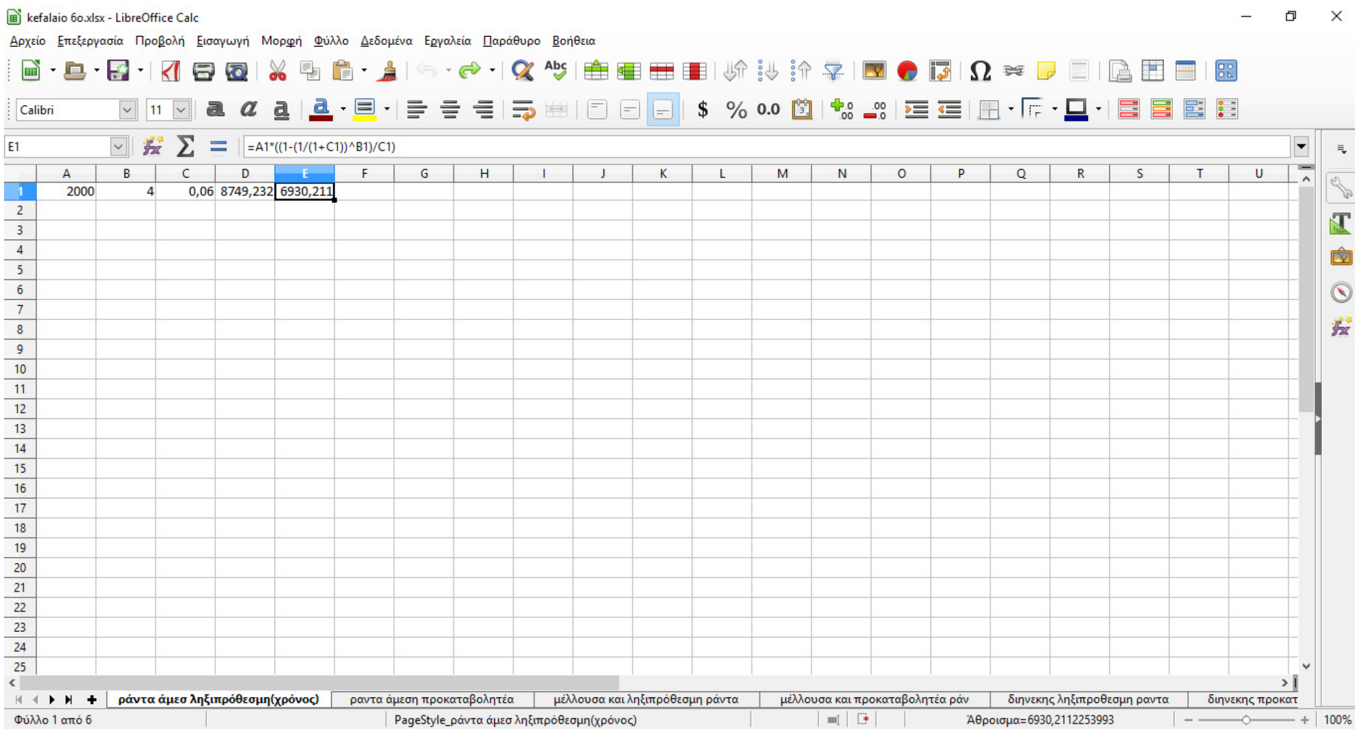
Στην πρώτη στήλη είναι ο σταθερός όρος της ράντας, στη δεύτερη στήλη είναι οι ετήσιες χρονικές περίοδοι, στην τρίτη στήλη είναι το ετήσιο επιτόκιο, στην τέταρτη στήλη είναι η τελική αξία και στην τελευταία στήλη είναι η αρχική αξία της ράντας.

Ο υπολογισμός της τελικής αξίας της ράντας στο κελί D1 έγινε με τη βοήθεια του παρακάτω τύπου:

=A1*((((1+C1)^B1)-1)/C1)

Ο υπολογισμός της αρχικής αξίας της ράντας στο κελί E1 έγινε με τη βοήθεια του παρακάτω τύπου:

=A1*((1-(1/(1+C1))^B1)/C1)



Εικόνα 23: Υπολογισμός της τελικής και αρχικής αξίας σταθερής, άμεσης και ληξιπρόθεσμης ράντας όταν ο χρόνος δίνεται σε έτη, εξάμηνα κλπ. και το επιτόκιο είναι αντίστοιχα ετήσιο, εξαμηνιαίο κλπ.

- Υπολογισμός της τελικής και αρχικής αξίας σταθερής, άμεσης και προκαταβλητέας ράντας όταν ο χρόνος δίνεται σε έτη, εξάμηνα κλπ. και το επιτόκιο είναι αντίστοιχα ετήσιο, εξαμηνιαίο κλπ.

Έστω ράντα με σταθερό όρο 2000, με τέσσερις χρονικές περιόδους ανατοκισμού και με ετήσιο επιτόκιο 6%. Να βρεθεί η αρχική και η τελική αξία της δοσμένης ράντας με δεδομένο ότι πρόκειται για προκαταβλητέα ράντα.

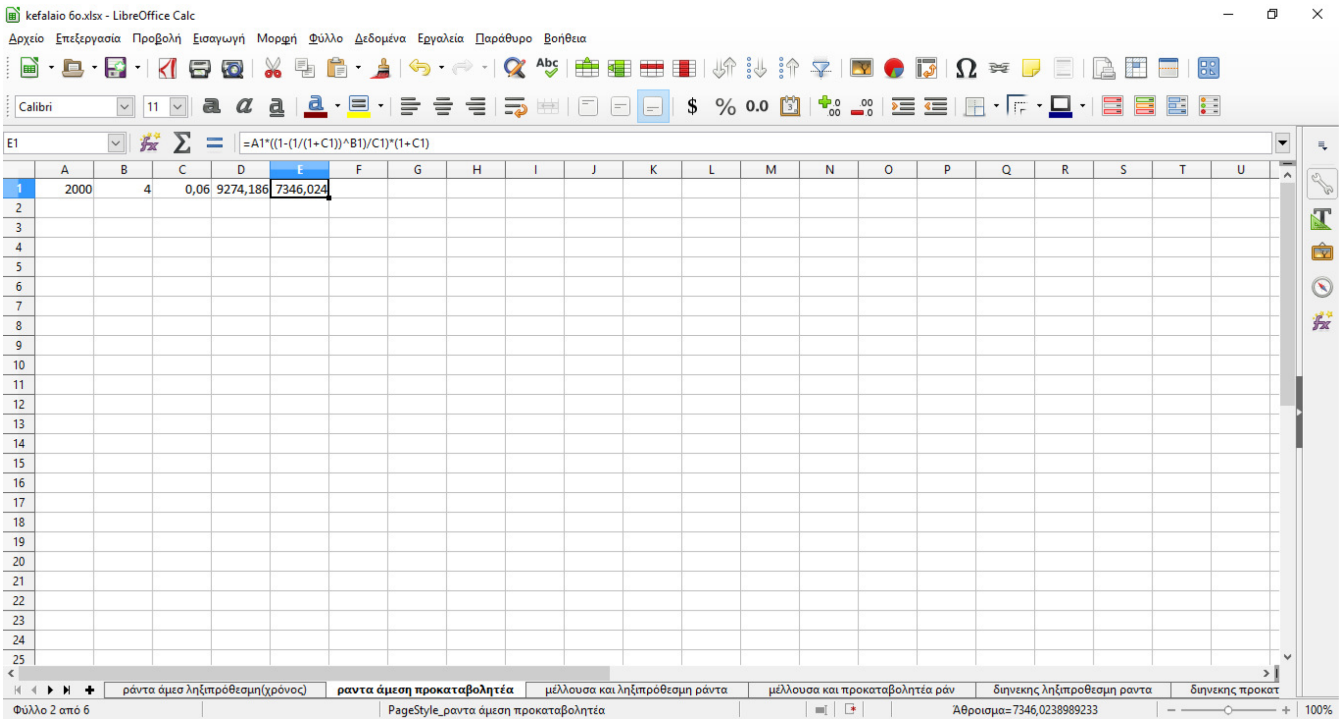
Στην πρώτη στήλη είναι ο σταθερός όρος της ράντας, στη δεύτερη στήλη είναι οι ετήσιες χρονικές περίοδοι, στην τρίτη στήλη είναι το ετήσιο επιτόκιο, στην τέταρτη στήλη είναι η τελική αξία και στην τελευταία στήλη είναι η αρχική αξία της ράντας.

