

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΔΥΤΙΚΗΣ ΕΛΛΑΔΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ & ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΕΠΙΛΥΣΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΤΗΝ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ
ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ ΜΑΤΗΜΑΤΙΣ**

ΙΩΑΝΝΑ ΑΛΕΞ. ΒΛΑΧΟΥ

A. M. 16022

Επιβλέπουσα: Δρ Παναγιώτα Βάθη

Μεσολόγγι 2018

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στην παρούσα εργασία μελετάται η αξιοποίηση του λογισμικού mathematica για την επίλυση χρηματοοικονομικών προβλημάτων.

Το mathematica αποτελεί ένα λογισμικό ιδιαίτερα γνωστό στον επιστημονικό κλάδο καθώς χρησιμοποιείται από μαθηματικούς και σπουδαστές των οικονομικών επιστημών μέχρι μηχανικούς και αρχιτέκτονες. Η χρήση του ωστόσο τείνει να επεκταθεί και στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Στην παρούσα επιστημονική εργασία χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό Wolframmathematica 9.0.0 (έκδοση 2012) στην επίλυση Χρηματοοικονομικών προβλημάτων.

Στα κεφάλαια 1 και 2 αναλύεται το mathematica με παραδείγματα που εξοικειώνουν και έναν αρχάριο με το λογισμικό αυτό και εισάγεται ο αναγνώστης σε μαθηματικές έννοιες που μας χρησιμεύουν στην συνέχεια. Το 3^ο κεφάλαιο περιλαμβάνει την επίλυση ασκήσεων με αναλυτικό υλικό της χρήσης του mathematica.

ABSTRACT

The present study explores the use of mathematica software to solve financial problems.

Mathematica constitutes a software well known in the scientific field as it is used by mathematicians and students of economic science to engineers and architects. Its use however tends to be extended also in the education of high school level.

In this study, the Wolfram Mathematica 9.0.0 software (version of 2012) was used to solve financial problems.

Chapters 1 and 2 analyze mathematica with examples that make a beginner familiar with this software and introduce the reader to mathematical concepts that serve us thereafter. The chapter number 3 includes exercises solved with analytical material of the mathematica software used.

Ευχαριστίες

Η Πτυχιακή αυτή αφιερώνεται στην αγαπημένη μου Ειρήνη, για την πολύτιμη υποστήριξή της.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Πρόλογος

Εισαγωγή

Συνομογραφίες και άλλες έννοιες

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

- 1.1 Τι είναι το Mathematica και γιατί να το επιλέξω
- 1.2 Οι βασικές πράξεις της Αριθμητικής
- 1.3 Παλέτες – Palettes
- 1.4 Βασικές συναρτήσεις
- 1.5 Προσεγγιστικοί υπολογισμοί
- 1.6 Απόδοση τιμών σε μεταβλητές

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

- 2.1 Ιστορική αναδρομή
- 2.2 Διαφορικός λογισμός
- 2.3 Αθροίσματα και γινόμενα
- 2.4 Μελέτη συνάρτησης – blank operator ή underscore
- 2.5 Γραφήματα - γραφικές παραστάσεις
- 2.6 Μελέτη συνάρτησης με χρήση παραγώγων
- 2.7 Ολοκληρωτικός λογισμός

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ & ΕΠΙΛΥΣΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

- 3.1 Βασικές οικονομικές συναρτήσεις
- 3.2 Συναρτήσεις και Όρια με το Mathematica
- 3.3 Τόκος
- 3.4 Κεφαλαιοποίηση
 - 3.4.1 Απλή κεφαλαιοποίηση
 - 3.4.2 Σύνθετη κεφαλαιοποίηση
- 3.5 Μέθοδοι τοκισμού βάσει χρόνου t και τοκοφόρες ημέρες
- 3.6 Ράντες
- 3.7 Αριθμοδείκτες

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Συμπεράσματα

Βιβλιογραφία

ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΕΣ ΚΑΙ ΑΛΛΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Keywords – λέξεις κλειδιά

Φυσικό πληκτρολόγιο: το πληκτρολόγιο στο οποίο πληκτρολογούμε κείμενο ή αριθμούς, όχι το πληκτρολόγιο της Mathematica. Το φυσικό πληκτρολόγιο ανήκει στο hardware του υπολογιστή μας

Mathematica: λογισμικό αλλά και γλώσσα προγραμματισμού. Για αυτόν τον λόγο συχνά αναφέρεται και με τα δυο άρθρα π.χ. η *Mathematica*, το *Mathematica*

Λειτουργικό σύστημα ή Λ.Σ. ή O.S. (operatingsystem) στην επιστήμη της Πληροφορικής είναι το λογισμικό ενός υπολογιστή ή ενός smartphone το οποίο είναι υπεύθυνο για τον συντονισμό και την διαχείριση των εκτελούμενων εργασιών. Ένας τύπος λειτουργικού συστήματος περιέχεται πάντοτε σε έναν υπολογιστή οποιουδήποτε μεγέθους και δυνατότητας.

Για τον λόγο ότι το mathematica είναι στην αγγλική γλώσσα θα μεταφράσουμε κάποιες εντολές προς διευκόλυνση του χρήστη – αναγνώστη.

Matrice = μήτρα, πίνακας

Linearsolve = γραμμική επίλυση

Vector = διάνυσμα

Functions = συναρτήσεις

Keyboard = πληκτρολόγιο

Elementaryfunctions = στοιχειώδεις συναρτήσεις

Sin(e) = ημίτονο

Cos(ine) = συνημίτονο

Tan(gent) = εφαπτομένη

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ MATHEMATICA

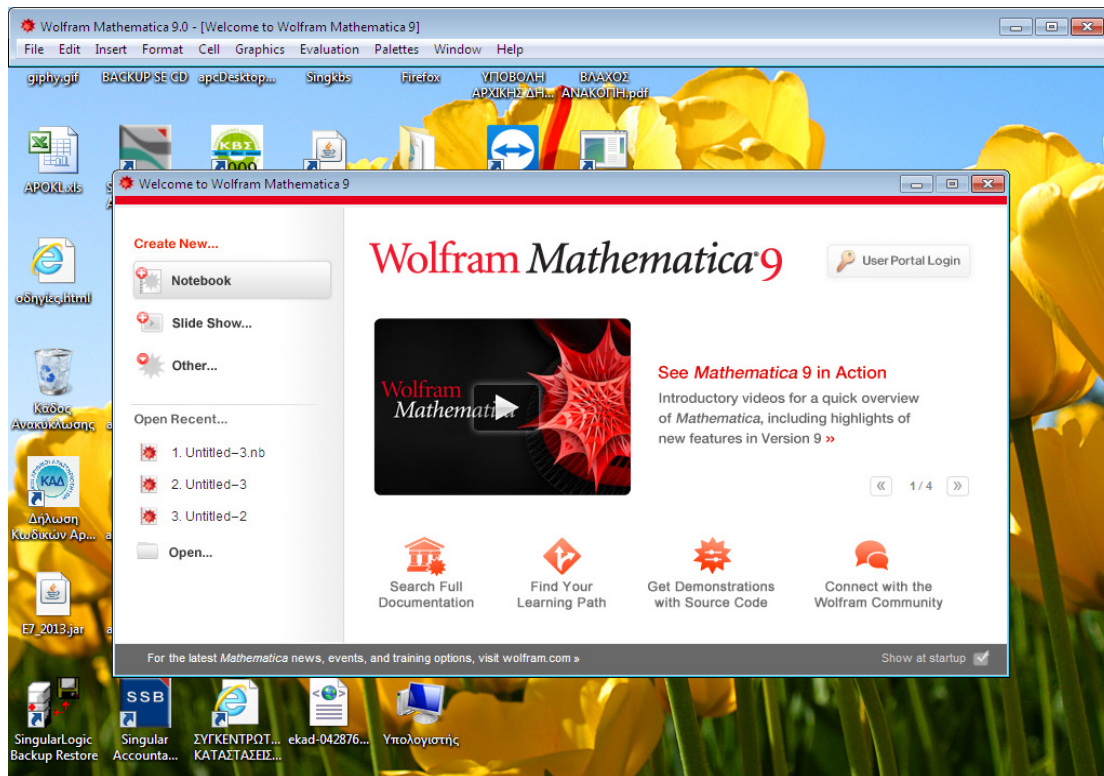
(Τι είναι το mathematica)
 1.1 Σχετικά με το mathematica

Το mathematica είναι μια γλώσσα συμβολικού προγραμματισμού από τις πιο γνωστές και ευρέως χρησιμοποιούμενες παγκοσμίως. Η καθιέρωση των ηλεκτρονικών υπολογιστών και νέων τεχνολογιών της Πληροφορικής στην αρχή της χιλιετίας και η πλέον δεδομένη μηχανογράφηση κάνει επιτακτική την ανάγκη να ασχοληθούμε με την εκμάθηση μιας γλώσσας προγραμματισμού. Η εκμάθηση, κατανόηση και χρήση κάποιας γλώσσας συμβολισμού η οποία θα εκτελεί μαθηματικούς υπολογισμούς διευκολύνοντας τον άνθρωπο στην μεταβατική εποχή από την χειρόγραφη στην μηχανογραφημένη απεικόνιση, καταχώρηση, δημιουργία, θέτει τα θεμέλια για μια καλύτερη διαχείριση του χρόνου μας. Μια σύγχρονη γλώσσα προγραμματισμού πρέπει να παρέχει στον χρήστη της τη δυνατότητα εκτέλεσης αλγεβρικών πράξεων, γραφημάτων ή γραφικών παραστάσεων δυο αξόνων τουλάχιστον, σε ένα περιβάλλον φιλικό τόσο για τους περισσότερο εξοικειωμένους με τον τομέα της Πληροφορικής όσο και για τους μη. Μια τέτοια γλώσσα προγραμματισμού πρέπει να ανταποκρίνεται στις ανάγκες των Θετικών Επιστημών οι οποίες διατρέχουν όλο το φάσμα των αριθμητικών πράξεων και διαγραμματικών απεικονίσεων. Βασική κρίνεται η δυνατότητα επίλυσης οικονομικών προβλημάτων τα οποία αποτελούν αντικείμενο της Οικονομικής Επιστήμης. Η Οικονομική Επιστήμη ανήκει στον κλάδο των κοινωνικών επιστημών ωστόσο είναι αδιαμφισβήτητη η χρήση μαθηματικών και στατιστικών παραγόντων σε αυτήν καθώς ο τρόπος σκέψης της λαμβάνει υπόψιν τόσο την λογική των μαθηματικών όσο και την κοινωνική-ψυχολογική διάσταση του οικονομικού κόσμου. Υπάρχουν πολλές γλώσσες προγραμματισμού με υψηλού επιπέδου δομή όπως οι Matlab και Mathcad. Έτσι, τίθεται το ανωτέρω εύλογο ερώτημα. «Γιατί να επιλέξω το mathematica;» Ωστόσο, το mathematica, το δημιούργημα του Stephen Wolfram, κερδίζει στα σημεία λόγω του ότι αποτελεί αρχικά την πιο εξελιγμένη γλώσσα συμβολικού προγραμματισμού καθώς παρέχει στον χρήστη μεγάλη ποικιλία εσωτερικών συναρτήσεων αλλά και την δυνατότητα δημιουργίας νέων οι οποίες δεν έχουν προβλεφθεί. (Αθανασίου, Αθήνα, 2007) Παρέχει έτσι στον χρήστη αυτονομία και την δυνατότητα περαιτέρω πειραματισμού. Κατά δεύτερον, το πλήρες πακέτο γραφικών για οπτική αναπαράσταση που διαθέτει, καλύπτει όλο το εύρος των αναγκών παρουσίασης. Τέλος, το mathematica εγκαθίσταται σε οποιαδήποτε λειτουργικά συστήματα Windows λειτουργώντας σε γενικές γραμμές κατά τον ίδιο τρόπο. Τα πλεονεκτήματα αυτά του mathematica αποδεικνύονται τελικά εκείνα που την κατατάσσουν κορυφαία τόσο στον Επιστημονικό τομέα όσο και στην απόπειρα ένταξής του στην Εκπαίδευση. Το mathematica, σαν λογισμικό, είναι εύχρηστο και υπερτερεί λόγω των ανωτέρω πλεονεκτημάτων του έναντι και άλλων λογισμικών της κατηγορίας του.

Στην θέση του χρήστη

Αρχικά, εγκαθιστούμε το WolframMathematica 9.0.0 (για αυτή την έκδοση γίνεται λόγος στην παρούσα Πτυχιακή) στον υπολογιστή μας. Οι εκδόσεις του mathematica ανανεώνονται για να ακολουθούν την εξέλιξη της τεχνολογίας και να εγκαθίστανται σε οποιαδήποτε νέα έκδοση του λειτουργικού συστήματος των Windows (WindowsXP, 7,8 κ.λπ) Κρίνεται σημαντικό να αναφέρουμε πως οι βασικές λειτουργίες του mathematica παραμένουν σταθερές και οι διαφορές από έκδοση σε έκδοση δε διαφέρουν σημαντικά. Έχοντας ολοκληρώσει το στάδιο της εγκατάστασης, κάνουμε αριστερό κλικ στην «Έναρξη» (Start) → Προγράμματα (Programs) και βρίσκουμε το πρόγραμμά μας, κάνουμε αριστερό κλικ και αναμένουμε το άνοιγμά του. Ειδάλλως, εάν έχουμε κάνει συντόμευση (shortcut) του mathematica στην Επιφάνεια Εργασίας του υπολογιστή μας κάνουμε αριστερό, διπλό κλικ στην συντόμευση για να βρεθούμε αυτόματα στο «παραθυρικό περιβάλλον» του λογισμικού μας. Όταν ανοίξει το πρόγραμμα μεταφερόμαστε στην πρόσοψη του προγράμματος.

Η πρόσοψη δέχεται την εισροή και συνδεδεμένη με τον πυρήνα (kernel) του λογισμικού μας εξάγεται σε αυτήν το αποτέλεσμα της εκάστοτε πράξης. Η πληροφορία διακινείται μέσω των λεγόμενων βιβλίων εργασίας (notebooks). Στο πρόγραμμα μας ανοίγεται ένα παράθυρο μικρότερο σε μέγεθος από το περίγραμμα του προγράμματός μας πράγμα που δεν πρέπει να μας προβληματίσει. Βλέπουμε αριστερά μια λίστα με την προτροπή «CreateNew...» κάτω από την οποία έχουμε την επιλογή ανοίγματος νέου βιβλίου εργασίας (notebook), SlideShow, Other. Πιο κάτω υπάρχει η επιλογή να ανοίξουμε προηγούμενα αποθηκευμένο βιβλίο εργασίας είτε με την επιλογή Recent (πρόσφατο) είτε με την επιλογή “Open” η οποία μας μεταφέρει στον φάκελο “Έγγραφα” του υπολογιστή μας. Εδώ μπορούμε να αναζητήσουμε μέσω οποιασδήποτε διαδρομής, το/τα προηγούμενο/α αποθηκευμένα βιβλία εργασίας μας.

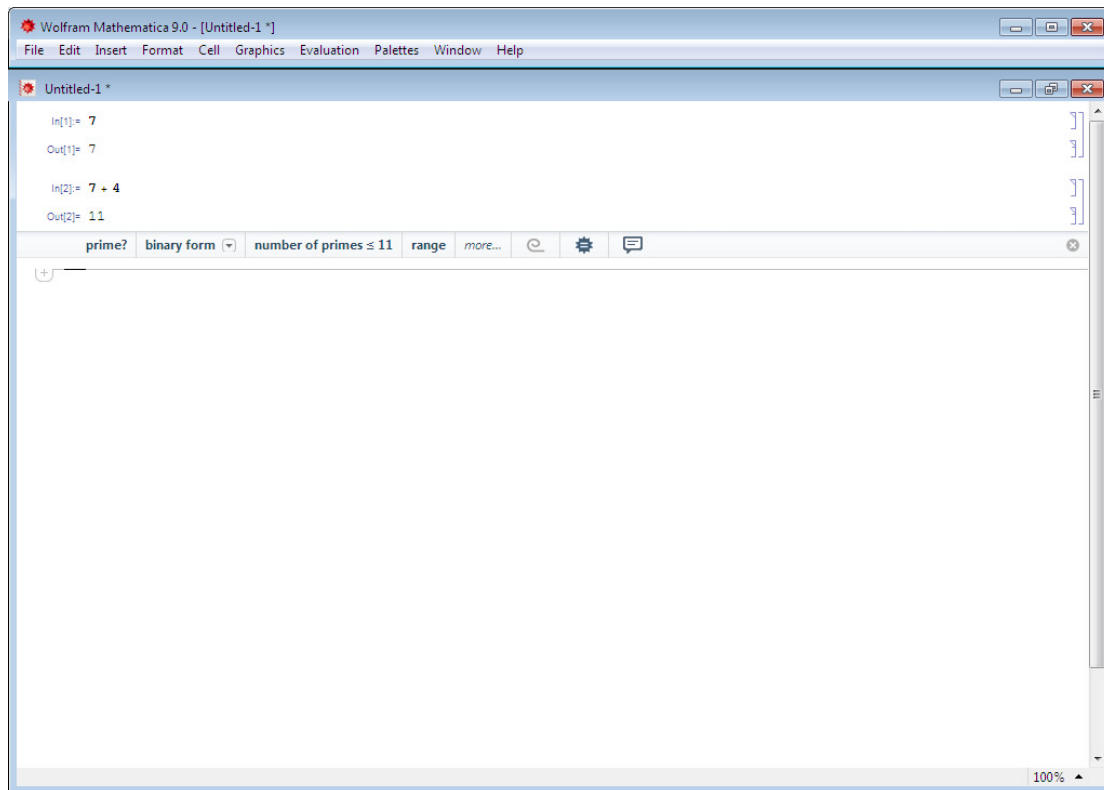


εικόνα

1

Κάνοντας κλικ στην επιλογή «notebook» μας ανοίγεται ένα βιβλίο εργασίας με τον τίτλο Untitled-1 (επάνω αριστερά). Για να δώσουμε ένα όνομα στο αρχείο μας αυτό και να το αποθηκεύσουμε, επιλέγουμε File→Saveas.. δίνουμε το όνομα που επιθυμούμε και αποθηκεύουμε το αρχείο μας επιλέγοντας τον προορισμό του στον σκληρό δίσκο. Για να ανοίξουμε ένα προηγούμενος αποθηκευμένο έγγραφο ακολουθούμε τα προαναφερθέντα βήματα.

Έστω ότι εισάγουμε έναν αριθμό στο Βιβλίο Εργασίας μας, π.χ. τον αριθμό 7. Η έκταση κάθε κελιού προσδιορίζεται από μια αγκύλη χρώματος μπλε στην δεξιά πλευρά του παραθύρου όπως φαίνεται στην εικόνα 2. Από την στιγμή που εμφανίζεται αυτό το κελί ή μπλε αγκύλη, η Εισροή (Input) μας (εδώ ο αριθμός 7) μπορεί να σταλεί στον Πυρήνα (Kernel) με την πληκτρολόγηση του πλήκτρου Enter στο πληκτρολόγιό μας.