Ο υπολογισμός της τελικής αξίας της ράντας στο κελί D1 έγινε με τη βοήθεια του παρακάτω τύπου:

=A1*((((1+C1)^B1)-1)/C1)*(1+C1)

Ο υπολογισμός της αρχικής αξίας της ράντας στο κελί E1 έγινε με τη βοήθεια του παρακάτω τύπου:

=A1*((1-(1/(1+C1))^B1)/C1)*(1+C1)



Εικόνα 24: Υπολογισμός της τελικής και αρχικής αξίας σταθερής, άμεσης και προκαταβλητέας ράντας

- Υπολογισμός της τελικής και αρχικής αξίας σταθερής, μέλλουσας και ληξιπρόθεσμης ράντας όταν ο χρόνος δίνεται σε έτη, εξάμηνα κλπ. και το επιτόκιο είναι αντίστοιχα ετήσιο, εξαμηνιαίο κλπ.

Έστω ράντα με σταθερό όρο 2000, η καταβολή του πρώτου όρου έγινε μετά από δύο χρονικές περιόδους, ο αριθμός των χρονικών περιόδων που έγιναν καταβολές είναι τέσσερις και με επιτόκιο 6%. Να βρεθεί η αρχική και η τελική αξία της δοσμένης ράντας .

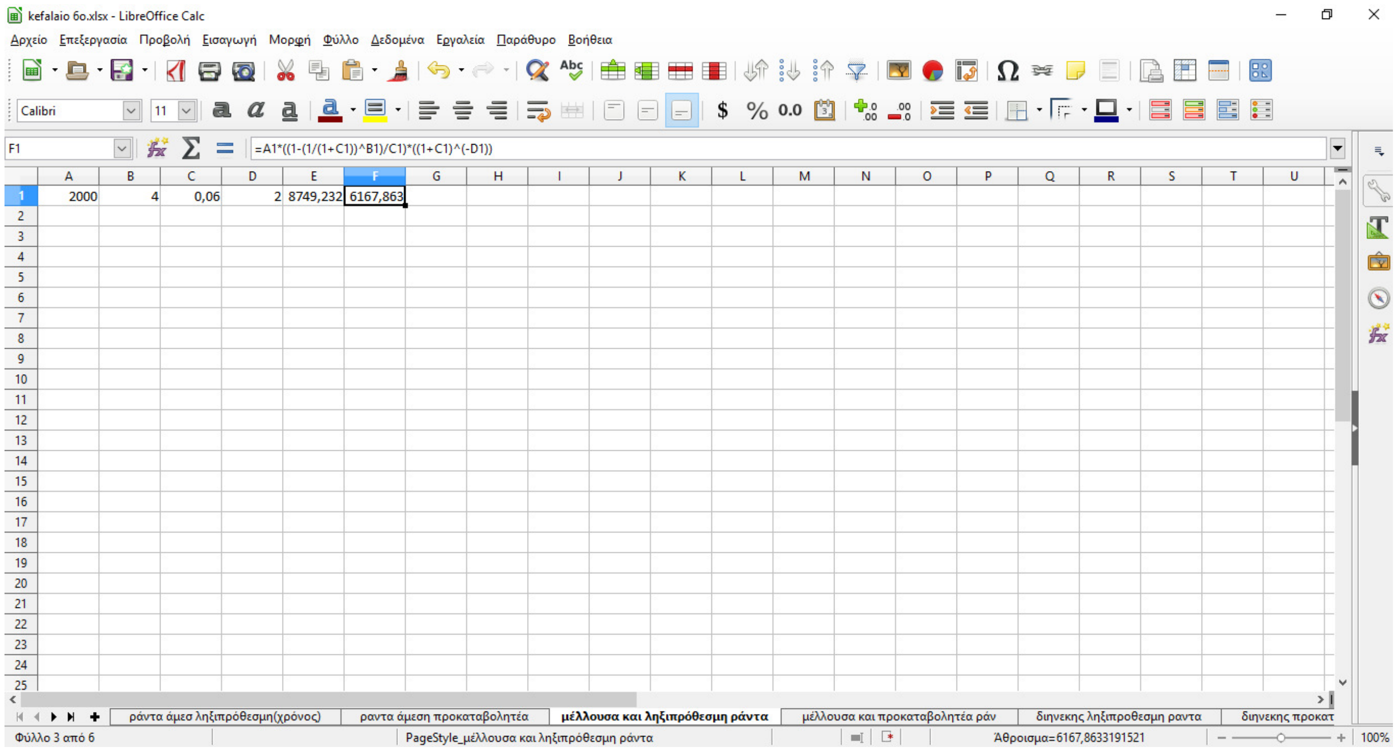
Στην πρώτη στήλη είναι ο σταθερός όρος της ράντας, στη δεύτερη στήλη είναι ο αριθμός των ετήσιων χρονικών περιόδων, στην τρίτη στήλη το ετήσιο επιτόκιο και στην τέταρτη στήλη ο αριθμός των χρονικών περιόδων της μέλλουσας ράντας μέχρι την καταβολή του πρώτου όρου. Στην πέμπτη στήλη είναι η τελική αξία της ράντας και στην έκτη στήλη η αρχική αξία της.

Ο υπολογισμός της τελικής αξίας της ράντας στο κελί E1 έγινε με τη βοήθεια του παρακάτω τύπου:

=A1*(((1+C1)^B1-1)/C1)

Ο υπολογισμός της αρχικής αξίας της ράντας στο κελί F1 έγινε με τη βοήθεια του παρακάτω τύπου:

=A1*((1-(1/(1+C1))^B1)/C1)*((1+C1)^(-D1))



Εικόνα 25: Υπολογισμός της τελικής και αρχικής αξίας σταθερής, μέλλουσας και ληξιπρόθεσμης ράντας όταν ο χρόνος δίνεται σε έτη, εξάμηνα κλπ. και το επιτόκιο είναι αντίστοιχα ετήσιο, εξαμηνιαίο κλπ.

- Υπολογισμός της τελικής και αρχικής αξίας σταθερής, μέλλουσας και προκαταβλητέας ράντας όταν ο χρόνος δίνεται σε έτη, εξάμηνα κλπ. και το επιτόκιο είναι αντίστοιχα ετήσιο, εξαμηνιαίο κλπ.

Έστω ράντα με σταθερό όρο 2000, η καταβολή του πρώτου όρου έγινε μετά από δύο χρονικές περιόδους, ο αριθμός των χρονικών περιόδων που έγιναν καταβολές είναι τέσσερις και το επιτόκιο 6%. Να βρεθεί η αρχική και η τελική αξία της δοσμένης ράντας .

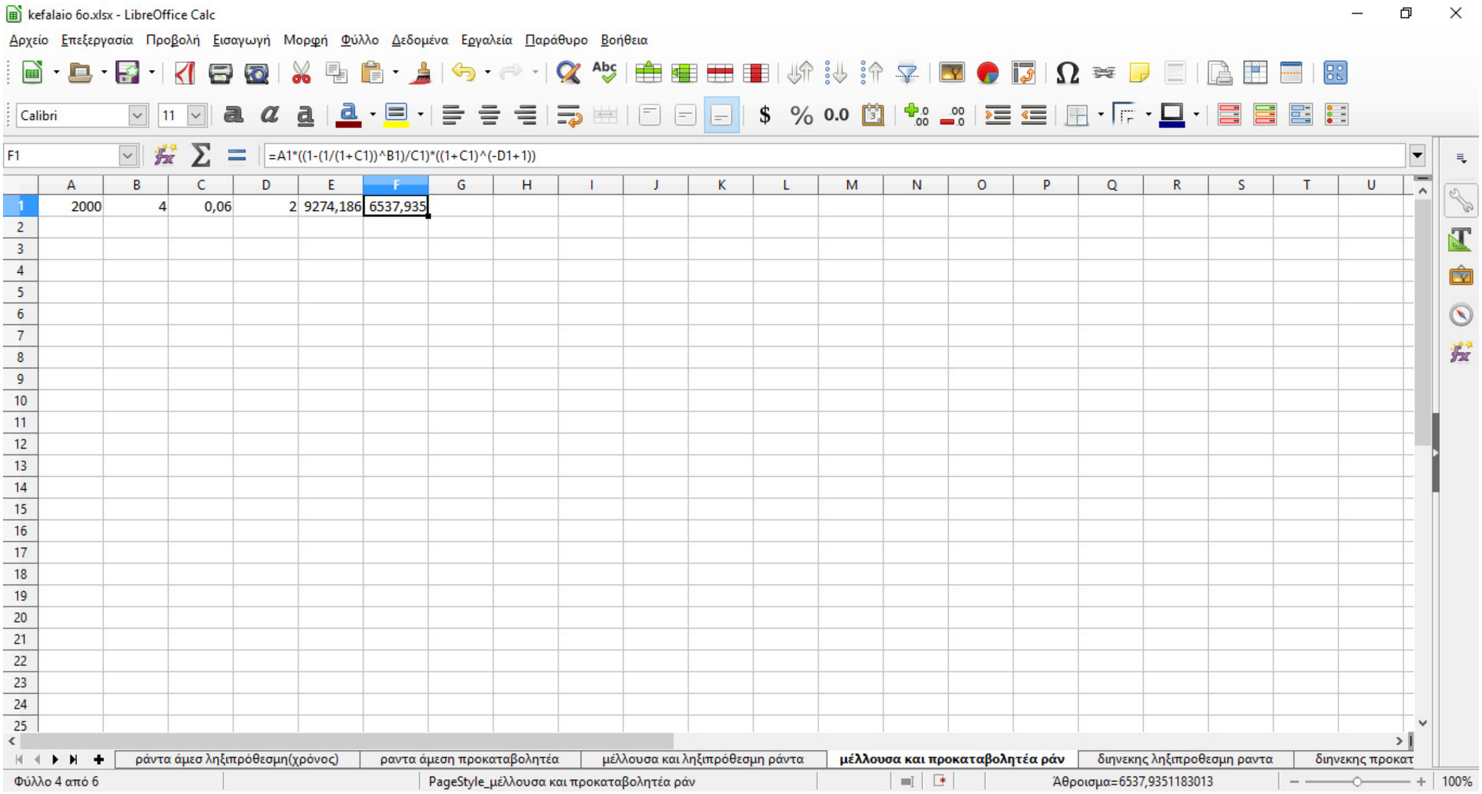
Στην πρώτη στήλη είναι ο σταθερός όρος της ράντας, στη δεύτερη στήλη είναι ο αριθμός των ετήσιων χρονικών περιόδων, στην τρίτη στήλη το ετήσιο επιτόκιο και στην τέταρτη στήλη ο αριθμός των χρονικών περιόδων της μέλλουσας ράντας μέχρι την καταβολή του πρώτου όρου. Στην πέμπτη στήλη είναι η τελική αξία της ράντας και στην έκτη στήλη η αρχική αξία της.

Ο υπολογισμός της τελικής αξίας της ράντας στο κελί E1 έγινε με τη βοήθεια του παρακάτω τύπου:

=A1*((((1+C1)^B1)-1)/C1)*(1+C1)

Ο υπολογισμός της αρχικής αξίας της ράντας στο κελί F1 έγινε με τη βοήθεια του παρακάτω τύπου:

=A1*((1-(1/(1+C1))^B1)/C1)*((1+C1)^(-D1+1))



Εικόνα 26: Υπολογισμός της τελικής και αρχικής αξίας σταθερής, μέλλουσας και προκαταβλητέας ράντας όταν ο χρόνος δίνεται σε έτη, εξάμηνα κλπ. και το επιτόκιο είναι αντίστοιχα ετήσιο, εξαμηνιαίο κλπ.