εικόνα

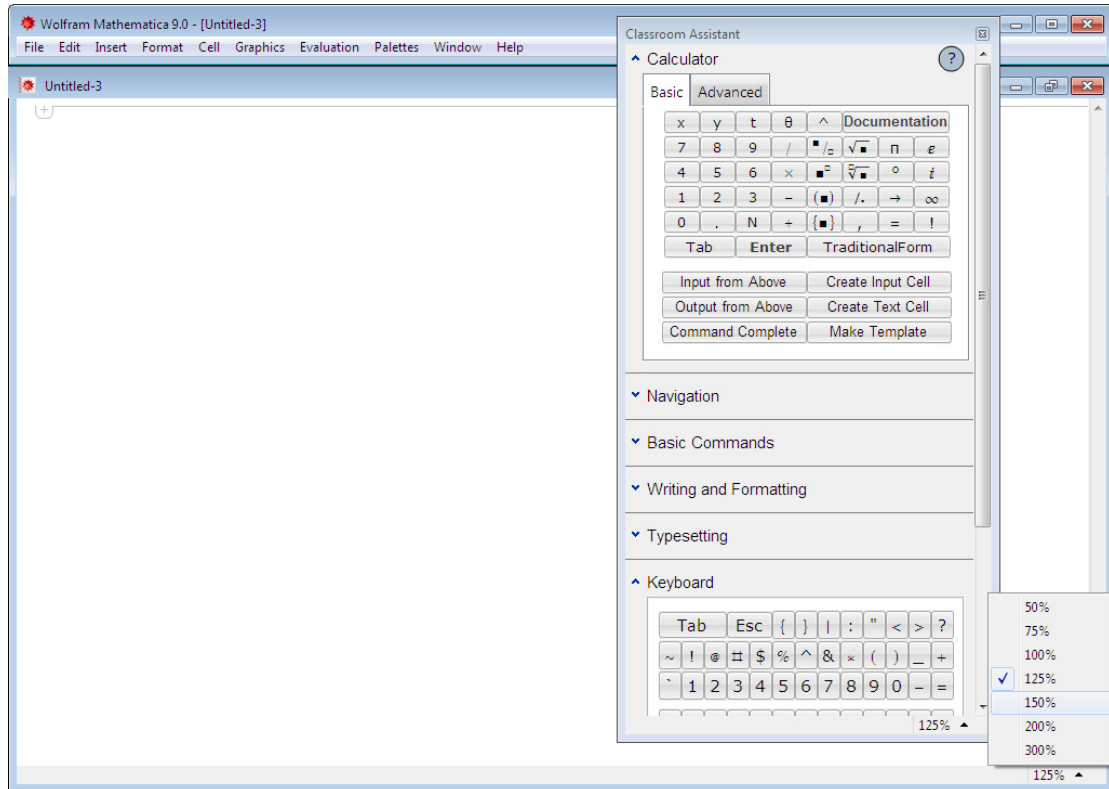
2

Κάθε εισροή χαρακτηρίζεται με την έκφραση “In[αριθμός]:= αριθμός και κάθε εκροή (εντολή δηλαδή που εξέρχεται από τον πυρήνα) με την έκφραση “Out[αριθμός]=”. Η Mathematica εισάγει αυτόματα τα αποτελέσματα των πράξεων και αριθμεί τις εντολές εισόδου και εξόδου. Με την πληκτρολόγηση του Enter στο φυσικό πληκτρολόγιό μας είτε από την Παλέτα BasicMathAssistant και επιλέγοντας την εντολή Enter, επιτυγχάνεται η ενεργοποίηση ενός κελιού και κατ’ επέκταση η εμφάνιση των ανωτέρω εκφράσεων. Το αποτέλεσμα μιας πράξης – εντολής εισόδου δίνεται αν πληκτρολογήσουμε Shift και Enter στο φυσικό μας πληκτρολόγιο.

Στην εικόνα 2 έχουμε εισάγει στο βιβλίο εργασίας τον αριθμό 7, έχουμε πληκτρολογήσει το Shift και Enter και βλέπουμε πως η Mathematica μας έφερε ως αποτέλεσμα τον ίδιο αριθμό 7. Δεξιά, φαίνεται από τις μπλε αγκύλες η ενεργοποίηση των δυο κελιών καθώς και η μεγαλύτερη αγκύλη που δείχνει την σχέση των δυο αυτών εντολών. Παρακάτω, εισάγοντας την εντολή 7+4 και ακολουθώντας ένα από τα δυο βήματα για την εντολή Enter θα έχουμε το αποτέλεσμα 11 και την ενεργοποίηση των κελιών δεξιά (μπλε αγκύλη).

Zoom

Για να αυξήσουμε τον βαθμό εστίασης στην οθόνη μας, το notebook ή τις παλέτες μας πηγαίνουμε με το ποντίκι του υπολογιστή δεξιά και κάτω στην οθόνη μας και κάνοντας αριστερό κλικ επιλέγουμε το ποσοστό μεγέθυνσης που μας βολεύει. (εικόνα 3)



εικόνα

3

1.2 Οι βασικές πράξεις της Αριθμητικής

Όπως στην Μαθηματική Επιστήμη έτσι και στο Mathematica έχουμε την δυνατότητα να εκτελούμε πράξεις με αριθμούς. Οι κατηγορίες των αριθμών με τους οποίους πραγματοποιεί αριθμητικές πράξεις το Mathematica είναι οι εξής:

1. Ακέραιοι
2. Ρητοί αριθμοί
3. Δεκαδικοί
4. Μυγαδικοί αριθμοί. Το σύμβολο για την μυγαδική μονάδα ρίζα-1 είναι το I .

Επιπλέον είναι δυνατή οποιαδήποτε απεικόνιση συμβόλων των πράξεων. Τα σύμβολα αυτά καλούνται **τελεστές** και απεικονίζονται στον πίνακα 1.2.1. Με τους μαθηματικούς τελεστές εκτελούνται οι γνωστές αριθμητικές πράξεις. (Αθανασίου, Αθήνα, 2007)

Οι **τελεστές σύγκρισης** με την χρήση των οποίων γίνεται διερεύνηση της αποτελεσματικής σχέσης μεταξύ δύο ποσοτήτων π.χ. “μικρότερο ή ίσο”, “μεγαλύτερο από” ή “ίσο με” χρησιμοποιούνται και στο Mathematica. Επιπλέον, μια εντολή σελ.

10

μπορεί να περιλαμβάνει παρενθέσεις (), μαθηματικά σύμβολα και αγκύλες [], όπως

ακριβώς χρησιμοποιούνται στην Άλγεβρα. Τα σύμβολα αυτά μπορούμε είτε να τα εισάγουμε χειροκίνητα είτε να τα εισάγουμε με την χρήση της επιλογής Παλέτες (Palettes), όπως θα δούμε στην συνέχεια. Ο Πίνακας που ακολουθεί δείχνει τους βασικούς και περισσότερους τελεστές και σύμβολα και τι ακριβώς αυτά συμβολίζουν.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΙ ΤΕΛΕΣΤΕΣ	ΠΡΑΞΗ	ΤΕΛΕΣΤΕΣ ΣΥΓΚΡΙΣΕΩΣ	ΠΡΑΞΗ
+	Πρόσθεση	=	Ίσον (σύγκριση)
-	Αφαίρεση	<	Μικρότερο
*	Πολλαπλασιασμός	<=	Μικρότερο ή ίσον
/	Διαίρεση	>	Μεγαλύτερο
^	Δύναμη	>=	Μεγαλύτερο ή ίσον
=	Ίσον	!=	Όχι ίσο
!	Παραγοντικό		

Πίνακας 1.2.1

Με τα πλήκτρα Shift-Enter ή απλά με Enter από το αριθμητικό πληκτρολόγιο εισάγονται εντολές για επεξεργασία στο Mathematica . Όταν λέμε Shift-Enter εννοούμε την ταυτόχρονη πληκτρολόγηση των δύο πλήκτρων. Η εντολή αποστέλλεται στον πυρήνα (Kernel) μέσω ενός πρωτοκόλλου επικοινωνίας που καλείται **Mathlink**. Η επεξεργασμένη πληροφορία θα φύγει, από τον πυρήνα αυτή την φορά, και θα εμφανιστεί στο notebook ή βιβλίο εργασίας μας. Η εισροή In έχει ως επακόλουθη την εκροή Out, τα αποτελέσματα της οποίας μπορούν να χρησιμοποιηθούν ξανά στην συνέχεια των πράξεων. Οι εντολές In[x] και Out[x] εισάγονται αυτόματα στο notebook με την πληκτρολόγηση από τον χρήστη αριθμών και πράξεων μεταξύ αυτών. Μια απλή αριθμητική πράξη μεταξύ φυσικών αριθμών εκτελείται με την πληκτρολόγηση των αριθμών και του μεταξύ τους συμβόλου και το αποτέλεσμα δίνεται με την ταυτόχρονη πληκτρολόγηση των Shift και Enter ή απλά με το Enter το οποίο συνεπάγεται αμέσως αλλαγή γραμμής.

Άσκηση 1

Να εισάγετε στο mathematica την εντολή $2+7$ Shift&Enter = 9

Επίλυση

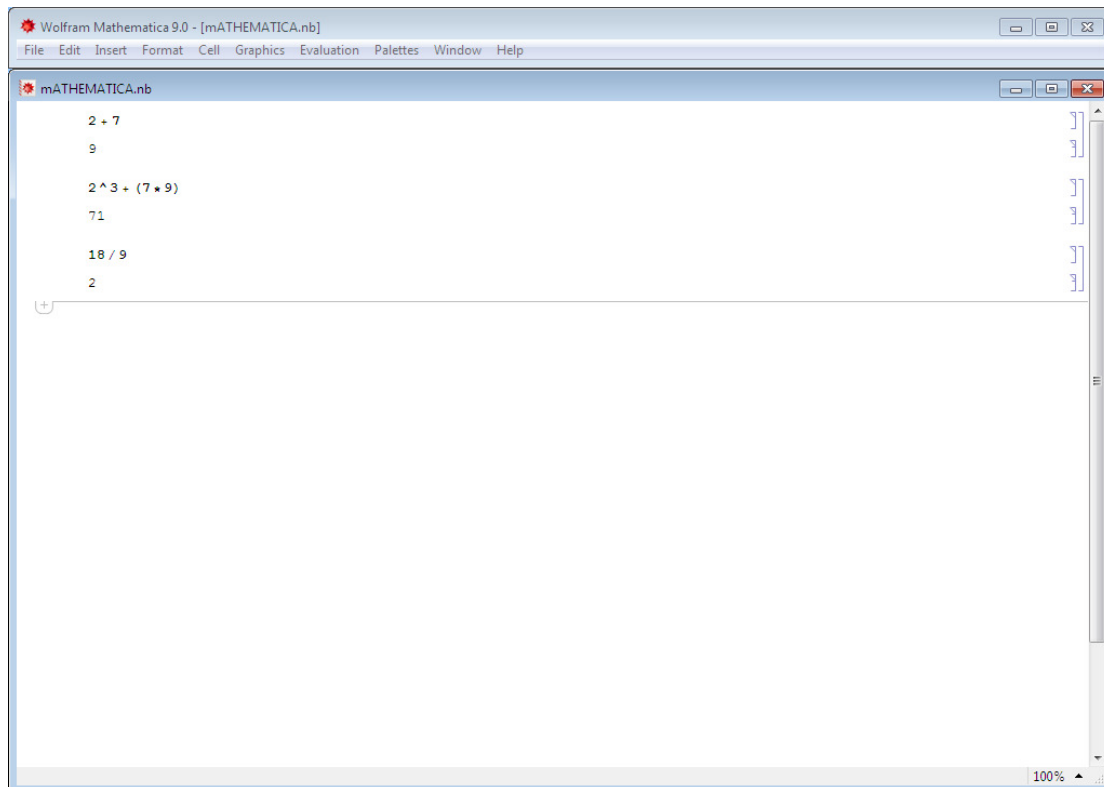
Η εικόνα που μας εμφανίζεται κατά την εκτέλεση της εντολής αυτής είναι:

In[1]:= 2 + 7

Out[1]= 9 (εικόνα 4)

Το Mathematica δίνει το αποτέλεσμα των εντολών και ταυτόχρονα αριθμεί τις εντολές εισόδου και εξόδου κατά σειρά εισαγωγής.

Στην εικόνα 1 απεικονίζονται πράξεις μεταξύ φυσικών αριθμών όπως πρόσθεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση, δύναμη.



εικόνα

4

Τελεστές Σύγκρισης <, >, ==.

Οι τελεστές σύγκρισης χρησιμοποιούνται και στο Mathematica για την σύγκριση δυο ποσοτήτων. Πατώντας τις γνωστές επιλογές μας, Shift και Enter ή απλώς Enter, εξάγεται το αποτέλεσμα True (αληθές) ή False (λάθος, μη αληθές).

παράδειγμα 2

Εισάγοντας στο notebook την εντολή $7 >= 8$ αφενός το Mathematica προσθέτει μπροστά το In[1] π.χ., αφετέρου δε με το Shift και Enter εμφανίζεται το παρακάτω αποτέλεσμα την πράξης που αποστέλλεται στον kernel Out[1]= False (εικόνα 2)

Αν πειραματιστούμε και με άλλες πράξεις στο notebook μας θα πάρουμε τα ανάλογα αποτελέσματα.

Άσκηση 2

Επίλυση

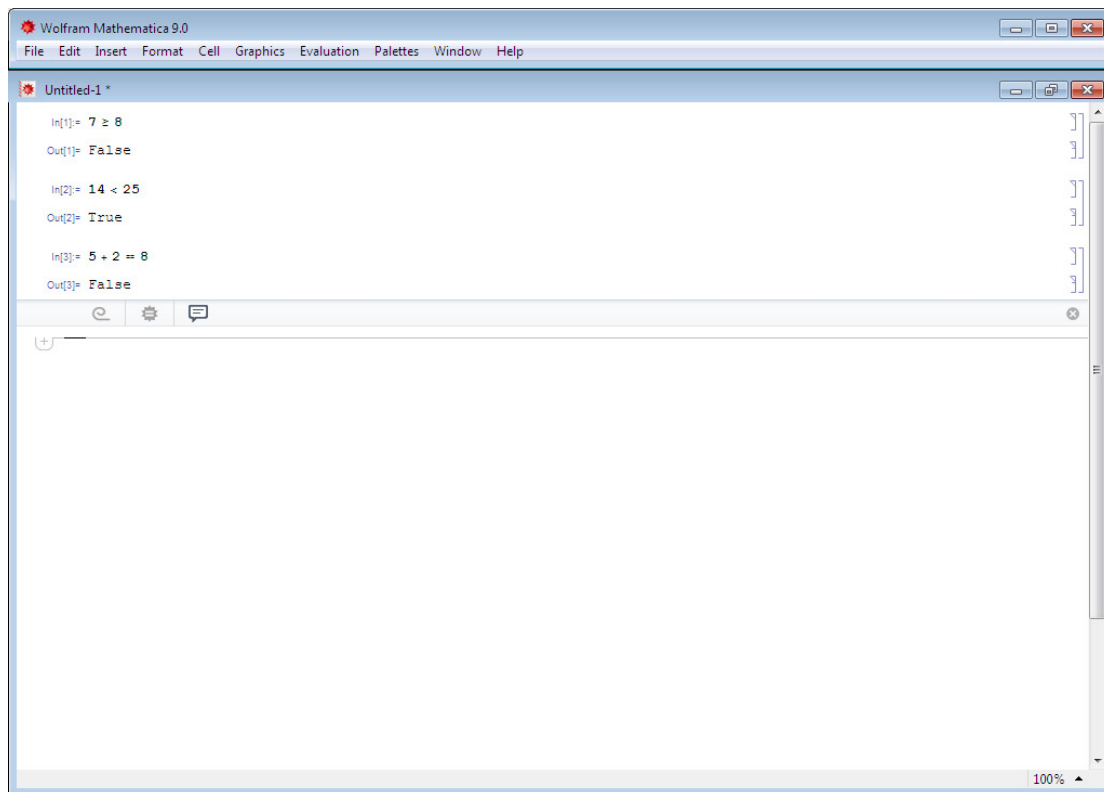
Σας ζητείται να εισάγετε στο mathematica τις παρακάτω εντολές:

In[2]:= $14 < 25$

Out[2]= True

In[3]:= $5 + 2 == 8$

Out[3]= False (εικόνα 5)



εικόνα

5

Το σύμβολο % και η Έκφραση $N[\text{expression}]$

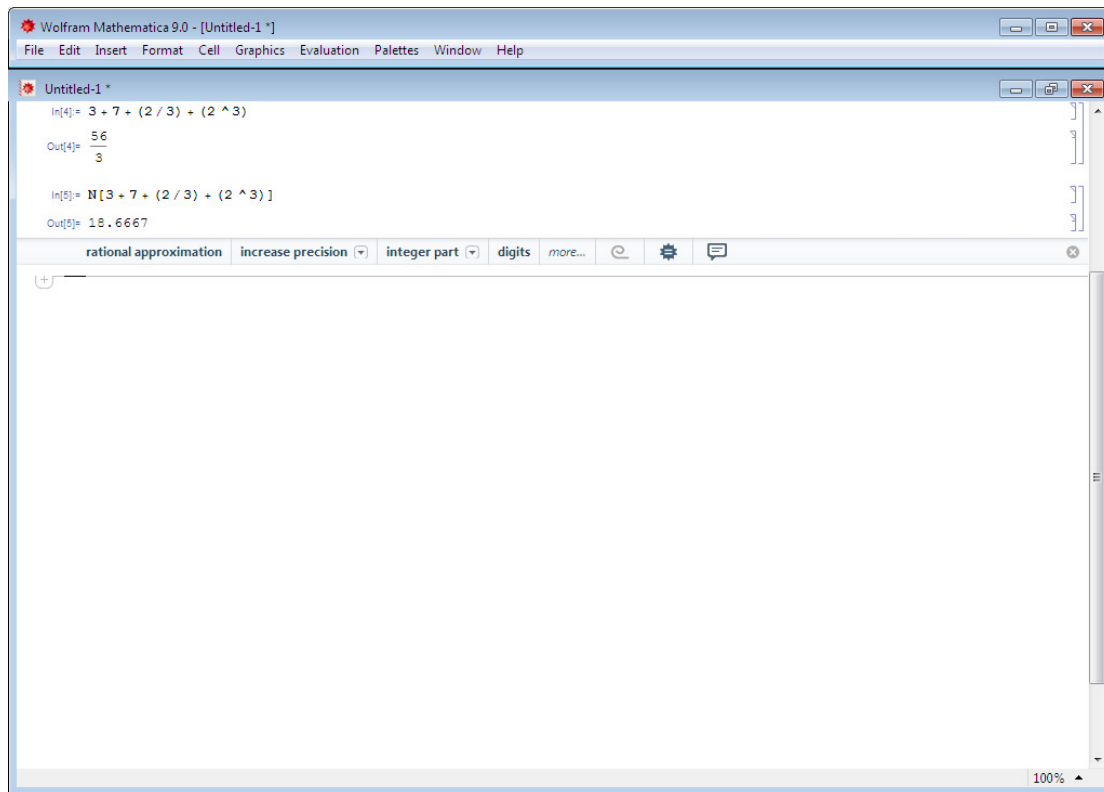
Σε οποιαδήποτε νέα εισροή μας π.χ. In[3] μπορούμε να προσθέσουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα μιας πράξης π.χ. Out[2] ή το Out[1]. Για να γίνει αυτό χρησιμοποιούμε το σύμβολο τοις εκατό (%) για το προηγούμενο αποτέλεσμα στην νέα εντολή που δίνουμε στο Mathematica, δυο φορές το ίδιο σύμβολο %% για το προ-προηγούμενο αποτέλεσμα και ούτω καθ' εξής για την προηγούμενη εντολή που θέλουμε να συμπεριλάβουμε στην επόμενη, νέα πράξη μας. (Γ. Θεοδώρου, Χρ. Θεοδώρου, 2004)

Έστω ότι έχουμε μια εισροή In[] := $3+7+(2/3)+(2 \wedge 3)$

Η εκροή Out[] = θα έπρεπε να μας δίνει το αποτέλεσμα 18.6666666667

Παρατηρούμε ότι το Mathematica φέρνει το αποτέλεσμα σε κλασματική μορφή: $56/3$ αποτέλεσμα το οποίο ισούται με 18,67. Πάνω από τον αριθμό 6 τοποθετείται στα μαθηματικά μια παύλα η οποία συμβολίζει πως ο αριθμός 6 επαναλαμβάνεται πολλές φορές πριν το νούμερο 7.