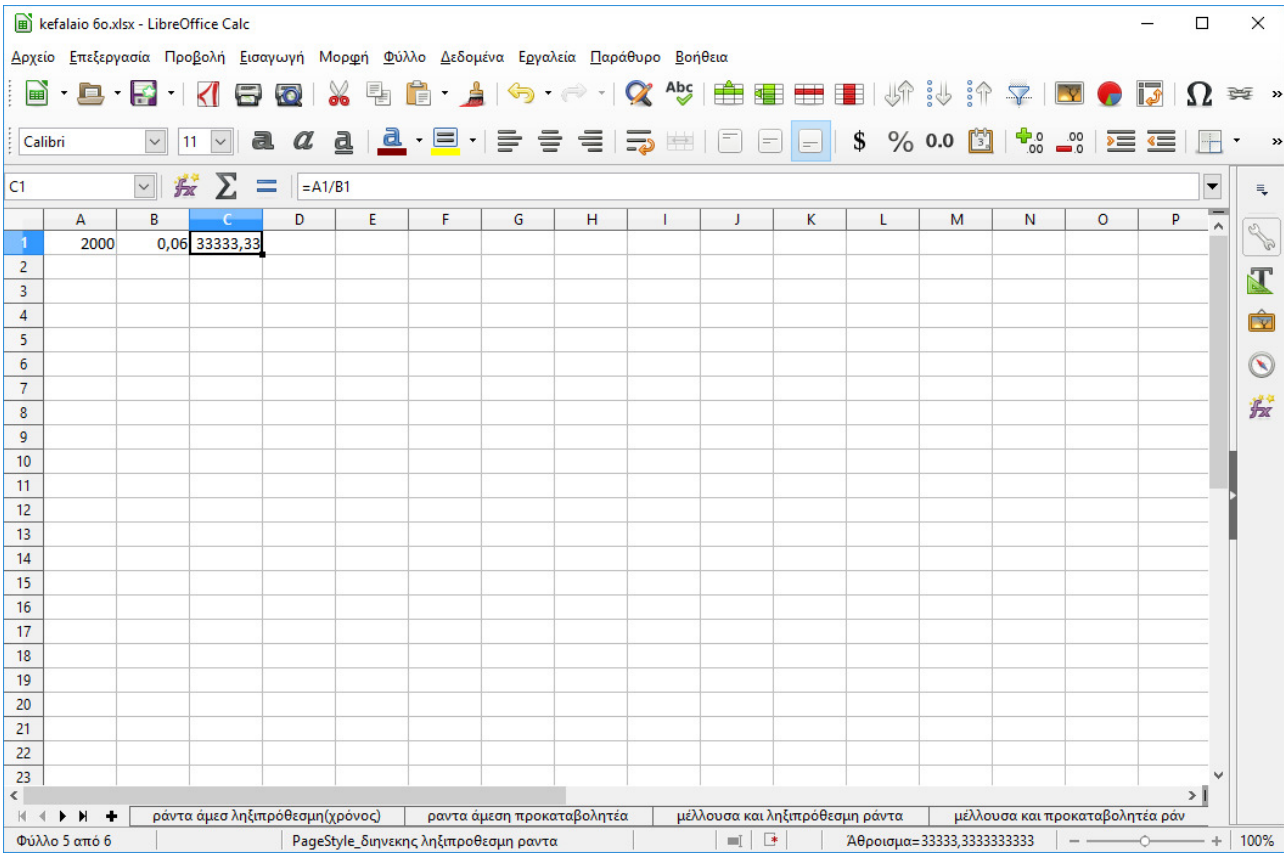
- Υπολογισμός της τελικής και αρχικής αξίας σταθερής, διηνεκούς και ληξιπρόθεσμης ράντας όταν ο χρόνος δίνεται σε έτη, εξάμηνα κλπ. και το επιτόκιο είναι αντίστοιχα ετήσιο, εξαμηνιαίο κλπ.

Έστω ράντα με σταθερό όρο 2000 και το επιτόκιο 6%. Να βρεθεί η αρχική αξία της διηνεκούς ράντας.

Στην πρώτη στήλη είναι ο σταθερός όρος της ράντας, στη δεύτερη στήλη είναι το ετήσιο επιτόκιο. Στην τρίτη στήλη είναι η αρχική αξία της διηνεκούς, σταθερής και ληξιπρόθεσμης ράντας.

Ο υπολογισμός της αρχικής αξίας της ράντας στο κελί C1 έγινε με τη βοήθεια του παρακάτω τύπου:

=A1/B1



Εικόνα 27: Υπολογισμός της τελικής και αρχικής αξίας σταθερής, διηνεκούς και ληξιπρόθεσμης ράντας όταν ο χρόνος δίνεται σε έτη, εξάμηνα κλπ. και το επιτόκιο είναι αντίστοιχα ετήσιο,

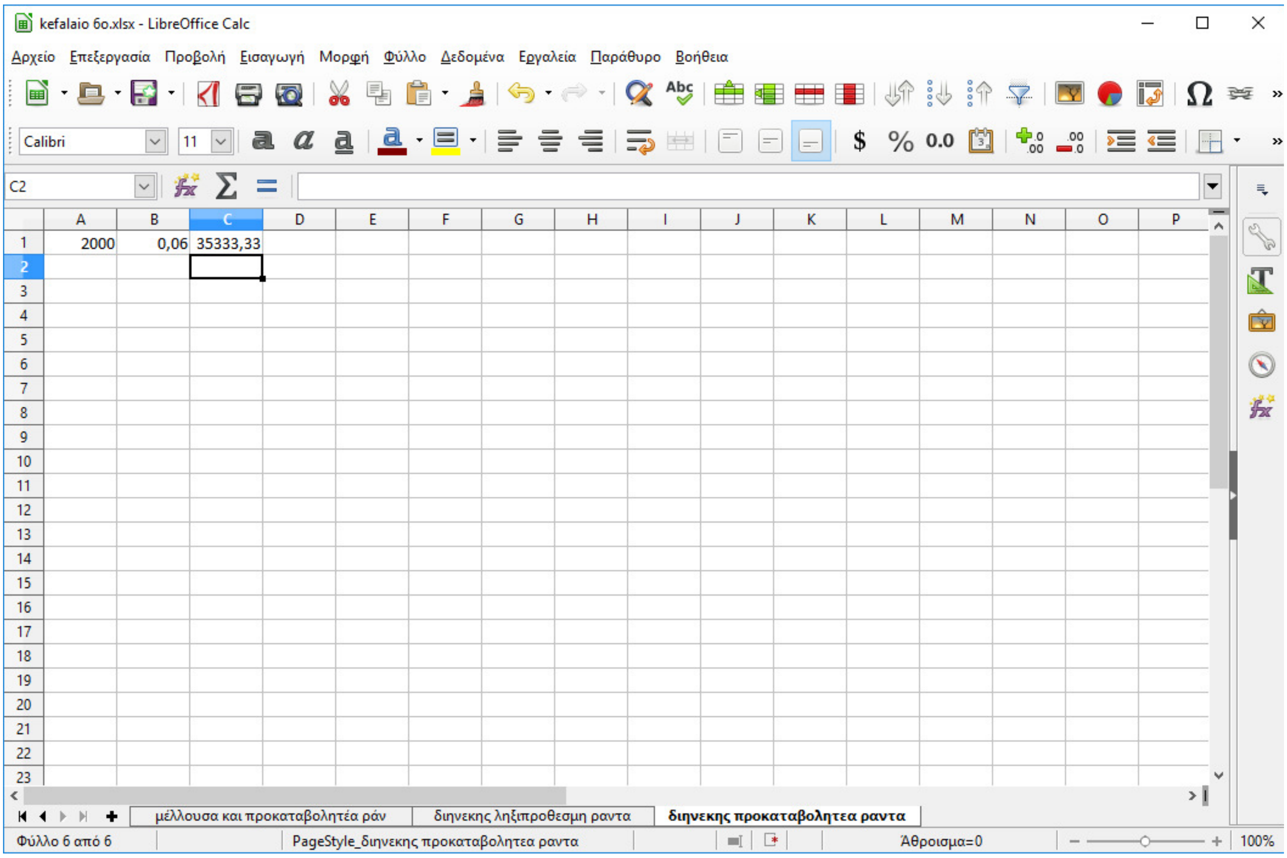
- Υπολογισμός της τελικής και αρχικής αξίας σταθερής, διηνεκούς και προκαταβλητέας ράντας όταν ο χρόνος δίνεται σε έτη, εξάμηνα κλπ. και το επιτόκιο είναι αντίστοιχα ετήσιο, εξαμηνιαίο κλπ.

Έστω ράντα με σταθερό όρο 2000 και το επιτόκιο 6%. Να βρεθεί η αρχική αξία της διηνεκούς προκαταβλητέας ράντας.

Στην πρώτη στήλη είναι ο σταθερός όρος της ράντας, στη δεύτερη στήλη είναι το ετήσιο επιτόκιο. Στην τρίτη στήλη είναι η αρχική αξία της διηνεκούς, σταθερής και προκαταβλητέας ράντας.

Ο υπολογισμός της αρχικής αξίας της ράντας στο κελί C1 έγινε με τη βοήθεια του παρακάτω τύπου:

=(A1/B1)*(1+B1)



Εικόνα 28: Υπολογισμός της τελικής και αρχικής αξίας σταθερής, διηνεκούς και προκαταβλητέας ράντας όταν ο χρόνος δίνεται σε έτη, εξάμηνα κλπ. και το επιτόκιο είναι αντίστοιχα ετήσιο,

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7ο

Δάνεια

7.1 Βασικές έννοιες στα Δάνεια

Δάνειο λέγεται κάθε χρηματικό ποσό, το οποίο χορηγείται συνήθως εντόκως σε φυσικό ή νομικό πρόσωπο, με σκοπό να επιστραφεί στο δανειστή σε ορισμένο χρόνο.

Ο χρόνος που μεσολαβεί από την ημέρα που συνάπτεται το δάνειο έως την ημέρα που εξοφλείται λέγεται διάρκεια του δανείου.

Τα δάνεια διακρίνονται σε βραχυπρόθεσμα και μακροπρόθεσμα. Βραχυπρόθεσμα ονομάζονται τα δάνεια τα οποία έχουν διάρκεια αποπληρωμής μέχρι ένα έτος, ενώ μακροπρόθεσμα λέγονται τα δάνεια με διάρκεια αποπληρωμής μεγαλύτερη του έτους.

Σήμερα τα πρόσωπα που διεξάγουν τη δραστηριότητα του δανεισμού είναι οι τράπεζες. Γενικά στο επιτόκιο που ζητάει μία τράπεζα για την παροχή ενός δανείου είναι αθροισμένα δύο πράγματα, ο πληθωρισμός και το κέρδος της τράπεζας για το οποίο δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός, εκτός από αυτόν του ανταγωνισμού.

Ένα δάνειο περιγράφεται πλήρως από τα παρακάτω μεγέθη:

- Το χρηματικό ποσό Κ του δανείου.
- Τις χρονικές περιόδους n που διαρκεί η αποπληρωμή του δανείου.
- Το επιτόκιο i υπολογισμού των τόκων με το οποίο ο δανειστής δίνει τα χρήματα του στο δανειζόμενο.
- Τη δόση R της ράντας που αποπληρώνει το δάνειο.

Γενικά τα μεγέθη K,n,i προκύπτουν ύστερα από συμφωνία των δύο μερών, του δανειστή και του δανειολήπτη.

Το μέγεθος της δόσης R δίνεται εξισώνοντας την αξία της ράντας με n όρους και επιτόκιο i με το ποσό του δανείου K. Με άλλα λόγια η δόση R θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε το αρχικό ποσό του δανείου K να ισούται με την αρχική αξία της ράντας με δόση R, n όρους και επιτόκιο i, δηλαδή:

$$R * A = K \text{ ή } R = \frac{K}{A}$$

Το παραπάνω ποσό είναι η εκάστοτε δόση του δανείου.

7.2 Αποπληρωμή ενός δανείου

Έστω δάνειο μεγέθους K το οποίο δόθηκε με επιτόκιο i και απαιτείται η αποπληρωμή του σε n περιόδους. Για να είναι πιο απλό παράδειγμα ας υπάρχει η υπόθεση ότι η περίοδος υπολογισμού επιτοκίου είναι η ίδια με την περίοδο καταβολής δόσεων και έστω R η δόση της ράντας.

Κάθε δόση αποτελείται από δύο μέρη. Το ένα μέρος είναι ο τόκος του κεφαλαίου για το χρονικό διάστημα που πέρασε δηλαδή είναι το κέρδος του δανειστή από αυτή τη συναλλαγή, ενώ το άλλο είναι το χρεολύσιο ανασυστάσεως του δανεισμένου κεφαλαίου, δηλαδή το ποσό που ανατοκιζόμενο σωρευτικά θα δώσει το αρχικό κεφάλαιο.

Σε κάθε περίπτωση θα πρέπει να είναι γνωστό κάθε στιγμή ποιο ποσό από τη δόση αντιστοιχεί στο τόκο του αρχικού κεφαλαίου και ποιο ποσό αντιστοιχεί στο χρεολύσιο ανασύστασης του αρχικού κεφαλαίου. Αυτό είναι σημαντικό τόσο γιατί μπορεί να προκύψει ζήτημα πρόωρης εξόφλησης του δανείου άρα πρέπει να είναι γνωστό και στο δανειστή και στο δανειζόμενο το υπόλοιπο του κεφαλαίου που απομένει για πληρωμή τόσο για φορολογικούς λόγους του δανειζόμενου καθώς οι φορολογικές υπηρεσίες του κράτους πολλές φορές αντιμετωπίζουν με διαφορετικό τρόπο τα έξοδα εξυπηρέτησης τόκων δανείων. Όμως, δεν υπάρχει μόνο ένας τρόπος υπολογισμού των μερών στα οποία χωρίζεται το τοκοχρεολύσιο.

- Μέθοδος αποπληρωμής προοδευτικού χρεολυσίου

Ο πιο συνηθισμένος τρόπος υπολογισμού αυτών των ποσών είναι η μέθοδος του προοδευτικού χρεολυσίου. Σύμφωνα με αυτό το τρόπο το μέρος της δόσης που αποτελεί το κέρδος του δανειστή είναι ακριβώς ο τόκος του ανεξόφλητου κεφαλαίου για την περίοδο που πέρασε ενώ το υπόλοιπο είναι το χρεολύσιο ανασύστασης του αρχικού κεφαλαίου.