Το Mathematica φέρνει το αποτέλεσμα σε μορφή κλάσματος διότι έχει ως αποτέλεσμα μιας πράξης μπορεί να εμφανίσει μέχρι 16 αριθμούς. Για να μας απεικονίσει το Mathematica το αποτέλεσμα της πράξης σε δεκαδικό αριθμό πρέπει να δώσουμε την εντολή σε αγκύλη [...] και να πληκτρολογήσουμε N (αγγλικό) μπροστά από την αγκύλη όπως δείχνει η εικόνα 6.



εικόνα

6

1.3 Παλέτες – Palettes

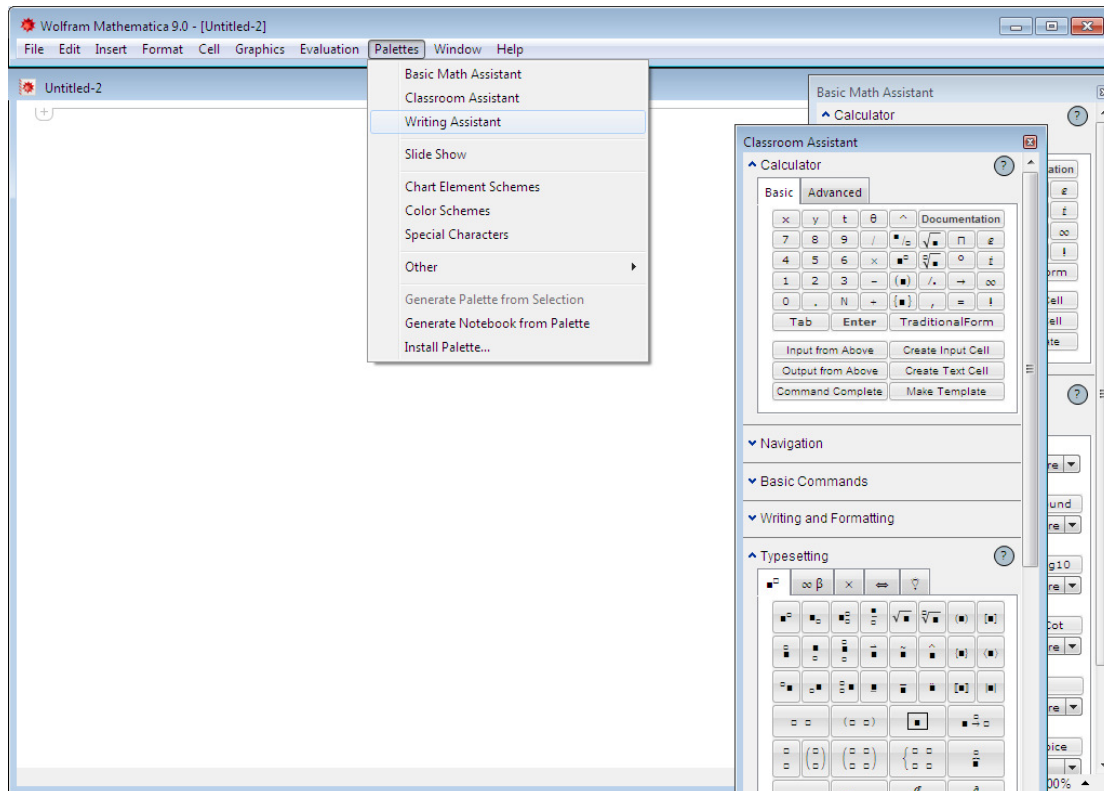
Το Mathematica είναι μια έξυπνη γλώσσα προγραμματισμού στην οποία όμως ο χρήστης πρέπει να πληκτρολογεί σωστά τις εντολές αλλιώς η εντολή-πράξη δεν θα φέρει αποτέλεσμα αλλά προειδοποιητικές ενδείξεις που πληροφορούν τον χρήστη ότι η σύνταξη της εντολής του είναι λαθεμένη. Για εξοικονόμηση χρόνου και σωστά αποτελέσματα το Mathematica περιλαμβάνει τις Παλέτες – Palettes.

Προκειμένου να εκτελεστεί σωστά μια πράξη στο Mathematica πρέπει ο χειριστής να συντάξει σωστά την επιθυμητή εντολή. Σε αντίθετη περίπτωση ξεκινάει μια σειρά διερευνητικών ερωτήσεων από το πρόγραμμα ούτως ώστε να διαγνωστεί το λάθος. Για να είναι το πρόγραμμα πιο εύχρηστο και να αποφεύγονται τέτοια λάθη, το Mathematica διαθέτει *παλέτες* που περιλαμβάνουν τις πιο χρήσιμες εντολές και σύμβολα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ορθή σύνταξη της εντολής.

Τα βήματα είναι τα ακόλουθα: Επιλέγουμε την καρτέλα File→Palettes και κάνοντας κλικ με το ποντίκι μας σε μια από αυτές προκαλούμε την εμφάνιση στην οθόνη μας, των εργαλείων που περιέχει. Στο WolframMathematica 9.0.0 με το οποίο θα ασχοληθούμε, βρίσκουμε τις παλέτες σε δική τους ανεξάρτητη καρτέλα στην κορυφή της οθόνης μας με το όνομα Palettes. Κάνοντας αριστερό κλικ πάνω στην ονομασία Palettes ανοίγει μια λίστα και βρίσκουμε τις BasicMathAssistant, ClassroomAssistant και WritingAssistant. Στο WolframMathematica 9.0.0 βρίσκουμε τις τρεις ανωτέρω παλέτες απευθείας στην λίστα. Παρακάτω στην ίδια λίστα φέρνουμε το ποντίκι στην επιλογή “Other” η οποία μας ανοίγει αυτόματα δεξιά ένα παράθυρο. Σε αυτό

βρίσκουμε τις τρεις βασικές παλέτες που βρίσκουμε και σε άλλες εκδόσεις του mathematica:

1. Algebraic Manipulation
2. Basic Math Input
3. Basic Typesetting



εικόνα

7

1.4 Βασικές Συναρτήσεις

Οι σταθερές και οι συναρτήσεις της Mathematica ξεκινούν πάντοτε με κεφαλαίο γράμμα και πάντοτε στην Αγγλική Γλώσσα (π.χ. N). Το γράμμα N προέρχεται από την αγγλική λέξη numeric και συμβολίζει εσωτερική συνάρτηση. Όσον αφορά τις δεύτερες, το λογισμικό μας ενσωματώνει έτοιμες τις μαθηματικές συναρτήσεις που θα χρειαστεί ο χρήστης, όπως δείχνει ο Πίνακας 1.3.1. Ο παρακάτω πίνακας απεικονίζει τις κατά πλειοψηφία χρησιμοποιούμενες συναρτήσεις (βασικές). Στις δεύτερη και τρίτη στήλες παρουσιάζεται η εκάστοτε μαθηματική εντολή στο Mathematica και ο τρόπος εισαγωγής μιας συναρτήσεως με την χρήση της παλέτας του λογισμικού. (Γ. Αθανασίου, Αθήνα, 2007)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ	ΕΚΦΡΑΣΗ ΣΤΟ MATHEMATICA	ΠΑΛΕΤΑ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ
$ x $ απόλυτη τιμή	Abs[x]	-
Τετραγωνική ρίζα αριθμού x	Sqrt[x]	Τετραγωνική ρίζα (x)
e^x	Exp[x]	Exp[]
$\ln_e x$	Log[x]	Log[]
$\ln_a x$	Log[a,x]	Log[10,]
$\eta\mu(x)$	Sin[x]	Sin[]
$\sigma\upsilon\nu(x)$	Cos[x]	Cos[]
$\epsilon\phi(x)$	Tan[x]	Tan[]
τοξ $\eta\mu(x)$	ArcSin[]	ArcSin[]
τοξ $\sigma\upsilon\nu(x)$	ArcCos[x]	ArcCos[]
τοξ $\epsilon\phi(x)$	ArcTan[x]	ArcTan[]
$n!$	Factorial [n] ή n!	-
Τυχαίοι Αριθμοί	Random	-

Πίνακας 1.3.1

Σημείωση Όταν βλέπουμε στα κεφάλαια τις εντολές In[1] και Out[1] σημαίνει πως έχουμε ανοίξει νέο βιβλίο εργασίας – notebook για αυτόν τον λόγο και οι εντολές αριθμούνται αναλόγως, ξεκινώντας από το νούμερο 1. Δεν είναι απαραίτητο το άνοιγμα νέου βιβλίου εργασίας ωστόσο τυχόν ίδια αρίθμηση στις εντολές εισόδου & εξόδου δεν θα πρέπει να συγχέονται ή να θεωρούνται ως αντικατάσταση των προηγούμενων.

1.5 Προσεγγιστικοί Υπολογισμοί

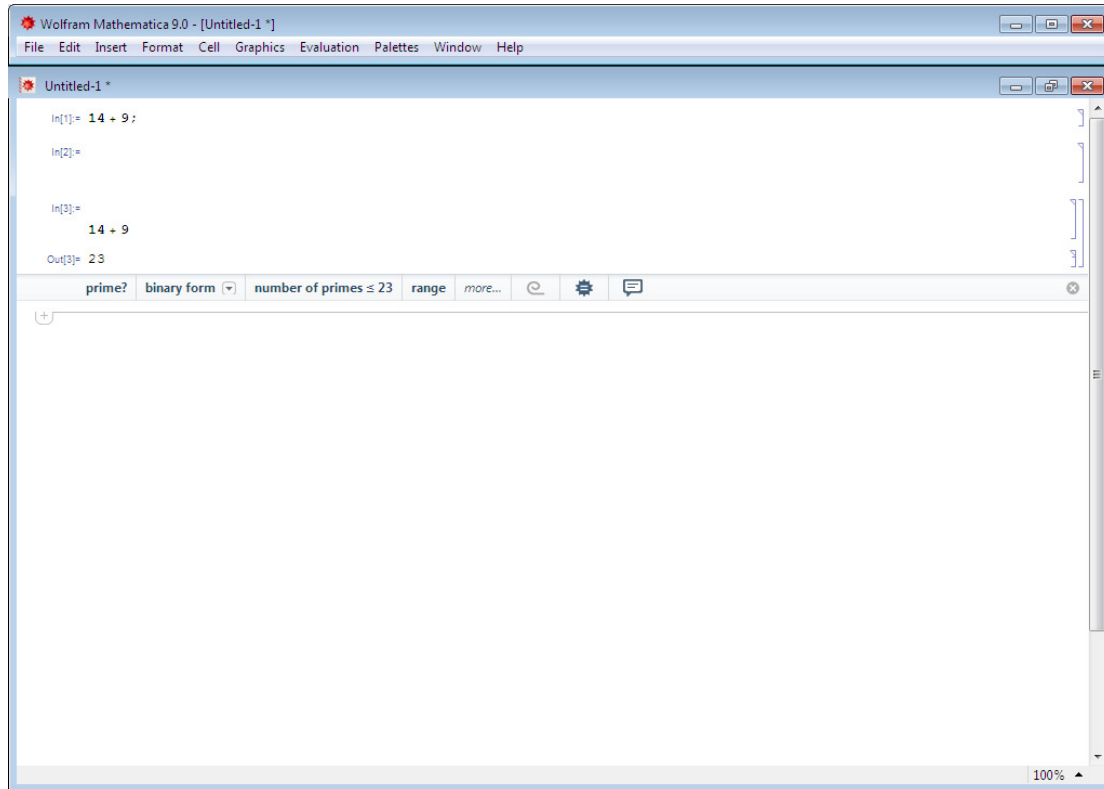
Όταν μια εντολή φέρει στο τέλος της το σύμβολο παύσης του Αγγλικού Αλφαβήτου (;) ή αλλιώς ελληνικό ερωτηματικό αυτό σημαίνει ότι το αποτέλεσμα της εντολής δεν εμφανίζεται στην οθόνη. Τα αποτελέσματα της πράξης ωστόσο μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε επόμενες εντολές. (BoutsikasM.V., 2004-2008)

Άσκηση 3

Να εισάγετε στο mathematica τις παρακάτω εντολές:

14+9; Shift →Enter

In[x] := 14+9; (εικόνα 8)



εικόνα

8

Η επιλογή αυτή χρησιμοποιείται όταν το αποτέλεσμα είναι ιδιαίτερος εκτεταμένο και δεν μπορεί ή δεν επιθυμούμε να περιληφθεί αυτούσιο στην οθόνη μας, όπως στην περίπτωση ενός (οικονομετρικού) πίνακα μεγάλων διαστάσεων. Στην εικόνα 1.4.1 βλέπουμε την διαφορά της απεικόνισης ενός συνόλου πράξεων με και χωρίς την παύση στο τέλος. Η επιλογή αυτή χρησιμεύει όταν θέλουμε να απεικονιστεί οποιαδήποτε μαθηματική πράξη ή πίνακας μεγάλων διαστάσεων αλλά το αποτέλεσμα με λεπτομέρειες δεν είναι απαραίτητο να απεικονιστεί.

Σε αυτό το σημείο, κρίνεται απαραίτητο να υπενθυμίσουμε πως στο Mathematica μπορούμε να υπολογίζουμε πράξεις με αριθμούς οποιασδήποτε κατηγορίας (ακεραίους, μιγαδικούς) και να συμπεριλαμβανουμε οποιαδήποτε αλγεβρικά σύμβολα επιθυμούμε όπως αυτά παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.2.1.

Άσκηση 4

Να εισάγετε στο mathematica τις παρακάτω αριθμητικές πράξεις.

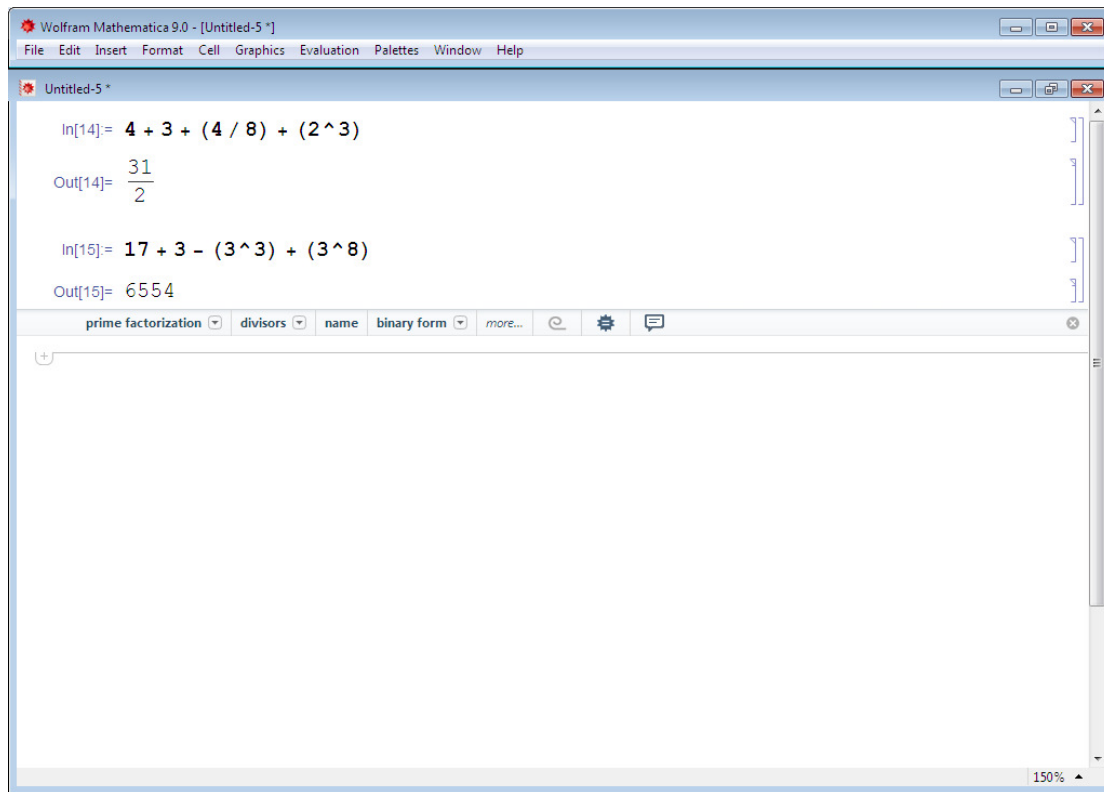
In [14] := 4+3+(4/8)+(2^3)

Out [14] := 31/2 = 15,50

In [15] := 17+3-(3^3)+(3^8)

Out [15] := 6.554

Επίλυση (εικόνα 9)



εικόνα

9

Παρατηρούμε ότι στις εντολές In[14] και In[15], τα αποτελέσματα δεν υπολογίζονται υπό την μορφή δεκαδικών αριθμών αλλά σε ρητά κλάσματα, **επακριβώς**. Αυτό συμβαίνει όταν σε μια εντολή υπάρχουν μόνο ρητοί και ακέραιοι αριθμοί και περιλαμβάνονται τα γνωστά μας αλγεβρικά σύμβολα, τότε το Mathematica υπολογίζει το εκάστοτε αποτέλεσμα επακριβώς. Σε περίπτωση που η εντολή περιλαμβάνει και δεκαδικούς αριθμούς το λογισμικό μας υπολογίζει το αποτέλεσμα σε μορφή δεκαδικού αριθμού δηλαδή **προσεγγιστικά**. Π.χ. 33.4444

Σημείωση Σύμφωνα με τον διεθνή συμβολισμό, το σύμβολο της υποδιαστολής είναι η τελεία (.) και όχι το κόμμα (,).

Το mathematica εκτελεί πράξεις επακριβώς, διατηρώντας την μορφή της πράξης την οποία ο χρήστης εισάγει. Διατηρεί δηλαδή την συμβολική μορφή με στόχο την μέγιστη δυνατή ακρίβεια στους υπολογισμούς. (Αθανασίου, Αθήνα, 2007)

Άσκηση 5

Να απεικονιστούν στο mathematica οι παρακάτω πράξεις με την χρήση παλέτας του προγράμματος.