Έστω τα ποσά I_k και P_k τα ποσά που θα πληρωθούν στη k δόση ενός δανείου για το τόκο και το χρεολύσιο αντίστοιχα. Άρα η κάθε δόση θα είναι ίση με:

$$R = I_k + P_k$$

Ο τόκος I_1 που αντιστοιχεί στην πρώτη περίοδο και που αποτελεί το ένα μέρος της δόσης είναι:

$$I_1 = K * i$$

Αυτό σημαίνει ότι το χρεολύσιο θα είναι το υπόλοιπο ποσό:

$$P_1 = R - I_1 = R - K * i$$

και θα απομείνει υπόλοιπο προς εξόφληση:

$$K - P_1 = K * (1+i) - R$$

Στη δεύτερη περίοδο το τελευταίο ποσό ανατοκίζεται και δίνει το τόκο της δεύτερης δόσης I_2 ενώ το ανεξόφλητο κεφάλαιο θα μειωθεί κατά R-I_2. Ο υπολογισμός αυτός γίνεται για κάθε δόση και έτσι προκύπτει ο πίνακας απόσβεσης του δανείου.

Η παραπάνω διαδικασία δεν είναι χρηστική σε περιπτώσεις πολλών δόσεων, συνεπώς τίθεται η ανάγκη γενίκευσης. Παρακάτω θα παρουσιαστεί η διαδικασία γενίκευσης.

Έστω δάνειο μεγέθους K ευρώ με επιτόκιο i για n χρονικές περιόδους του i. Με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου ο τόκος κάθε περιόδου υπολογίζεται με βάση το υπόλοιπο χρέος της προηγούμενης περιόδου. Στη μέθοδο αυτή τα χρεολύσια αποτελούν γεωμετρική πρόοδο με λόγο 1+i. Αυτός είναι και ο λόγος που η μέθοδος αυτή καλείται και μέθοδος του προοδευτικού χρεολυσίου.

Στη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου τα χρεολύσια X_m, m=1,2,..,n αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου με λόγο 1+i.

Ισχύει: $R_m=R_{m+1}$,για m=1,2,…,n-1.

Άρα $I_m+X_m=I_{m+1}+X_{m+1}$, για m=1,2,…,n-1.

Ισχύει ότι Y_0 =K , $I_m = Y_{m-1}*i$, m=1,2,…,n και $X_m=Y_{m-1}-Y_m$, m=1,2,…,n ,άρα θα ισχύει:

$$I_m + X_m = I_{m+1} + X_{m+1}$$

ή

$$X_{m+1} = (Y_{m-1} - Y_m) * i + X_m$$

ή

$$X_{m+1} = X_m * i + X_m$$

ή

$$X_{m+1} = X_m * (1+i)$$

Άρα τα χρεολύσια αποτελούν πράγματι γεωμετρική πρόοδο με λόγο 1+i.

Από την ισότητα $K=X_1+X_2+...+X_n$ καθώς και από τον παραπάνω τύπο θα ισχύει:

$$K = X_1 + X_1 * (1+i) + ... + X_1 * (1+i)^{n-1}$$

ή

$$K = X_1 * \left[1 + (1+i) + ... + (1+i)^{n-1}\right]$$

ή

$$K = X_1 * \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

ή

$$X_1 = K * \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

Το χρεολύσιο της m-οστής περιόδου είναι:

$$X_m = R * (1+i)^{m-n-1} \text{ με m=1,2,…,n}$$

- Αμερικάνικη μέθοδος

Έστω ότι έχει δανεισθεί κάποιος κεφάλαιο K ευρώ με επιτόκιο i για n χρονικές περιόδους του επιτοκίου i .Με την αμερικάνικη μέθοδο το δάνειο εξοφλείται κατά τη λήξη του χωρίς να πληρώνονται οι τόκοι των ενδιάμεσων περιόδων. Ο οφειλέτης του δανείου στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου και για n συνεχείς περιόδους καταθέτει το ποσό R με επιτόκιο i_1.Οι δόσεις αυτές αποτελούν πρόβλημα ληξιπρόθεσμης ράντας. Για την τελική αξία S αυτής θα ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$S = R * \frac{(1+i_1)^n - 1}{i_1}$$

Επίσης:

$$S = K * (1+i)^n$$

Άρα:

$$R = \frac{K * i_1}{(1+i_1)^n - 1} * (1+i)^n$$

- Μέθοδος Sinking fund

Έστω ότι δανείσθηκε κάποιος ένα κεφάλαιο K με επιτόκιο i για n χρονικές περιόδους του επιτοκίου i. Με τη μέθοδο sinking fund ο οφειλέτης είναι υποχρεωμένος στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου και για n συνεχείς χρονικές περιόδους να πληρώνει τους τόκους του δανείου, δηλαδή το ποσό K*i κάθε φορά και επίσης να καταθέτει με ανατοκισμό ένα σταθερό ποσό με επιτόκιο i_1 έτσι ώστε μετά από n χρονικές περιόδους να συγκεντρωθεί το ποσό που δανείσθηκε. Τα δύο επιτόκια i και i_1 είναι διαφορετικά αλλά έχουν την ίδια χρονική περίοδο ανατοκισμού.

Στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου ο οφειλέτης καταθέτει το ποσό:

$$R_m = R = K * i + \frac{K * i_1}{(1 + i_1)^n - 1}, m = 1,2,..., n$$

Πράγματι, I_m=K*i, m=1,2,…,n και X_m=X, m=1,2,…,n. Επίσης:

$$X = K * \frac{i_1}{(1 + i_1)^n - 1}$$

7.3 Ομολογιακά δάνεια

Τα ομολογιακά δάνεια αντιπροσωπεύουν πολύ μεγάλα κεφάλαια, τα οποία δεν μπορούν να διατεθούν μόνο από ένα πρόσωπο, φυσικό ή νομικό. Τα δάνεια αυτά, διαιρούνται σε τμήμα μικρότερων ποσών τα οποία καλούνται ομολογίες, τις οποίες εκδίδει ο δανειζόμενος και τις διαθέτει στους δανειστές του.

Οι ομολογίες διακρίνονται με βάση τον τρόπο με τον οποίο εκδίδονται. Η διάκριση αυτή έχει ως εξής:

- Ονομαστικές: ονομάζονται οι ομολογίες στις οποίες αναγράφεται το όνομα του ομολογιούχου, στον οποίο πληρώνονται οι τόκοι, το πόσο και ο χρόνος πληρωμής του. Οι ονομαστικές ομολογίες παρέχουν στον κάτοχό τους πλήρη ασφάλεια σε περίπτωση απώλειας ή κλοπής, όμως δεν μπορούν να μεταβιβαστούν εύκολα, αφού αυτό προϋποθέτει αλλαγή ονοματεπώνυμου στον πιστωτικό τίτλο και στο μητρώο ομολογιών.

- Στον κομιστή: ονομάζονται οι ομολογίες όταν είναι ανώνυμες και ανήκουν σε αυτόν που τις έχει. Αυτές οι ομολογίες μεταβιβάζονται εύκολα, αλλά δεν παρέχουν καμία ασφάλεια στον ομολογιούχο αφού είναι ανώνυμες.

- Μικτές: ονομάζονται οι ομολογίες όταν στο σώμα τους αναγράφεται το όνομα του ομολογιούχου και έχουν τοκομερίδια, τα οποία φέρουν τον αριθμό της ομολογίας. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι η είσπραξη μπορεί να γίνει από τον οποιονδήποτε.

Ονομαστική αξία ομολογίας ονομάζεται το χρηματικό ποσό που αναγράφεται πάνω στην ομολογία.

Τιμή έκδοσης ομολογίας ονομάζεται το χρηματικό ποσό που πουλήθηκε η ομολογία.

Τιμή εξόφλησης ομολογίας ονομάζεται το χρηματικό ποσό που θα εξοφληθεί η ομολογία κατά τη λήξη της.

Τοκομερίδιο είναι μία απόδειξη όπου επισυνάπτεται σε μία ομολογία με την οποία γίνεται η είσπραξη του τόκου στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου το ομολογιακού δανείου.

Η απόσβεση των ομολογιακών δανείων γίνεται συνήθως με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου. Για το λόγο αυτό σε καθορισμένες ημερομηνίες γίνεται κλήρωση ορισμένου αριθμού ομολογιών.

7.4 Υπολογισμός της δόσης ενός δανείου με τη χρήση Excel

- Υπολογισμός της δόσης (τοκοχρεολύσιου), του τόκου και του χρεολυσίου ενός δανείου με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου

Έστω δάνειο με κεφάλαιο 20000 ευρώ και επιτόκιο δανείου ίσο με 7% με αριθμό χρονικών περιόδων ίσο με 10. Να βρεθούν με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου τα εξής:

- Η δόση του δανείου
- Ο τόκος του δανείου τη χρονική περίοδο 2.
- Το χρεολύσιο τη χρονική περίοδο 2.

Υπολογισμός δόσης

Στο κελί A1 εισάγεται η συνάρτηση:

=PMT(0,07;10;20000)

Η συνάρτηση PMT έχει τρία ορίσματα, το επιτόκιο, τον αριθμό των χρονικών περιόδων και το κεφάλαιο του δανείου.

Υπολογισμός τόκου

Στο κελί B1 εισάγεται η συνάρτηση:

=IPMT(0,07;2;10;20000)

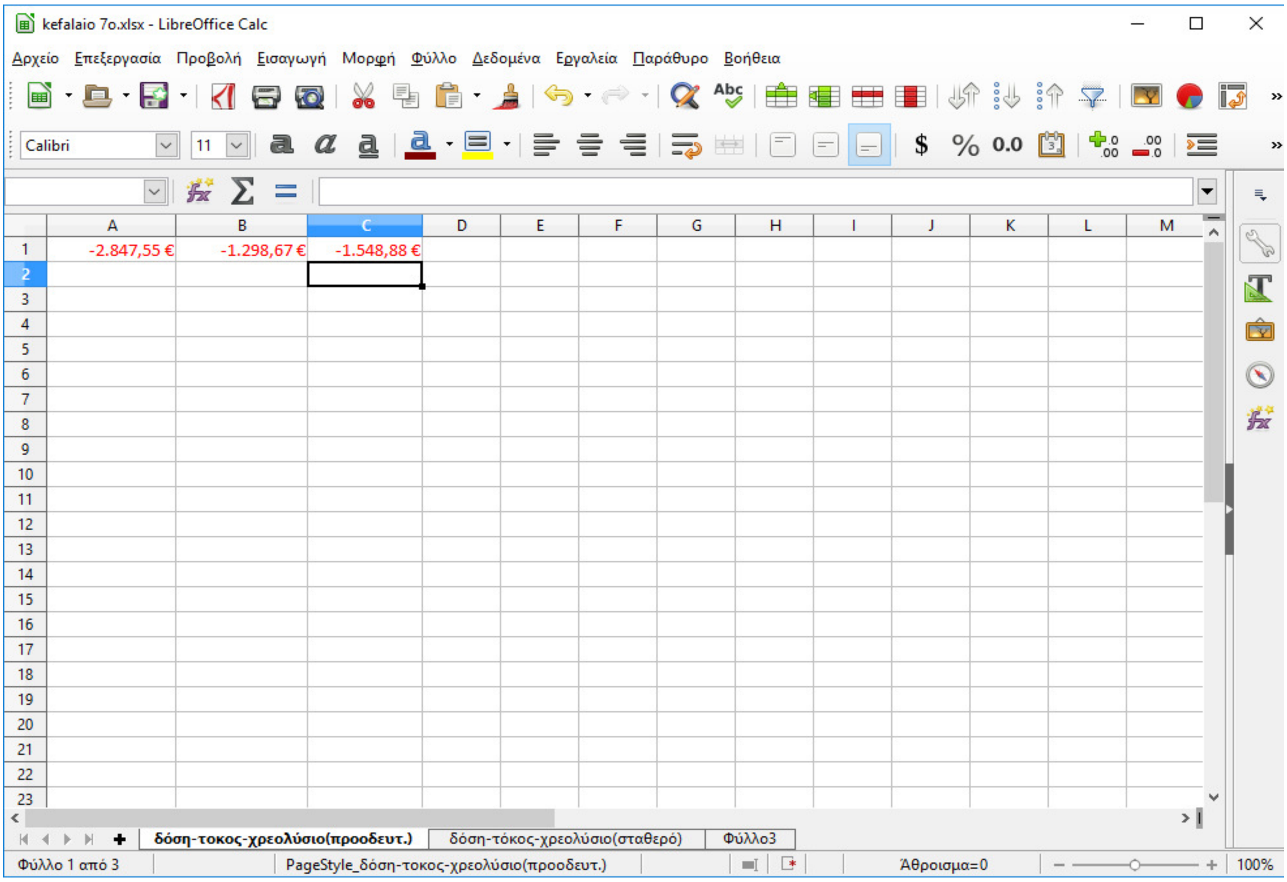
Η συνάρτηση IPMT έχει τέσσερα ορίσματα το επιτόκιο(7%),τον αριθμό της χρονικής περιόδου(2), τον αριθμό των χρονικών περιόδων του δανείου(10) και το κεφάλαιο(20000)

<u>Υπολογισμός χρεολυσίου</u>

Στο κελί C1 εισάγεται η συνάρτηση:

=PPMT(0,07;2;10;20000)

Η συνάρτηση PPMT έχει τέσσερα ορίσματα το επιτόκιο, τον αριθμό της χρονικής περιόδου που θέλουμε να υπολογίσουμε το χρεολύσιο, τον αριθμό των χρονικών περιόδων και το κεφάλαιο αντίστοιχα.



Εικόνα 99: Υπολογισμός της δόσης (τοκοχρεολύσιου), του τόκου και του χρεολυσίου ενός δανείου με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου

- Υπολογισμός της δόσης ,του τόκου και του χρεολυσίου ενός δανείου με τη μέθοδο του σταθερού χρεολυσίου.

Έστω δάνειο με κεφάλαιο 20000 ευρώ και επιτόκιο δανείου ίσο με 7% με αριθμό χρονικών περιόδων ίσο με 10. Να βρεθούν με τη μέθοδο του σταθερού χρεολυσίου τα εξής:

- Η δόση του δανείου
- Ο τόκος του δανείου.
- Το χρεολύσιο.