α. $\frac{2}{3}$

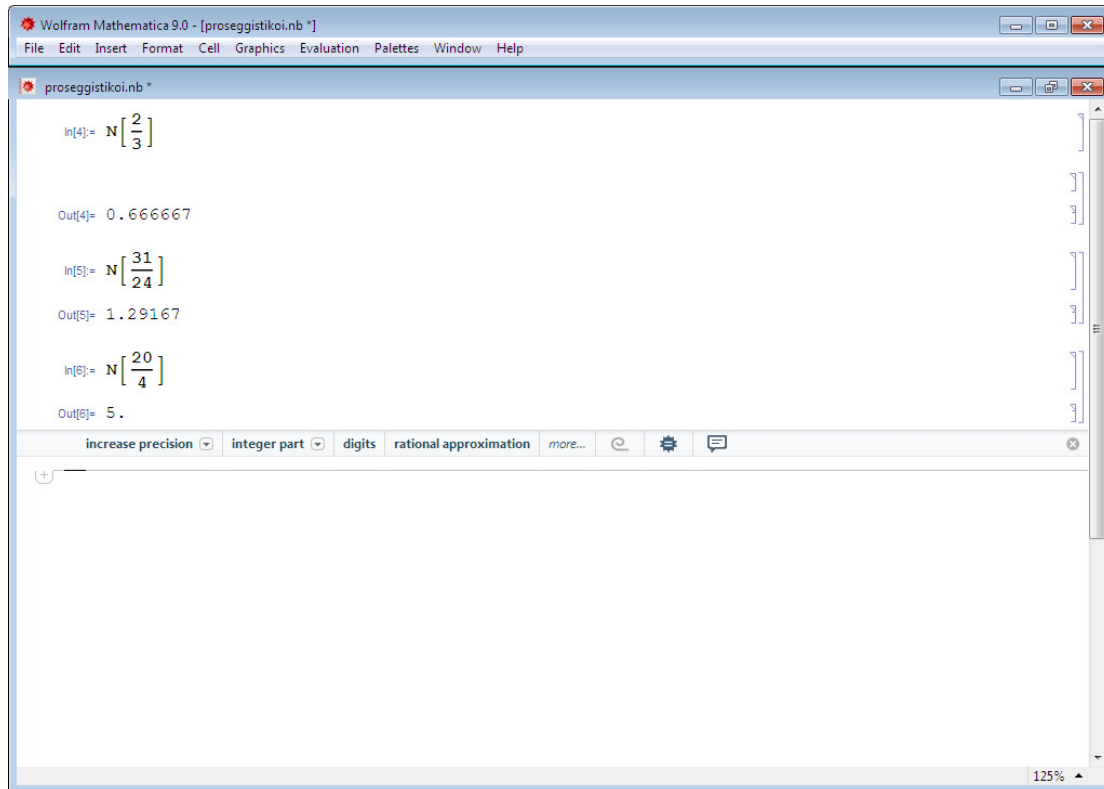
β. $\frac{31}{24}$

γ. $\frac{20}{4}$

Επίλυση

Για τον υπολογισμό των παραπάνω κλασμάτων θα χρησιμοποιήσουμε την παλέτα

ClassroomAssistant και τις καρτέλες BasicCommands και Typesetting από τις οποίες θα εισάγουμε την έκφραση $N[\text{expression}]$ και θα αντικαταστήσουμε το εσωτερικό της αγκύλης με το σύμβολο του κλάσματος. Πληκτρολογούμε τους αριθμούς στην θέση των boxes και αποστέλλουμε την εντολή στον πυρήνα – kernel με Shift και Enter από το φυσικό μας πληκτρολόγιο. (εικόνα 10)

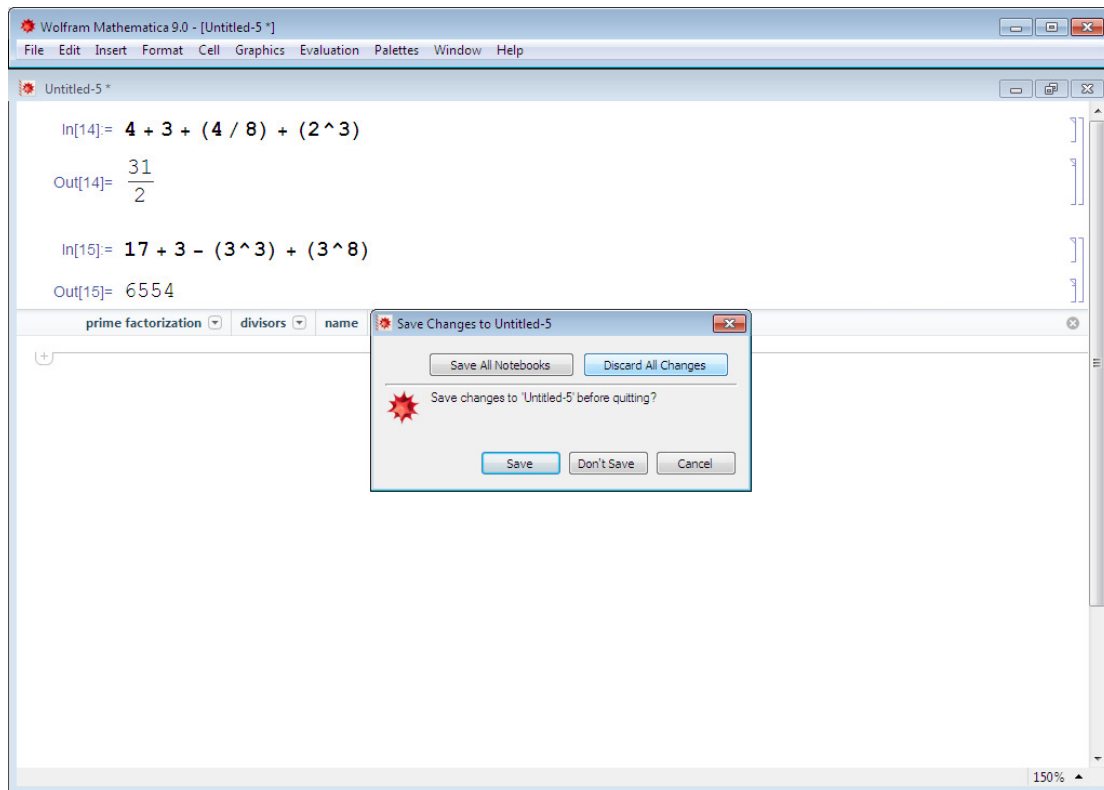


εικόνα

10

Διαγραφή τιμών ή Ολική Διαγραφή

Από την Μνήμη του Mathematica μπορούμε να διαγράψουμε επιλεκτικές τιμές ακόμα και να καθαρίσουμε πλήρως την μνήμη της από πράξεις, παραμέτρους και δοθείσες εντολές προς και από τον πυρήνα (kernel). Πατώντας το δεξί κόκκινο πλήκτρο στην οθόνη μας κλείνουμε το πρόγραμμά μας. Παρατηρούμε την επιλογή: Discardallchanges (εικόνα 10). Με αυτήν την επιλογή θα κλείσει το WolframMathematica 9.0.0 εντελώς και για να ανοίξουμε νέο βιβλίο εργασίας θα χρειαστεί να ανοίξουμε ξανά το πρόγραμμα από την λίστα στην Έναρξη ή από την επιφάνεια εργασίας του υπολογιστή μας.



εικόνα

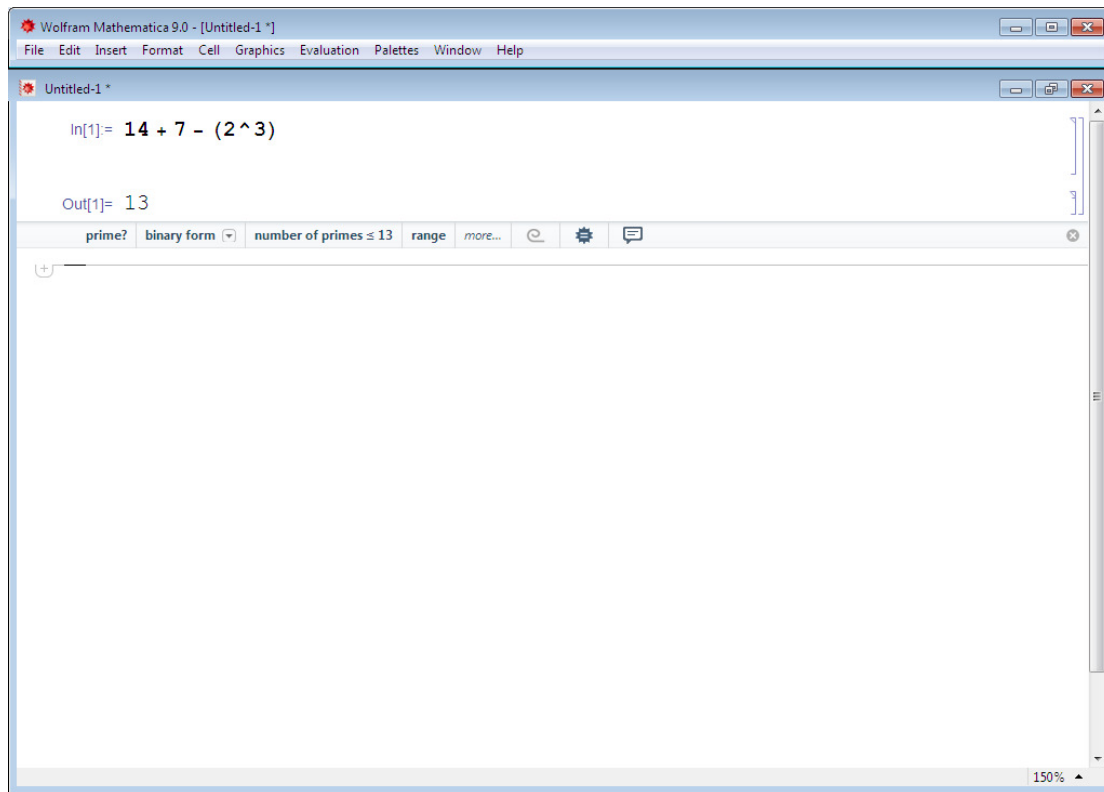
11

Ανοίγοντας ξανά το πρόγραμμα και κάνοντας Open→Notebook δηλαδή ανοίγοντας νέο βιβλίο εργασίας, παρατηρούμε στην αριστερή επάνω γωνία τον τίτλο του notebook μας: Untitled-1 (εικόνα 11)

Έστω ότι πληκτρολογούμε την πράξη $14+7-(2^3)$. Το αποτέλεσμα που θα έρθει από τον kernel μας είναι: $\text{In}[1]:= 14+7-(2^3)$

$\text{Out}[1]= 13$

Οι εντολές εισόδου και εξόδου που αριθμούνται από το νούμερο 1, δηλαδή πάλι από την αρχή, αποδεικνύουν πως όλα τα υπάρχοντα αποθηκευμένα βιβλία εργασίας διαγράφηκαν. (εικόνα 12)



εικόνα

12

Ένα βασικό θέμα αποτελούν οι επιλογές διαγραφής τιμών. Γενικά, όλες οι προγενέστερες εντολές και πράξεις αποθηκεύονται στην μνήμη του Mathematica και μπορούν να χρησιμοποιούνται σε μελλοντικές πράξεις με την χρήση του συμβόλου “τοίς εκατό” (%). Το λογισμικό θεωρεί πως δίνοντας ο χρήστης μια τιμή σε κάποια μεταβλητή θέλει η μεταβλητή αυτή να έχει μόνιμα την δοθείσα τιμή. Έτσι, εάν πληκτρολογήσουμε $x=15$ το Mathematica σε επόμενη πράξη που θα περιλαμβάνει τον “x” θα υπολογίζει την τιμή που έχουμε δώσει στον “x” αυτόματα.

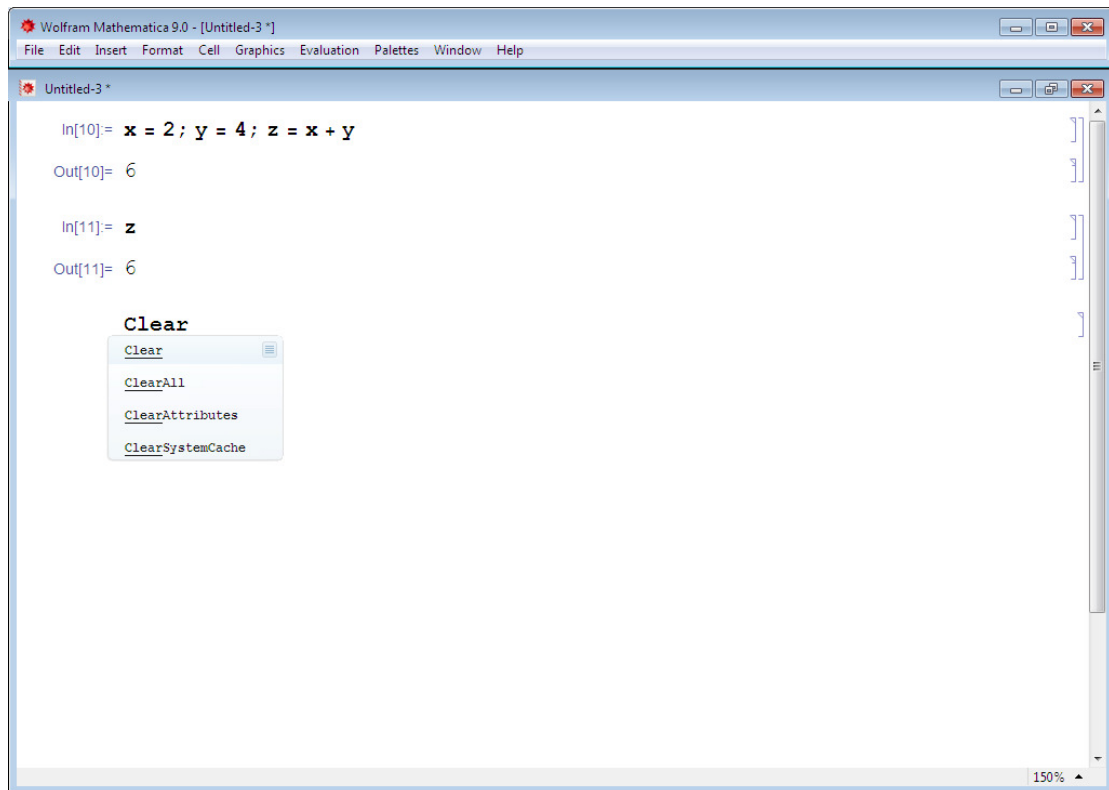
Για τον λόγο αυτό ο χρήστης πρέπει να δίνει σαφείς εντολές και να διαγράφει αριθμητικές τιμές που δεν του χρειάζονται στις επόμενες πράξεις. Για να καταργηθεί η τιμή μιας μεταβλητής, έστω x, που έχουμε χρησιμοποιήσει προηγουμένως πληκτρολογούμε

```
Clear[x]
```

Στην θέση του x πληκτρολογούμε την μεταβλητή που μας ενδιαφέρει.

Εισάγω στο notebook την εντολή $x=2; y=4; z=x+y$

Μόλις πληκτρολογήσω στο notebook την λέξη Clear από το φυσικό πληκτρολόγιο, το Mathematica μας εμφανίζει μια λίστα με ενεργές τις επιλογές Clear, ClearAll, ClearAttributes, ClearSystemCache (εικόνα 13)

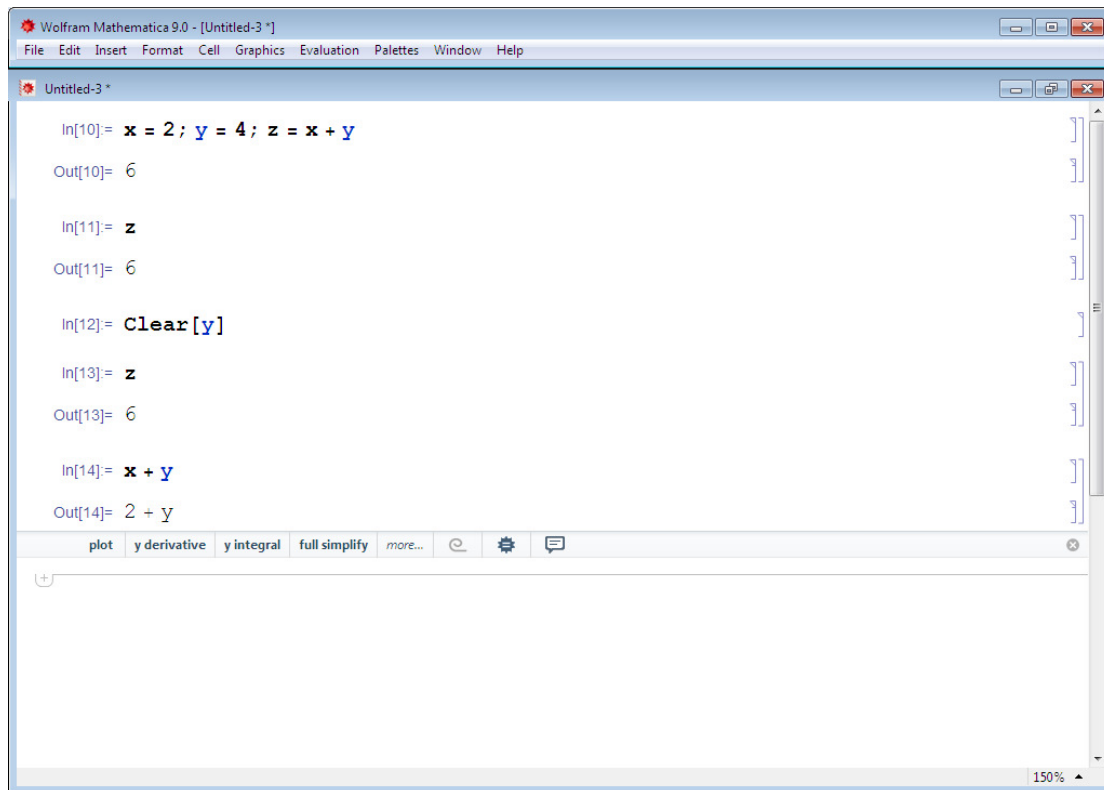


εικόνα

13

Επιλέγω την επιλογή Clear, βάζω τις αγκύλες και ανάμεσά τους την μεταβλητή την τιμή της οποίας θέλω να καταργήσω. Τις μεταβλητές μπορώ να τις εισάγω και από την παλέτα ClassroomAssistant→Calculator→Basic.

Έστω ότι πληκτρολογώ Clear[y] και shift&enter. Εισάγοντας την εντολή x+y και shift&enter το αποτέλεσμα θα είναι 2+y, πράγμα που καταδεικνύει πως η τιμή της μεταβλητής y καταργήθηκε (εικόνα 14)



εικόνα

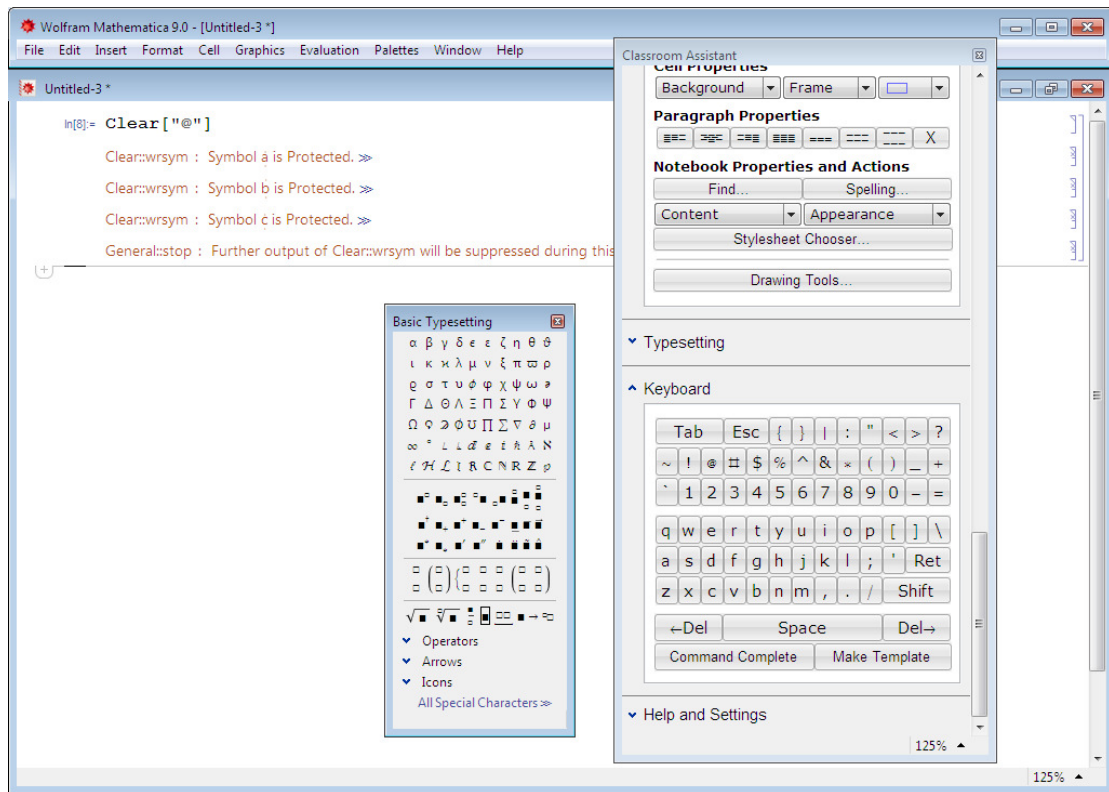
14

Για να διαγραφεί οποιαδήποτε τιμή από την μνήμη εισάγω την εντολή `Clear["@"]` στο notebook του mathematica.

Άσκηση 6

Σας ζητείται να εισάγετε στο mathematica την εντολή πλήρους διαγραφής της μνήμης με την χρήση παλέτας.

Επίλυση (εικόνα 15)

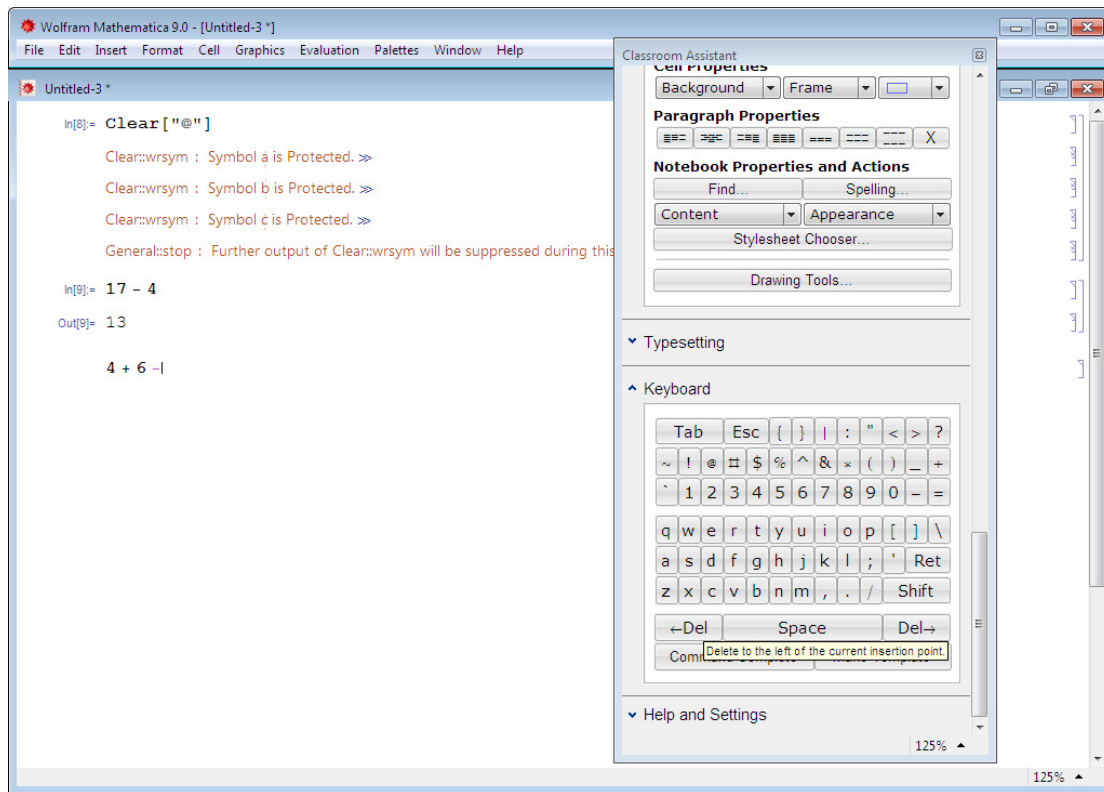


εικόνα

15

Delete ή backspace

Delete ή backspace είναι τα πλήκτρα με τα οποία σβήνουμε ή διαγράφουμε τιμές ή πράξεις. Στο mathematica βρίσκουμε το delete από την παλέτα ClassroomAssistant→Keyboard. (εικόνα 16)



εικόνα

16

1.6 Απόδοση τιμών σε μεταβλητές

Όπως έχουμε προαναφέρει, το λογισμικό Mathematica έχει την δυνατότητα εκτέλεσης πράξεων και με μεταβλητές. Γενικά, ως μεταβλητή ορίζεται ένα σύμβολο το οποίο συνήθως αποδίδουμε με τα τελευταία γράμματα της Αγγλικής ή Ελληνικής αλφαβήτου: x, y, z ή τα ελληνικά χ, ψ, ω . Στην Αγγλική Γλώσσα η μεταβλητή καλείται *variable* η οποία προέρχεται από την λατινική λέξη *variabilis* που σημαίνει ικανός να αλλάξει. Κατανοούμε επομένως πως μια μεταβλητή μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή.

Έστω ότι θέλουμε να δώσουμε μια τιμή στον χαρακτήρα x , π.χ. τον αριθμό 3. Πληκτρολογούμε στο Notebook $x=3$ από το αριθμητικό πληκτρολόγιο και πατάμε Enter. Από εδώ και στο εξής το σύμβολο x θα ισούται με τον αριθμό 3.

παράδειγμα 1

In[1]:=x=3

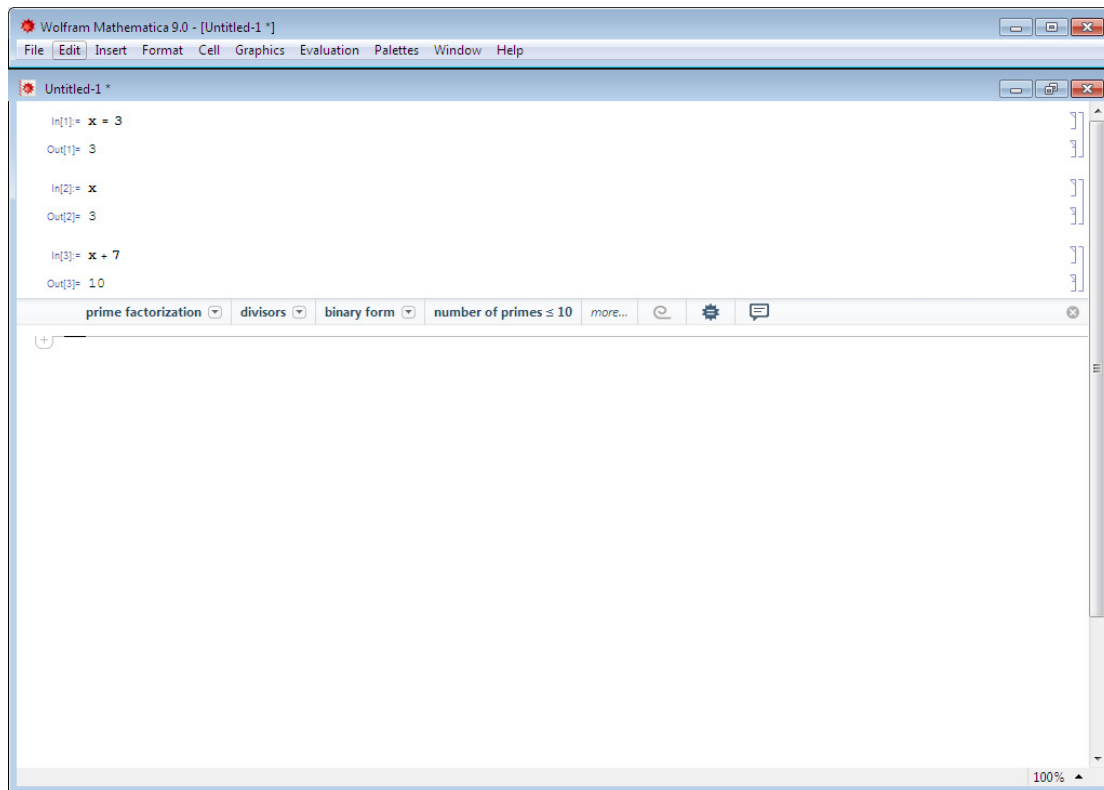
Out[1]=3

In[2]:=x

Out[2]=3

In[3]:=x+7

Out[3]=10 (εικόνα 17)



εικόνα

17

Ο τελεστής (=) καλείται και setoperator και ορίζει ότι το σύμβολο που βρίσκεται αριστερά από αυτόν θα ισούται εφεξής με οποιοδήποτε αριθμό ή σύμβολο βρίσκεται δεξιά από αυτόν (τον τελεστή). Η εντολή αυτή αποθηκεύεται στην Μνήμη του Mathematica για να χρησιμοποιηθεί μελλοντικά. Ο χειριστής πρέπει να προσέξει να μην δώσει το ίδιο όνομα σε δύο μεταβλητές ή συναρτήσεις καθώς το Mathematica στην αμέσως επόμενη εντολή θα χρησιμοποιήσει την πιο πρόσφατη τιμή. Για να μην συμβεί αυτό, εάν δεν μας είναι πλέον χρήσιμες, μπορούμε να καθαρίσουμε την Μνήμη του Mathematica από τις υπάρχουσες δοθείσες τιμές ή συναρτήσεις, επιλέγοντας μια εκ των τριών λύσεων που προσφέρει το πρόγραμμα.

- a. Εντολή `Clear[Χαρακτήρας]`
- b. Εντολή `Unset(=.)`
- c. Αν οι τιμές που θέλουμε να εξαλείψουμε από την Μνήμη είναι περισσότερες της μιας, δίνουμε την εντολή `Clear[Χαρακτήρας1]` επιλέγοντας με αυτόν τον τρόπο όσες θέλουμε να διαγράψουμε από την μνήμη
- d. Αν επιθυμούμε να καθαρίσουμε την Μνήμη από οποιαδήποτε τιμή έχουμε αντιστοιχήσει σε διάφορους χαρακτήρες, δίνουμε την εντολή `Clear["@"]`. Με αυτή την εντολή διαγράφουμε όλες τις υπάρχουσες τιμές και συναρτήσεις από την μνήμη του λογισμικού. (Αθανασίου, 2007)

Η μαθηματική ανάλυση αποτελεί βασικό πεδίο της Επιστήμης των Μαθηματικών. Ιστορικά, η μαθηματική ανάλυση αποτέλεσε το βασικό εργαλείο στην υπηρεσία της Μαθηματικής Φυσικής, πράγμα που συμβαίνει μέχρι και σήμερα. Κλάδοι της αποτελούν οι Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός για τους οποίους θα μιλήσουμε σε επόμενα κεφάλαια.

Κύριο αντικείμενο της μελέτης της ανάλυσης αποτελεί η μελέτη των *συναρτήσεων*. Συνάρτηση, όρια (lim), πραγματικοί αριθμοί, παραγωγισιμότητα και άλλα, είναι μερικές από τις σημαντικότερες έννοιες με τις οποίες ασχολείται η μαθηματική ανάλυση.

Οι συναρτήσεις αποτελούν μεγάλο κομμάτι της επιστήμης των Μαθηματικών και χρονολογούνται από την αρχική προσπάθεια κατανόησης, επεξήγησης και καταγραφής τους, ήδη δηλαδή από τον προ Χριστού αιώνα. Οι πρώτοι που κατάφεραν να καταγράψουν και να αναλύσουν το θέμα των συναρτήσεων, της παραγώγου και της παραγωγισιμότητας επίσημα καθώς και οι λεπτομέρειες των μεθόδων θα αναλυθούν διεξοδικά σε επόμενο κεφάλαιο.

Στο μεγάλο κεφάλαιο των συναρτήσεων έχουμε να κάνουμε με έννοιες και πράξεις αλγεβρικές. Κανένα εμπόδιο δεν θα συναντήσουμε κατά την εκτέλεση των ανωτέρω εντολών στο mathematica, καθώς το λογισμικό μας προσφέρει στον χρήστη ένα πλήρες πακέτο γραφικών και την δυνατότητα δημιουργίας νέων συναρτήσεων και προγραμμάτων που δεν έχουν εξ' αρχής προβλεφθεί. Οι δυνατότητες λοιπόν του χρήστη δεν περιορίζονται στην υπάρχουσα συλλογή προγραμμάτων, συναρτήσεων και εντολών του mathematica αλλά παρέχουν και ελευθερία επιλογών χαρίζοντας στον μελετητή την παραγωγική αυτονομία. Αυτό είναι και ένα από τα σημαντικότερα χαρακτηριστικά μιας γλώσσας προγραμματισμού που θέλει να λέγεται *πλήρης*. Ειδικότερα σε μια εποχή ραγδαίας εξέλιξης της τεχνολογίας και του προγραμματισμού, των υπολογιστικών μέσων και της μεγάλης προσφοράς σε γλώσσες προγραμματισμού το mathematica κρατά τα σκήπτρα όσον αφορά την λειτουργικότητα και τελικά την αποτελεσματικότητα που δικαιώνει την φήμη της. Το χαρακτηριστικό αυτό κατατάσσει το mathematica, ως γλώσσα προγραμματισμού, στην κορυφή από άποψη ευελιξίας και ποιότητας. Τελικά, και προτίμησης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

2.1 Ιστορική αναδρομή

Λογισμός στην επιστήμη των Μαθηματικών ονομάζεται η διαδικασία μελέτης της αλλαγής. Ο Λογισμός αποτελεί σημαντικό κεφάλαιο στην σύγχρονη εκπαίδευση των μαθηματικών καθώς θεωρείται η βάση για την περαιτέρω κατανόηση της μαθηματικής ανάλυσης η οποία περιλαμβάνει την μελέτη θεμάτων όπως όρια και συναρτήσεις. Επιπροσθέτως, η χρήση του σε Επιστήμες πέραν αυτής των Μαθηματικών όπως της Οικονομίας και της Μηχανικής αποδεικνύουν την χρησιμότητα του Λογισμού στην επίλυση θεμάτων που η άλγεβρα από μόνη της δεν μπορεί να επιλύσει.

λίγα λόγια...

Ο Λογισμός απασχόλησε τους μαθηματικούς ήδη από την αρχαιότητα με τους Αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς άνδρες και γυναίκες να θέτουν τα θεμέλια ήδη από τον προ Χριστού αιώνα. Στην συνέχεια την σκυτάλη φαίνεται να παίρνουν και χώρες της Ανατολής όπως η Κίνα, η Ιαπωνία και η Αίγυπτος ενώ και η Γερμανία έχει να επιδείξει έναν αξιόλογο μαθηματικό τον Γκότφριντ Βίλχελμ Λάιμπνιτς του οποίου οι δημοσιεύσεις τον έφεραν αντιμέτωπο με τον Άγγλο Ισαάκ Νεύτωνα ο οποίος τον κατηγορήσε για κλοπή των δικών του σημειώσεων πάνω στο θέμα, τις οποίες και είχε μοιραστεί με μέλη της Βασιλικής Εταιρείας του Λονδίνου. Έρευνες έχουν αποδείξει, ως έναν βαθμό πάντα, πως οι δυο τους ξεκινώντας από διαφορετικό εφαλτήριο την μέθοδό τους κατέληξαν στα εκάστοτε συμπεράσματά τους, ενώ και χρονολογικά έχει αποδειχθεί η παράλληλη ενασχόληση και των δυο με τον Λογισμό πράγμα που καταρρίπτει τις κατηγορίες του Ισαάκ Νεύτωνα για αντιγραφή των δικών του στοιχείων.

Ο Λάιμπνιτς επισημοποίησε τον Λογισμό με δημοσιεύσεις του που προηγήθηκαν εκείνων του Ισαάκ Νεύτωνα και οι οποίες τον καθιέρωσαν αφού χάρη σε εκείνον έχουμε εγγράφως πλέον αρχές του μεγάλου αυτού κεφαλαίου των Μαθηματικών.



Sir Isaac Newton και Gottfried Wilhelm von Leibniz

Ο Λογισμός ιστορικά έχει τον τίτλο «ο λογισμός των απειροελάχιστων» ή «απειροστικός λογισμός». Χωρίζεται σε δυο κλάδους τον Διαφορικό και τον Ολοκληρωτικό Λογισμό.

2.2 Διαφορικός Λογισμός

Ο Διαφορικός Λογισμός αποτελεί έναν εκ των δυο κλάδων του Λογισμού. Ασχολείται με τα ποσοστά των αλλαγών και τις κλίσεις των καμπυλών και μελετά τον ορισμό, τις ιδιότητες και τις εφαρμογές της παραγώγου μιας συνάρτησης. Όταν μιλάμε για παράγωγο συνάρτησης εννοούμε μια διαδικασία κατά την οποία παίρνουμε μια συνάρτηση $f(x)$ και εξάγουμε μια άλλη συνάρτηση π.χ. $g(x)$. Η νέα αυτή συνάρτηση αποτελεί την **πρώτη παράγωγο της συνάρτησης** και συμβολίζεται με απόστροφο π.χ. $f'(x)$. Πρόκειται για μια αφηρημένη διεργασία, εκ των πολλών που μελετώνται σε στοιχειώδη άλγεβρα.

Συχνά διατυπώνεται η άποψη ότι ο Διαφορικός Λογισμός ασχολείται με μια συνεχή ποσότητα, κι όμως μια ερμηνεία αυτής της συνέχειας δεν δίνεται πουθενά. ακόμα και οι πιο αυστηρές μελέτες πάνω στον Διαφορικό Λογισμό δεν στηρίζουν τις αποδείξεις τους πάνω στην συνέχεια, αλλά, με μικρότερη ή μεγαλύτερη συνείδηση αυτού του πράγματος, είτε αναφέρονται σε γεωμετρικές έννοιες ή σ' αυτές που υποδεικνύει η γεωμετρία, ή βασίζονται σε θεωρήματα που ποτέ δεν αποδείχθηκαν με γνήσια αριθμητικό τρόπο. (..)

RichardDedekind

2.3 Αθροίσματα και Γινόμενα

λίγα λόγια . . .

Η Οικονομετρία μελετά δείγματα από την πραγματική ζωή τα οποία συλλέγει η Οικονομική Επιστήμη.

«*Τά πάντα ρεῖ και ουδέν μένει*» φέρεται να έχει πει ο Ηράκλειτος ο Εφέσιος.