Στο κελί A1 είναι το κεφάλαιο του δανείου (20000),στο κελί B1 είναι ο αριθμός των χρονικών περιόδων του δανείου και στο κελί C1 είναι το επιτόκιο(7%).

<u>Υπολογισμός δόσης</u>

Ο υπολογισμός της δόσης γίνεται στο κελί D1 με τον παρακάτω τύπο:

=A1*((C1/((1+C1)^B1-1)))+A1*C1

<u>Υπολογισμός χρεολυσίου</u>

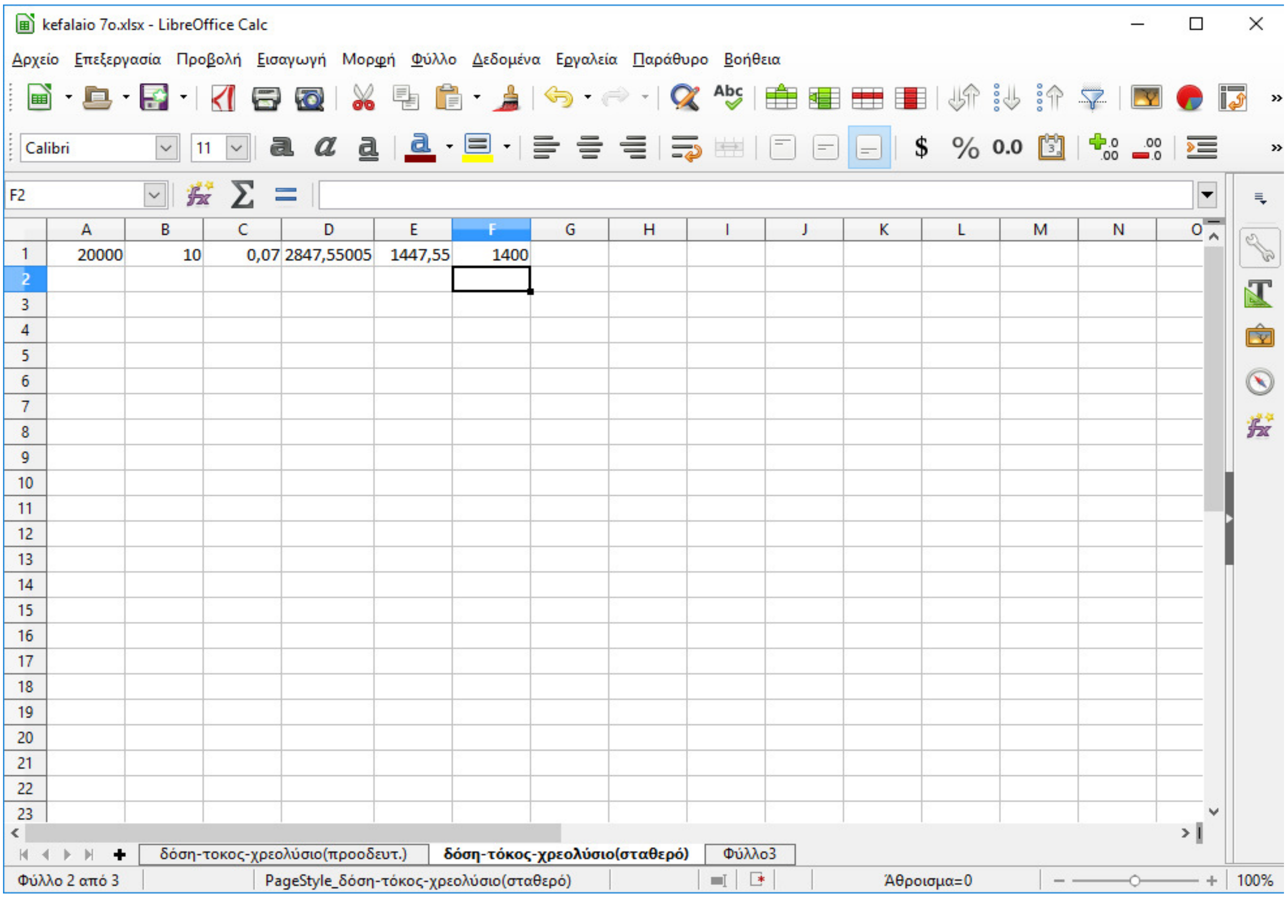
Ο υπολογισμός του χρεολυσίου γίνεται στο κελί E1 με τον παρακάτω τύπο:

=A1*((C1/((1+C1)^B1-1)))

<u>Υπολογισμός τόκου</u>

Ο υπολογισμός του τόκου γίνεται στο κελί F1 με τον παρακάτω τύπο:

=A1*C1



Εικόνα 30: Υπολογισμός της δόσης ,του τόκου και του χρεολυσίου ενός δανείου με τη μέθοδο του σταθερού χρεολυσίου

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Με την παρούσα πτυχιακή εργασία έγινε μία προσπάθεια ανάλυσης των οικονομικών μαθηματικών και της ανάλυσης δομικών εννοιών της Οικονομικής επιστήμης όπως ο τόκος, ο ανατοκισμός, οι ράντες και τα δάνεια.

Από την ανάλυση των παραπάνω φάνηκε ξεκάθαρα ότι σε αρκετές περιπτώσεις η πολυπλοκότητα των πράξεων που απαιτούνται για την επίλυση σχετικών προβλημάτων είναι σημαντική. Αυτή η πολυπλοκότητα αντιμετωπίζεται εν πολλοίς με τη χρήση υπολογιστικών εργαλείων όπως το Excel.

Το Excel παρέχει πληθώρα συναρτήσεων και διευκολύνει σημαντικά στην επίλυση σύνθετων χρηματοοικονομικών προβλημάτων.

Από τα παραπάνω είναι ξεκάθαρο ότι όσοι ασχολούνται με τα οικονομικά πρέπει να αναζητούν νέα εργαλεία και τεχνολογίες ώστε να διευκολύνεται το έργο τους και το Excel είναι ξεκάθαρα ένα τέτοιο εργαλείο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Χρηματο-οικονομικά Μαθηματικά, Γιάννης Κούγιας Δημήτρης Γεωργίου, Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών, 2004
2. Οικονομικά Μαθηματικά, Χουβαρδάς Βασίλης, Μακεδονικές εκδόσεις, 2004
3. Αγορές Χρήματος και Κεφαλαίου, Σταύρος Θωμαδάκης, Μανώλης Ξανθάκης, Εκδόσεις Αθ. Σταμούλης, 2006
4. Χρηματοοικονομική Ανάλυση Επιχειρήσεων, Μανώλης Ξανθάκης Χρήστος Αλεξιάδης, Εκδόσεις Αθ. Σταμούλης, 2006
5. Μαθηματικά Οικονομικών και Διοικητικών Υπηρεσιών, Α.Χ. Παναγιωτόπουλος Ε.Χ. Φούντας