Αυτό λοιπόν συμβαίνει και με τις μεταβλητές τις οποίες μελετά η Οικονομική Επιστήμη. Οι καταναλωτικές δαπάνες και το εισόδημα δεν είναι ίδια για όλους στην πραγματική ζωή. Μεταξύ θεωρίας και πράξης υπάρχουν αποκλίσεις-όροι που αναιρούν τον κανόνα. Αυτές τις αποκλίσεις μελετάει η Οικονομετρία ως επιστήμη. Ο παράγοντας που διαταράσσει τις απόλυτες διατυπώσεις (όλοι, όλα, πάντα κλπ) είναι ο γνωστός στην Οικονομετρία **διαταρακτικός παράγοντας ή τυχαία μεταβλητή που συμβολίζεται με u_t .**

Στο mathematica έχουμε την δυνατότητα απεικόνισης οποιασδήποτε αριθμητικής πράξης. Με την μεγάλη γκάμα δυνατοτήτων που διαθέτει, το λογισμικό μας δίνει την δυνατότητα στον χρήστη να απεικονίσει και οποιαδήποτε μαθηματική πράξη περιλαμβάνει η Οικονομετρία. Το Σ που χρησιμοποιείται ευρύτατα σε ασκήσεις στην Οικονομετρία το βρίσκουμε πηγαίνοντας στην λίστα Palettes. Επιλέγω το ClassroomAssistant, την επιλογή Typesetting και το προτελευταίο κουτάκι που ορίζεται στα αγγλικά ως DefiniteSum. (εικόνα 1)

Στην Οικονομετρία γίνεται ευρεία χρήση του συμβόλου του συνόλου – sum – Σ , π.χ.

$$\sum_{i=1}^n x_i^2$$

πινακάκι 2.3.1

Βασικές σημειώσεις

Το ένα ίσον (=) σημαίνει αντικατάσταση. Τα δυο ίσον (==) σημαίνουν ισότητα. (Αθανασίου, Αθήνα, 2007)

Στο mathematica στην συνάρτηση f(x) το f αποτελεί τον χαρακτήρα1 και το x αποτελεί τον χαρακτήρα2. (Αθανασίου, Αθήνα, 2007)

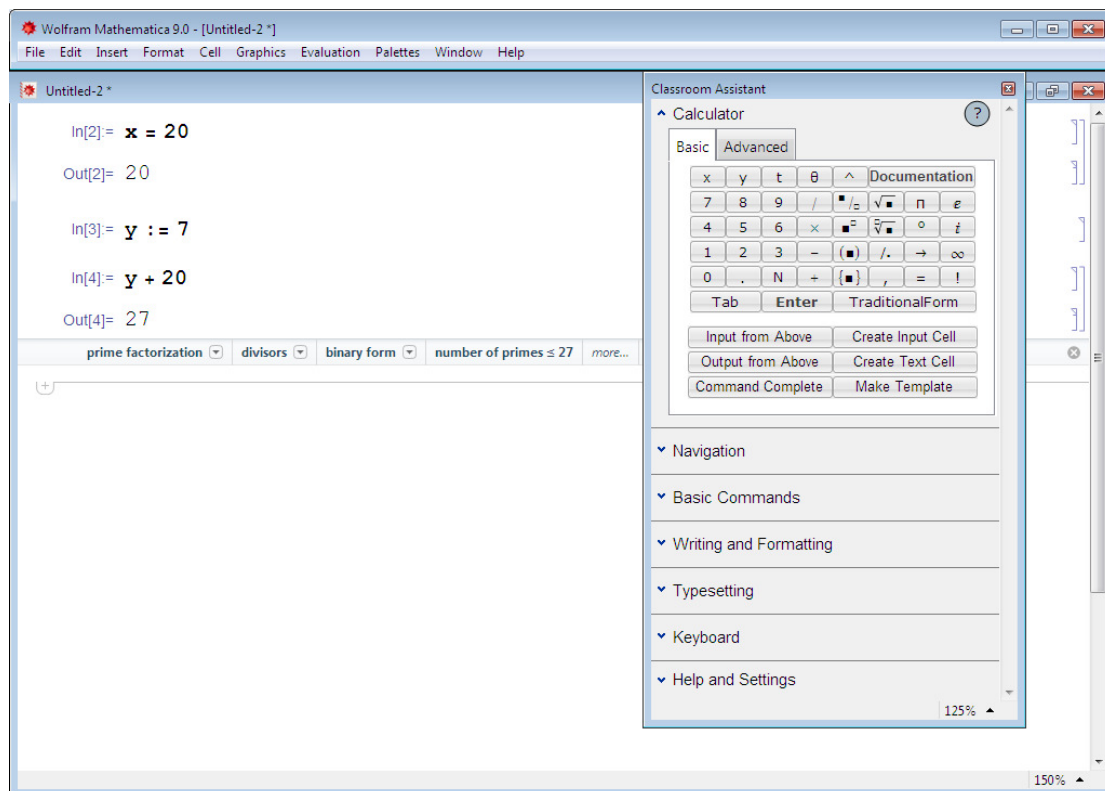
SetDelayedoperator (:=) Έτσι καλείται το συγκεκριμένο σύμβολο - τελεστής του mathematica. Όταν εισάγουμε τον τελεστή αυτόν στο mathematica δεν μας εμφανίζεται εντολή εξόδου *Out[π.χ.5]=κάποιο αποτέλεσμα.* (εικόνα 1) Το δεξί μέρος της πράξης το οποίο δεν εμφανίζεται στο notebook μας θα εμφανιστεί με καθυστέρηση όπως είναι και ο ορισμός της λέξης (set delayed) όταν σε επόμενη εντολή εισόδου εισάγουμε τον χαρακτήρα της αριστερής πλευράς. Τότε θα έχουμε αυτόματη αντικατάσταση της αριστερής πλευράς με την δεξιά. (Αθανασίου, Αθήνα, 2007)

Άσκηση 1

Σας ζητείται να απεικονίσετε στο mathematica το αποτέλεσμα $\text{Out} = 27$ με την χρήση δυο μεταβλητών x και y , χρησιμοποιώντας τον set delayed operator.

Επίλυση

Ανοίγουμε ένα νέο notebook και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εντολή διαγραφής όλων των προηγούμενων τιμών αν το επιθυμούμε. Ύστερα, ανοίγουμε την παλέτα ClassroomAssistant για να εισάγουμε τις μεταβλητές και τον τελεστή από την καρτέλα Keyboard της ίδιας παλέτας που χρειαζόμαστε και έχουμε την διαδικασία εισαγωγής που δείχνει η εικόνα 1, παρακάτω. Παρατηρούμε πως η εντολή $\text{In}[3]:=$ δεν παράγει εντολή εξόδου Out .



εικόνα

1

Άσκηση 2

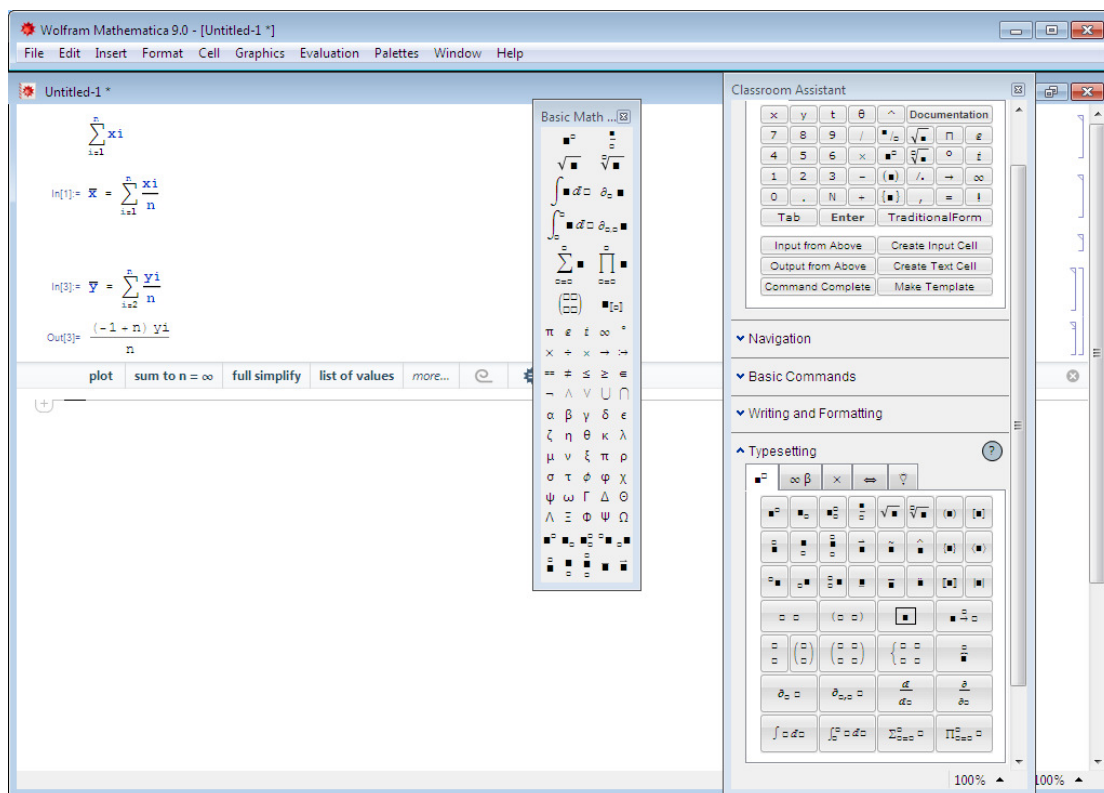
Έστω πως θέλουμε να απεικονίσουμε την ισότητα x μέσος = Σύνολο x_i προς n .

Έστω πως θέλουμε να απεικονίσουμε την ισότητα y μέσος = Σύνολο y_i προς n .

Επίλυση

Για την απεικόνιση του συμβόλου Σ (sum) που χρειάζεται να απεικονιστεί με τον τρόπο που φαίνεται στο πιο πάνω πινακάκι 2.3.1 χρησιμοποιούμε παλέτες. Πηγαίνουμε στην καρτέλα Palettes \rightarrow Other \rightarrow BasicMathInput. Η παλέτα αυτή περιέχει το σύμβολο ολοκληρωμένο στο οποίο αντικαθιστούμε το n , $i=1$, x_i^2 .

Η παλέτα BasicMathAssistant στο κάτω μέρος δεξιά έχει την ένδειξη 100%. Επιλέγοντας αυτή την επιλογή μπορούμε να κάνουμε ζουμ και να μεγαλώσουμε την ανάλυση της παλέτας. Από αυτήν προσθέτω το x και y . Για να απεικονίσω τον x και y μέσους χρησιμοποιώ την παλέτα BasicMathInput και επιλέγω το προτελευταίο εικονίδιο (■) το οποίο φέρει επίσης μια παύλα στο επάνω μέρος. Προτιμώ να πατήσω αμέσως το ίσον (=) και μετά να πάω πίσω να προσθέσω το γράμμα που θέλω για να αποφευχθεί συνέχεια της γραμμής πάνω από το κουτάκι. Κάνω αριστερό κλικ πάνω στο μαύρο τετραγωνάκι και από βάζω το γράμμα που επιθυμώ είτε από το φυσικό μου πληκτρολόγιο είτε επιλέγοντας από τις παλέτες, π.χ. Palettes \rightarrow ClassroomAssistant \rightarrow καρτέλα Calculator \rightarrow Basic. Μετά την προσθήκη και του συμβόλου Σ $i=1$ (π.χ.) κλπ από την παλέτα ClassroomAssistant \rightarrow Typesetting επιλέγω από την παλέτα BasicMathInput το πρώτο δεξιά σύμβολο του κλάσματος και αντικαθιστώ κάνοντας αριστερό κλικ πάνω στις θέσεις των κενών boxes.



εικόνα

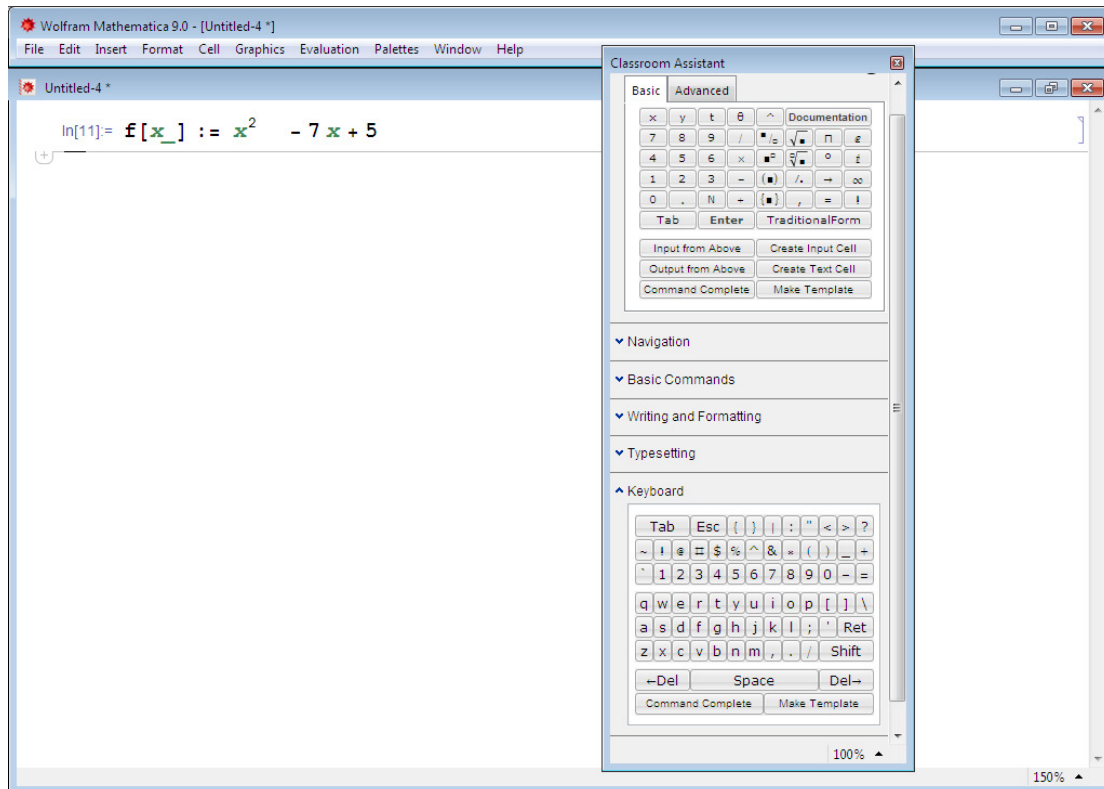
2

Άσκηση 3

Σας ζητείται να εισάγετε στο mathematica την συνάρτηση $f(x) = x^2 - 7x + 5$ με την χρήση παλέτας.

Επίλυση

Ανοίγω νέο βιβλίο εργασίας, αν χρειάζομαι, ανοίγω την παλέτα ClassroomAssistant και από τις καρτέλες Calculator→Basic και Keyboard εισάγω το σύμβολο f της συνάρτησης, το σύμβολο των αγκυλών μέσα στις οποίες εισάγω την μεταβλητή x και τους αριθμούς που με ενδιαφέρουν. Μέσα στις αγκύλες, δεξιά του x εισάγω μια κάτω παύλα η οποία εννοεί πολλαπλασιασμό. Παρατηρούμε πως το mathematica καθορίζει με άλλο χρώμα την μεταβλητή ή Χαρακτήρα_2. (εικόνα 3)



εικόνα

3

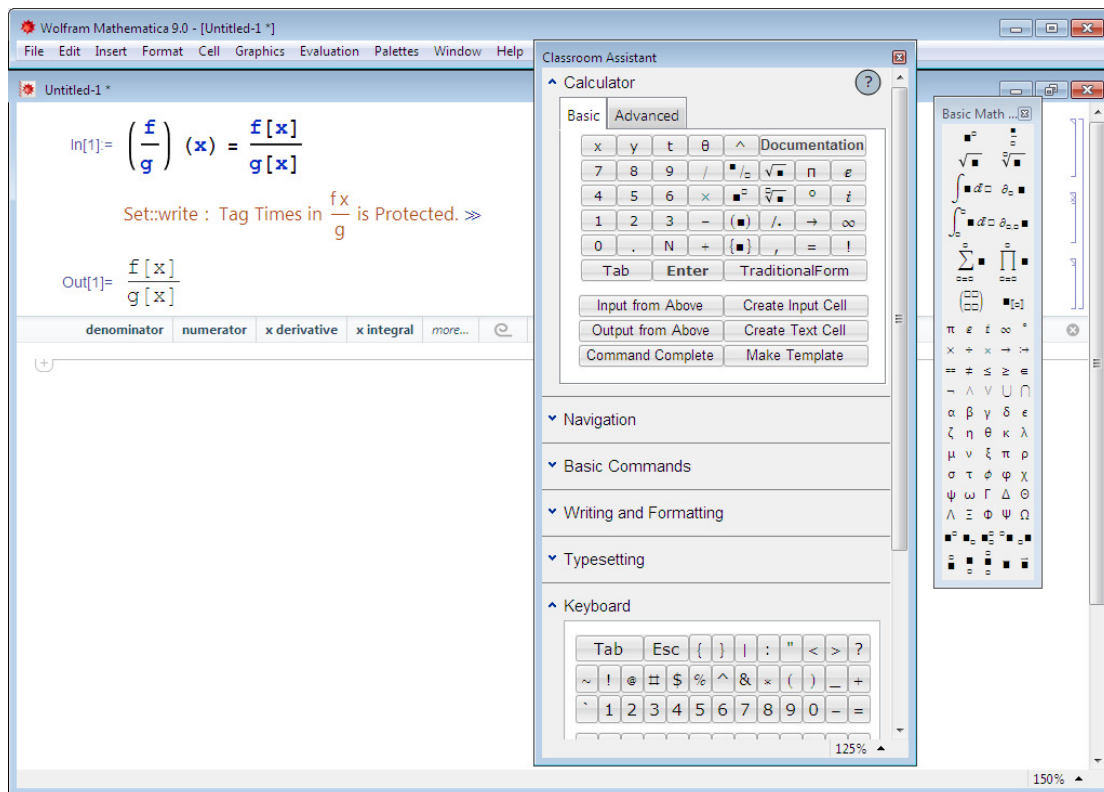
2.4 Μελέτη συνάρτησης

Το Mathematica διαθέτει ενσωματωμένες συναρτήσεις αλλά και την δυνατότητα ορισμού συνάρτησης από τον χρήστη. Γενικά στην μαθηματική επιστήμη, μιλώντας για συναρτήσεις χρειαζόμαστε κάποιον συμβολισμό και το f είναι το επικρατέστερο σύμβολο μιας συνάρτησης λόγω και του ότι αποτελεί το πρώτο γράμμα της αγγλικής λέξης – function, δηλαδή συνάρτηση. (MichaelSpivak, 6^η έκδοση, 2000)

Στην θέση του x μπορούμε να βάλουμε γράμματα του Ελληνικού Αλφάβητου ακολουθώντας την διαδρομή Palettes→Other→BasicMathInput

Η παλέτα που θα εμφανιστεί στο Notebook περιέχει γράμματα και σύμβολα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για περισσότερες της μιας συναρτήσεις. Στην ορολογία του mathematica το σύμβολο ($_$) καλείται «blankoperator» και μπορεί να λαμβάνει

οποιαδήποτε τιμή ή σύμβολο ενώ στην ορολογία της επιστήμης της Πληροφορικής το ίδιο σύμβολο καλείται underscore. (Αθανασίου, Αθήνα, 2007)
 Για να εισάγουμε μια συνάρτηση στο notebook το κάνουμε είτε χειροκίνητα είτε χρησιμοποιώντας την παλέτα ClassroomAssistant→Keyboard και επιλέγουμε έναν-έναν τους χαρακτήρες που αποτελούν την συνάρτησή μας. Είτε προσθέτοντας το f από την ίδια παλέτα και επιλέγοντας τον blankoperator από την παλέτα BasicMathAssistant: (■). Στην θέση του μαύρου τετραγώνου ανάμεσα στις παρενθέσεις προσθέτουμε το γράμμα που εμείς επιθυμούμε. Στην ίδια παλέτα στην καρτέλα Advanced, στο επάνω μέρος, βρίσκουμε τα ίδια, προαναφερθέντα σύμβολα για εισαγωγή.
 Έστω ότι θέλουμε να απεικονίσουμε το πηλίκο $(f/g) \cdot (x) = f(x) / g(x)$ (εικόνα 4)



εικόνα

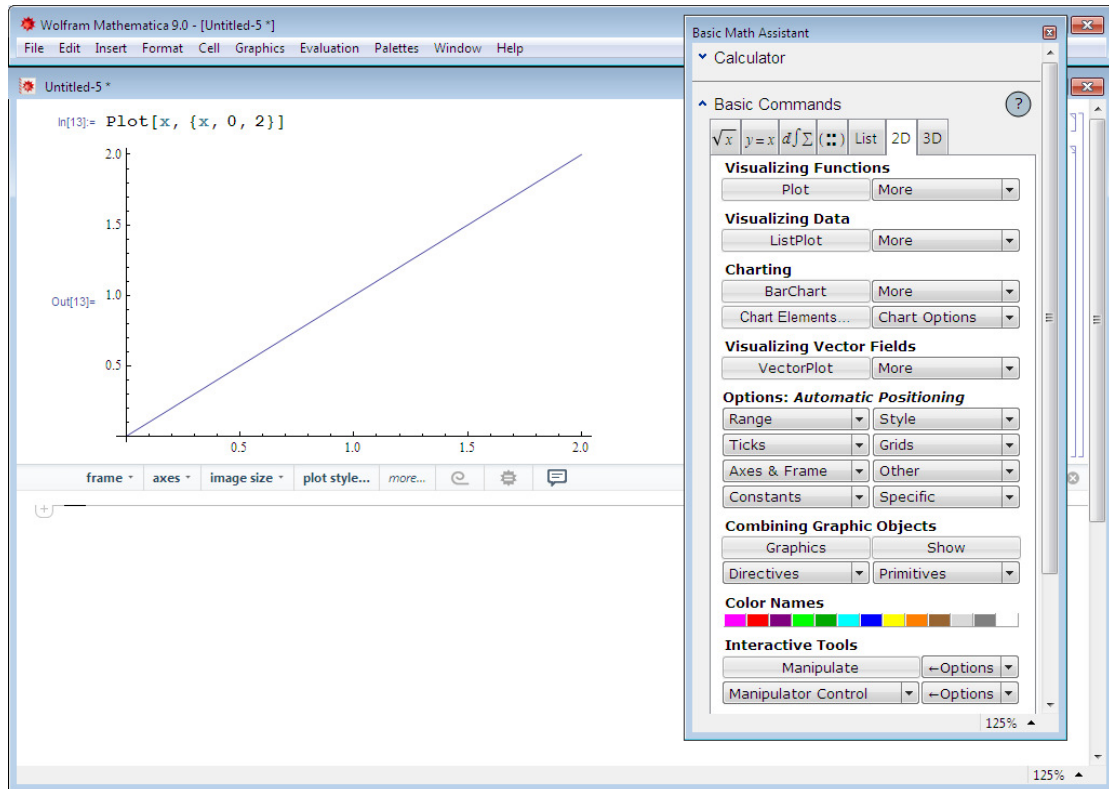
4

2.5 Γραφήματα – Γραφική παράσταση

Ένα γράφημα δυο αξόνων χρησιμοποιείται με μεγάλη συχνότητα σε ασκήσεις άλγεβρας αλλά και σε μετρήσεις της Μικροοικονομικής και Μακροοικονομικής. Στην Οικονομική επιστήμη όπου μελετούνται πολλές μεταβλητές ή δυο μεταβλητές μεταξύ τους, η οπτική απεικόνιση με διάφορα σχήματα ή καμπύλες αποτελούν χρήσιμα εργαλεία. Στο mathematica για να εισάγουμε μια δισδιάστατη γραφική παράσταση ακολουθούμε την διαδρομή
 Palettes→BasicMathAssistant→BasicCommands→2D→Plot. (εικόνα 5)

Η εισαγωγή των εντολών θα γίνει από τον χρήστη. Επειδή οι επιλογές εισάγονται αλλά είναι στην αγγλική γλώσσα, μεταφράζουμε τα σημεία.

Plot[συνάρτηση, {μεταβλητή, κάτω άκρο, άνω άκρο}]



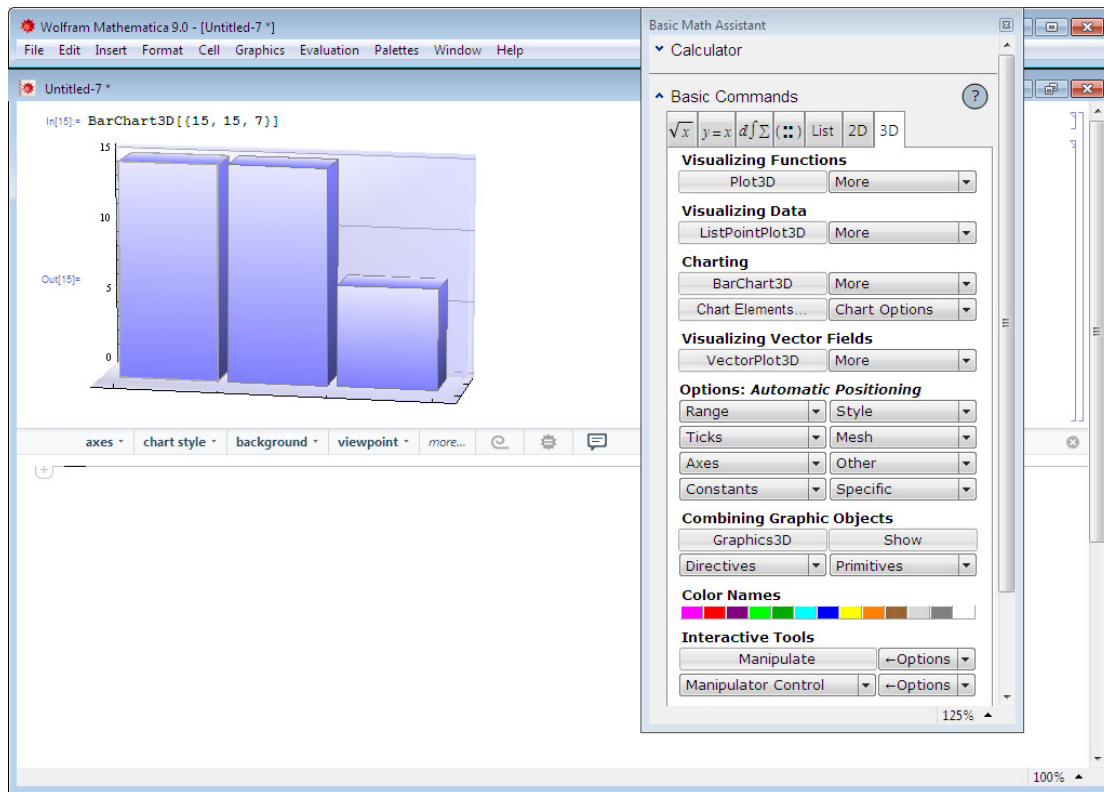
εικόνα

5

Άσκηση 4

Να εισάγετε στο mathematica τρισδιάστατο γράφημα ύψους 15, 15 και 7 αντίστοιχα.

Επίλυση (εικόνα 6)



εικόνα

6

2.6 Μελέτη συνάρτησης με χρήση παραγώγων

Η έννοια της παραγώγου μια συνάρτησης αποτελεί βασική έννοια του κεφαλαίου του Απειροστικού Λογισμού. (Spivak, 2000)

Στην μελέτη συνάρτησης με χρήση παραγώγων συμπεριλαμβάνονται οι ορισμοί του ορίου (\lim), παραγωγίσιμη συνάρτηση, παράγωγος, εφαπτομένη, τέμνουσα, γράφημα και άλλοι, οι οποίοι δεν θα μας απασχολήσουν πέραν του αναγκαίου σε αυτή την Πτυχιακή εργασία.

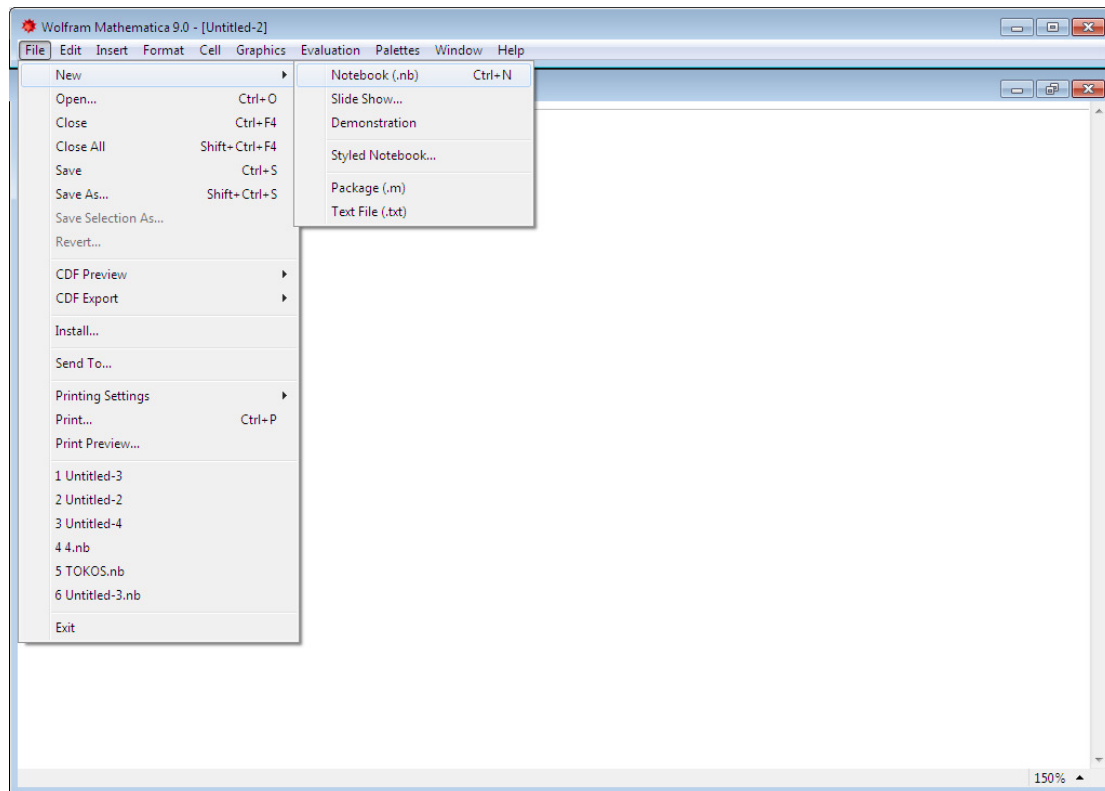
Άσκηση 5

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο a αν το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ υπάρχει.

$h \rightarrow 0$ h

Διαβάζουμε: η f είναι παραγωγίσιμη, αν η f είναι παραγωγίσιμη στο μ για κάθε μ στο πεδίο ορισμού της f .

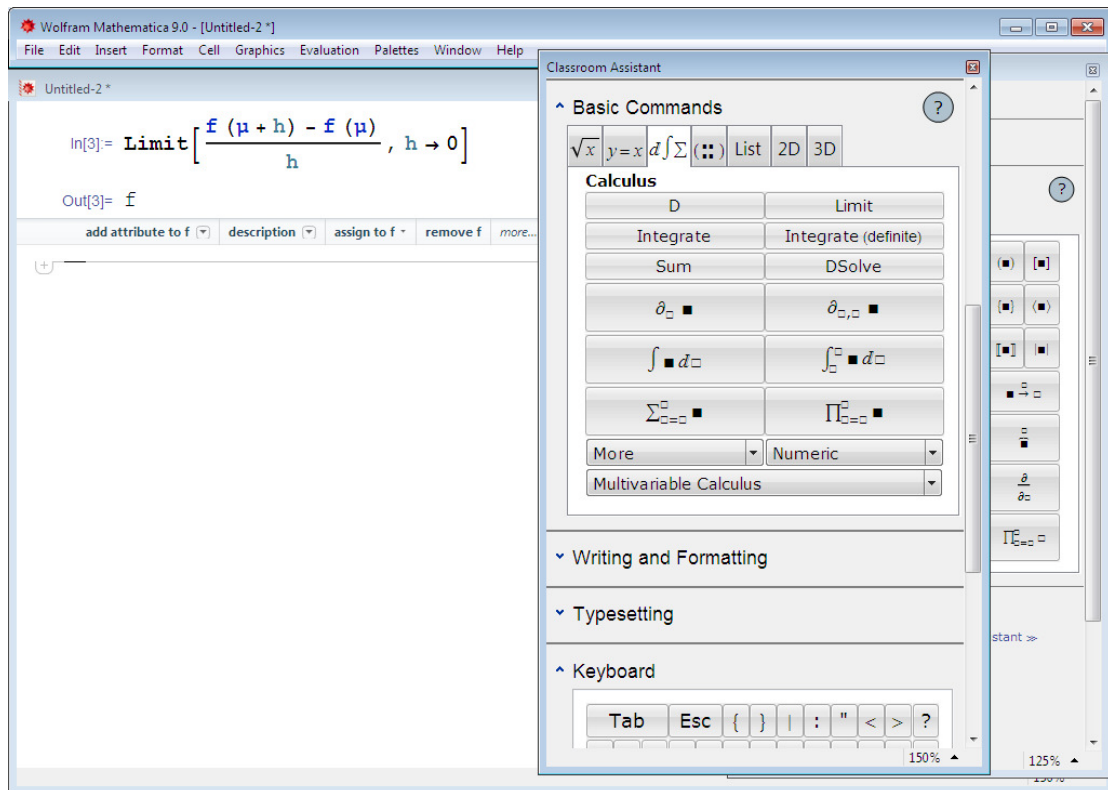
Μεταφερόμαστε στο notebook που έχουμε ανοίξει προσέχοντας να έχουμε διαγράψει τιμές που θα μπορούσαν να αλλοιώσουν τα επιθυμητά μας αποτελέσματα, αν αυτό χρειάζεται. Ή ανοίγουμε νέο βιβλίο εργασίας – notebook με τις ενέργειες: File→New→Notebook. Η εισαγωγή τίτλου είναι προαιρετική. (εικόνα 7)



εικόνα

7

Οι παλέτες μας βοηθούν να εισάγουμε τα σύμβολα το ορίου η απεικόνιση του οποίου είναι απαιτητική για να γίνει χειροκίνητα. Στην παλέτα ClassroomAssistant→BasicCommand→Limit βρίσκω και εισάγω το όριο και αντικαθιστώ τις θέσεις (κουτάκια) με τις μεταβλητές που χρειαζόμαι. Έτσι έχουμε το αποτέλεσμα της εικόνας παρακάτω. (εικόνα 8)



εικόνα

8

Το κεφάλαιο της παραγώγου περιλαμβάνει μια σειρά από σύμβολα όπως τόνοι, εκθέτης, παρενθέσεις κλπ. Το mathematica μας δίνει την δυνατότητα εισαγωγής αυτών των συμβόλων απευθείας από τις παλέτες που διαθέτει.

Άσκηση 6

Έστω παράγωγος του e εις την x

παράγωγος της εφαπτομένης του x (καρτέλα Advanced: Tan[_])

ημίτονο f

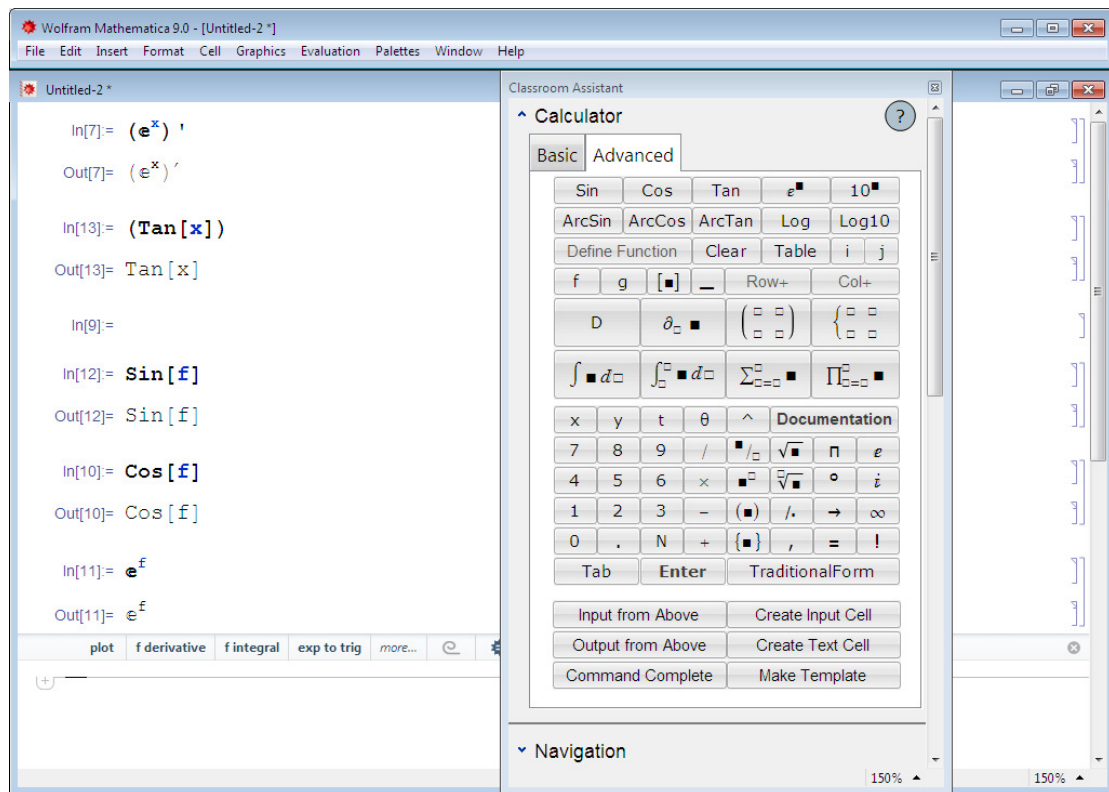
σνημίτονο f

e εις την f

Να απεικονιστούν οι παραπάνω τύποι στο mathematica. (εικόνα9)

Επίλυση

Χρησιμοποιώ την παλέτα Classroom Assistant → Calculator → Basic και Advanced



εικόνα

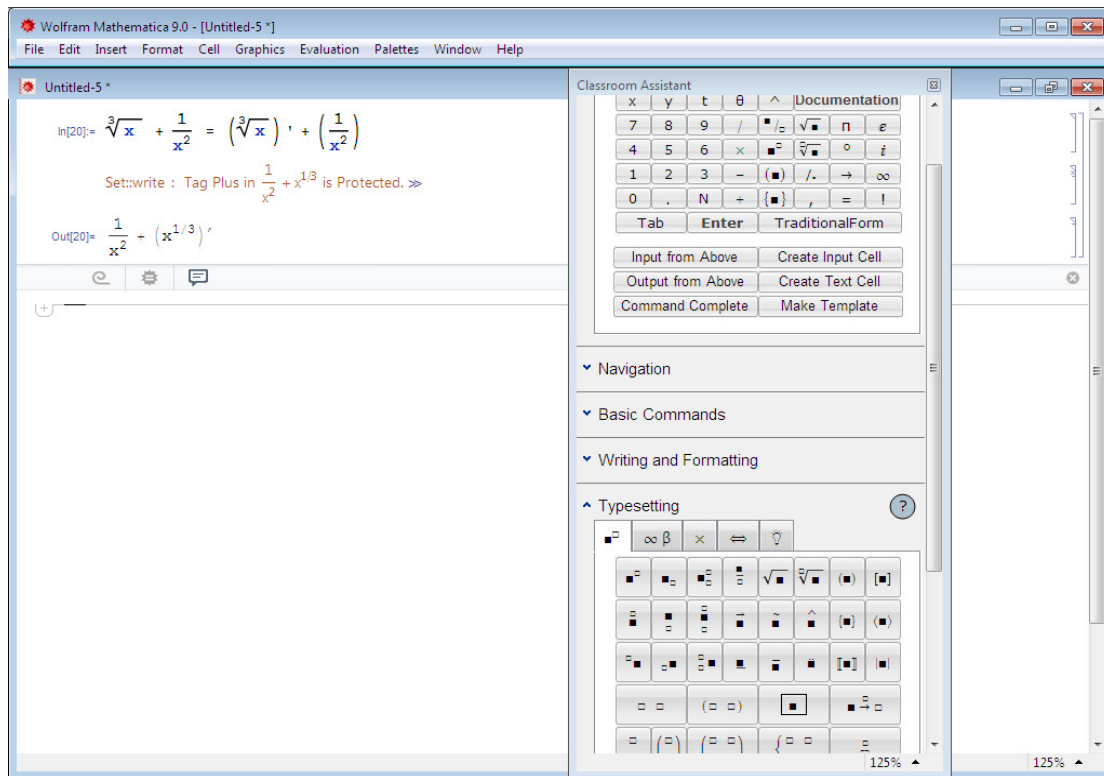
9

Άσκηση 7

Έστω ότι έχουμε την συνάρτηση $y = 3^x$ ρίζα του $x + 1/x^2$

Να διαφορίσετε την συνάρτηση και να απεικονίσετε τις πράξεις στο mathematica.

Επίλυση



εικόνα

10

Έστω ότι θέλω να εισάγω πίνακα να επιλύσω ορίζουσα ή γραμμικά συστήματα. Το mathematica παρέχει αυτή την δυνατότητα η οποία εντοπίζεται ακολουθώντας $\text{Palettes} \rightarrow \text{ClassroomAssistant} \rightarrow \text{BasicCommands} \rightarrow \text{LinearAlgebraand Matrices}$. Εκεί επιλέγω το σύμβολο εισαγωγής γραμμικού πίνακα και αντικαθιστώντας τις μεταβλητές που με ενδιαφέρουν λύνω την άσκηση. (εικόνα 10)

2.7 Ολοκληρωτικός Λογισμός

Όταν μιλάμε για Ολοκληρωτικό Λογισμό εννοούνται οι δυο έννοιες που τον αποτελούν:

	α. Αόριστο	ολοκλήρωμα
β.	Ορισμένο	ολοκλήρωμα

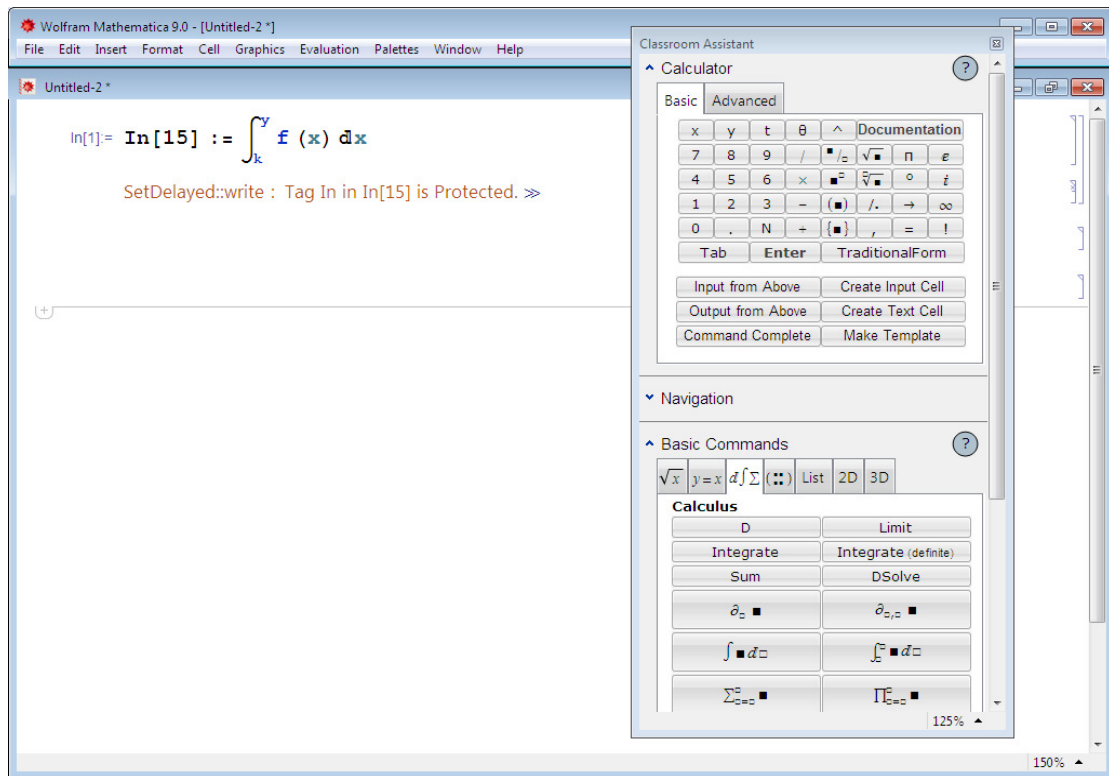
Ολοκληρωτικός λογισμός είναι η μελέτη του ορισμού των δυο συναφείς εννοιών, των ιδιοτήτων και εφαρμογών του αορίστου και ορισμένου ολοκληρώματος. Γενικά, **το αόριστο ολοκλήρωμα** είναι η αντίστροφη λειτουργία της παραγώγου. Λέγεται και αντιπαράγωγος και συμβολίζεται με το επίμηκες “S”, αρχικό γράμμα της αγγλικής λέξης sum η οποία σημαίνει άθροισμα.

Για να εισάγουμε την αντιπαράγωγο στο Mathematica πάμε στις Παλέτες: $\text{Palettes} \rightarrow \text{Other} \rightarrow \text{BasicMathInput}$ και στην παλέτα που μας εμφανίζεται επιλέγουμε την αντίστοιχη επιλογή.

Το ορισμένο ολοκλήρωμα εισάγει μια συνάρτηση και παράγει έναν αριθμό ο οποίος δίνει το αλγεβρικό άθροισμα των εμβαδών μεταξύ γραφικής παράστασης της εισόδου και του άξονα x, ενός γραφήματος.

Άσκηση 8

Να ορίσετε στο Mathematica το ολοκλήρωμα από το k στο y του f(x) dx. (εικόνα 11)



εικόνα

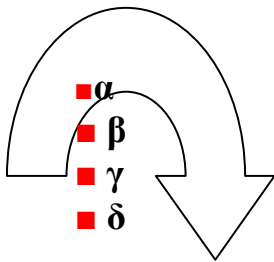
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

3.1 Βασικές οικονομικές συναρτήσεις

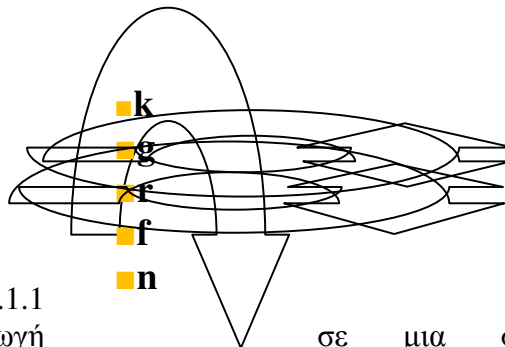
Χωρίς αμφιβολία, η πιο σημαντική έννοια σε ολόκληρα τα μαθηματικά είναι αυτή της συνάρτησης - σε όλους σχεδόν τους κλάδους των σύγχρονων μαθηματικών οι συναρτήσεις αποδεικνύονται το κεντρικό αντικείμενο έρευνας. (Michael Spivak, 2000)

Ο όρος **συνάρτηση** συναντάται κατά κύριο λόγο στην επιστήμη των Μαθηματικών. Απαντάται συχνά και με τον όρο πραγματική συνάρτηση. Βασικές έννοιες της αποτελούν το *πεδίο ορισμού* και το *πεδίο τιμών*. Σε ένα πεδίο ορισμού κάθε ένα στοιχείο αντιστοιχίζεται με ένα μόνο στοιχείο του πεδίου τιμών. Όταν συμβαίνει αυτό, τότε και μόνο τότε μιλάμε για συνάρτηση.

ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ



ΠΕΔΙΟ ΤΙΜΩΝ



Σχήμα 3.1.1
Η εισαγωγή
καλείται

σε μια συνάρτηση
όρισμα και η έξοδος
(αντιστοίχιση) **τιμή**. Το
εξαρτημένης ποσότητας

πεδίο τιμών αποτελεί το σύνολο της από το σύνολο των τιμών της ανεξάρτητης ποσότητας που είναι το πεδίο ορισμού. Η έννοια της συνάρτησης δεν ορίζει πως κάθε τιμή της εξαρτημένης ποσότητας πρέπει να αντιστοιχίζεται σε κάποια τιμή της ανεξάρτητης. (βλ. Σχήμα 3.1.1) Όπως φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα κάθε στοιχείο της εξαρτημένης ποσότητας (πεδίο τιμών) αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο στοιχείο της ανεξάρτητης ποσότητας (πεδίο ορισμού) χωρίς να είναι απαραίτητο όλα τα στοιχεία της εξαρτημένης ποσότητας να αντιστοιχίζονται. Η ανεξάρτητη μεταβλητή συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα x (χι) και η ανεξάρτητη με το γράμμα y (ψι).

Ιστορική Αναδρομή GeneralInfo

Η συνάρτηση σε πλήρη διατύπωση και επεξήγηση συναντάται το 1694 από τον Γερμανό φιλόσοφο και μαθηματικό Γκότφριντ Βίλχελμ Λάμπνιτς. Επομένως, η συνάρτηση ή “απεικόνιση” όπως απαντάται στον κλάδο των διακριτών μαθηματικών,

χρονολογείται από τα τέλη σχεδόν?? του 17^{ου} αιώνα αποτελώντας κομμάτι-εφεύρεση της Νεώτερης Ιστορίας. Έξι χρόνια πριν το τέλος του αιώνα η επίσημη καταγραφή της έννοιας της συνάρτησης, που είχε απασχολήσει από την Αρχαιότητα, βρίσκει πια τον επίσημο ορισμό της. Τον αιώνα αυτόν πολλές εφευρέσεις και εκδόσεις επιστημονικής μελέτης έθεταν τα θεμέλια της σύγχρονης επιστήμης προωθώντας την απαγκίστρωση από τα πιστεύω του παρελθόντος που χαρακτηρίζουν την Αρχαιότητα και την περίοδο εκείνη του Μεσαίωνα.

Οι συναρτήσεις αποτελούν ένα μεγάλο κεφάλαιο των Μαθηματικών και έχουν ιδιαίτερη σημασία καθώς πέραν του κλάδου αυτού χρησιμοποιούνται επίσης σε πολλούς άλλους τομείς της έρευνας, παραδείγματος χάριν σε μελέτες κοινωνικές, στατιστικές και σε κάθε είδους έρευνα η οποία έχει ως αντικείμενο την πλειοψηφική συμπεριφορά. Ένα δείγμα αποτελούν οι στατιστικές μελέτες καταναλωτικής συμπεριφοράς της ΕΛΣΤΑΤ. Ο προγραμματισμός επίσης των προγραμμάτων τα οποία τρέχουν οι υπολογιστές και τα smartphones διαμορφώνονται και εκτελούν εντολές μέσα από μια σειρά από κανόνες που στηρίζονται στην λογική σειρά πράξεων η οποία αντιπροσωπεύει την Μαθηματική επιστήμη.

3.2 Συναρτήσεις και Όρια με το Mathematica

Για να εισάγω στο Mathematica τις κλασσικές μαθηματικές συναρτήσεις χρησιμοποιώ τις παλέτες. Λόγω της πολυπλοκότητας των συμβόλων και των συνδυασμών που φέρει η απεικόνιση μιας συνάρτησης η χρήση της παλέτας αποτελεί σχεδόν μονόδρομο.

Βασικός βοηθός μας αποτελεί η παλέτα ClassroomAssistant → καρτέλα Calculator → Advanced.

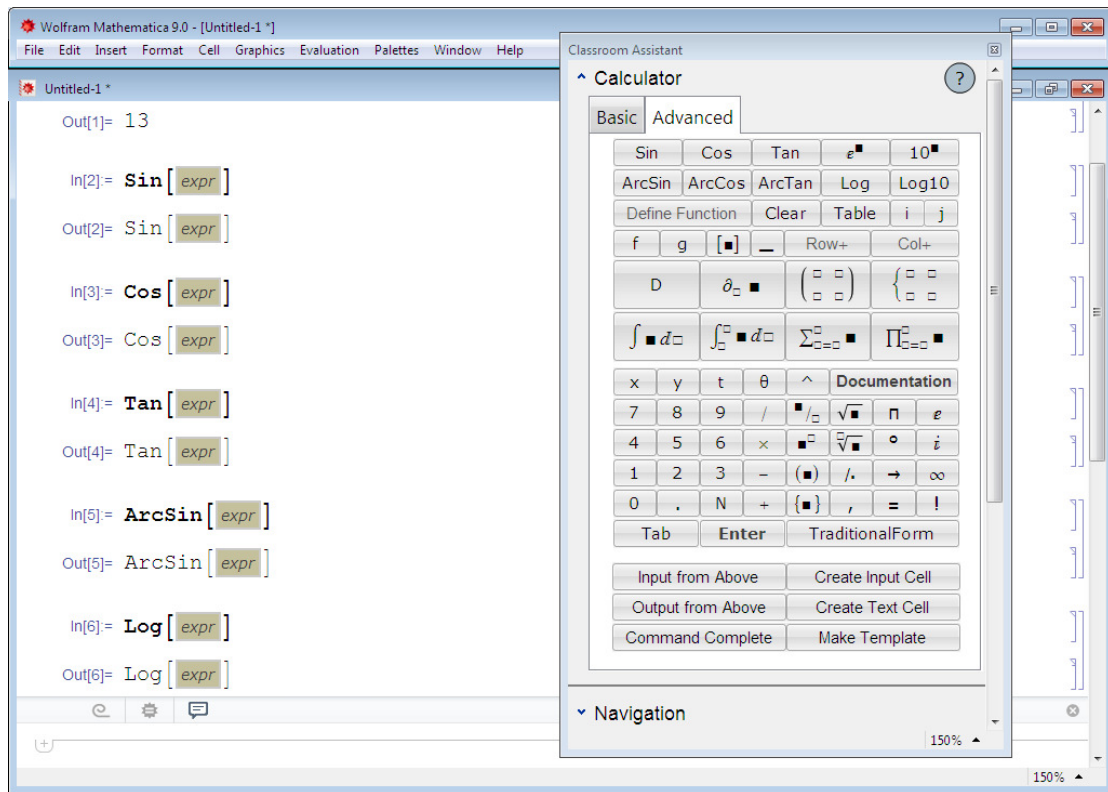
Θυμόμαστε να μεγαλώνουμε την ανάλυση της οθόνης μας όποτε το χρειαζόμαστε (zoom).

Από αυτήν την καρτέλα μπορώ να προσθέσω μαθηματικές συναρτήσεις (εικόνα 1)

Το πρώτο γράμμα κάθε συνάρτησης είναι κεφαλαίο.

Τα ορίσματα των συναρτήσεων μπαίνουν σε αγκύλες και ορίζονται από τον χρήστη.

Στην ίδια παλέτα εντοπίζουμε και τα σύμβολα N, f, g, [■] που χρησιμοποιούνται στις συναρτήσεις.



εικόνα

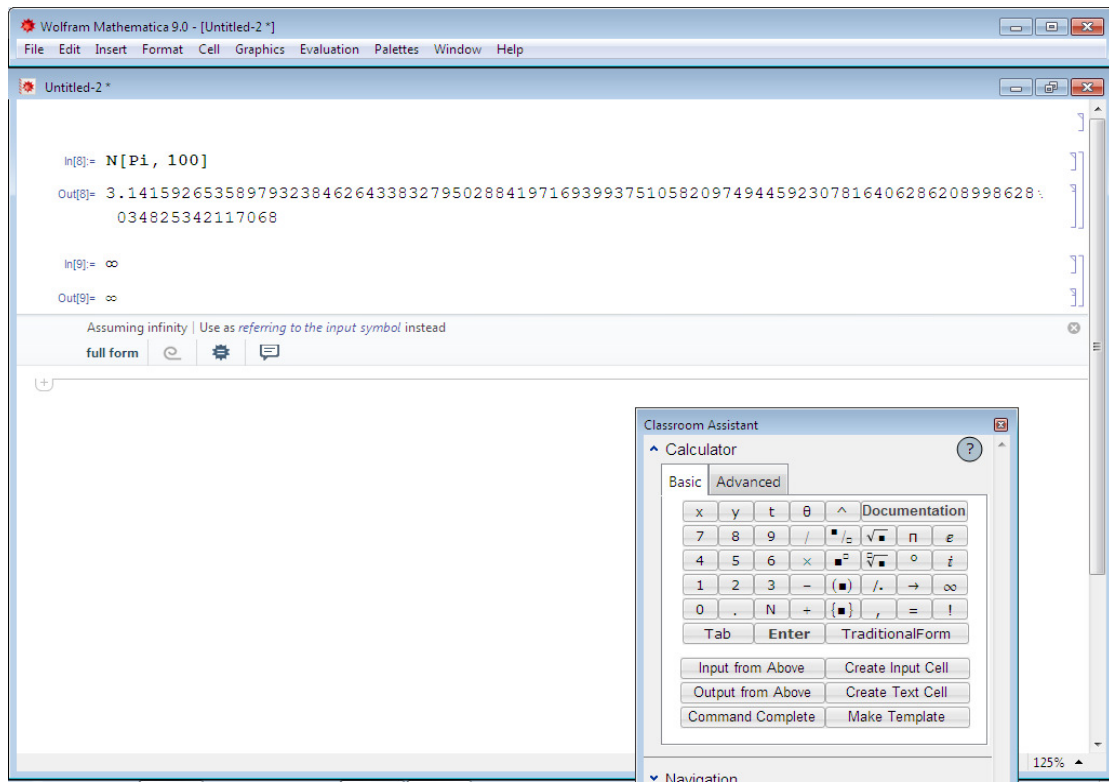
1

Μαθηματικά σύμβολα

Στο βιβλίο εργασίας πληκτρολογώ N είτε στο φυσικό πληκτρολόγιο είτε από την καρτέλα Calculator → Basic. Δίνω την εντολή $N[\text{Pi}, 100]$ και shift & enter.

$$\text{Pi} = \pi = 3,14$$

Από την παλέτα προσθέτω και το σύμβολο του απείρου (infinity) ∞ (εικόνα 2)



εικόνα

2

Το WolframMathematica 9.0.0 το οποίο χρησιμοποιούμε, μας δίνει την δυνατότητα εισαγωγής των μαθηματικών εντολών πχ. e^x απευθείας από την παλέτα BasicMathAssistant και ClassroomAssistant και την καρτέλα Advanced. Μπορούμε όμως να εισάγουμε την εντολή e^x μέσω της επιλογής Expand[_] από την παλέτα BasicmathAssistant – BasicCommands→ElementaryFunctions (στοιχειώδεις συναρτήσεις). (εικόνα 3)

The screenshot displays the Wolfram Mathematica 9.0 interface. The main notebook window shows the input `In[16]= ex` and the output `Out[16]= ex`. Below the input/output area is a toolbar with buttons for `plot`, `x derivative`, `x integral`, `exp to trig`, and `more...`. To the right is the Basic Math Assistant palette, which includes a numeric keypad, a list of basic commands, and several categorized function palettes: Mathematical Constants, Numeric Functions, Elementary Functions, Trigonometric Functions, Integer Functions, and Random Functions. The interface is titled "Wolfram Mathematica 9.0 - [Untitled-8 *]" and has a menu bar with options: File, Edit, Insert, Format, Cell, Graphics, Evaluation, Palettes, Window, Help.

εικόνα

3

ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ MATHEMATICA

3.3 Τόκος

Τόκος στην Οικονομική Επιστήμη είναι η χρηματική αμοιβή που καταβάλλεται από πρόσωπο (φυσικό ή νομικό) το οποίο ονομάζεται *δανειζόμενος* για την χρήση περιουσιακού στοιχείου (κεφάλαιο) ιδιοκτησίας άλλου προσώπου, σε αυτόν-τον ιδιοκτήτη. Ο τελευταίος μπορεί να είναι φυσικό ή νομικό πρόσωπο και στο εξής θα καλείται *δανειστής*.

Βασική συνισταμένη του τόκου είναι ο χρόνος ο οποίος συμβολίζεται με το γράμμα t από την αγγλική λέξη *time* και ο οποίος εκφράζεται ως το χρονικό διάστημα εκείνο, για το οποίο ο δανειστής δανείζει το κεφάλαιό του στον δανειζόμενο και κατ' επέκταση οφειλέτη.

Ο τόκος κεφαλαίου έχει εφευρεθεί ως διαπιστευτήριο της διαδικασίας δανεισμού μεταξύ των δυο συμβαλλόμενων μερών δηλαδή μεταξύ δανειστή και δανειζόμενου. Αποτελεί μερική εξασφάλιση του δανειστή για το κεφάλαιο που δανείζει και τον προφυλάσσει από την ολική απώλεια του κεφαλαίου του σε περίπτωση αδυναμίας αποπληρωμής του κεφαλαίου από τον οφειλέτη ή δανειζόμενο. Κρίνεται απαραίτητο να διευκρινιστεί ότι το κεφάλαιο είναι οικονομικό αγαθό και έτσι ο τόκος υπολογίζεται σε χρηματικές μονάδες.

Σύντομη ιστορική αναδρομή

Ήδη από την Αρχαιότητα, ο δανειστής για να εξασφαλίσει την επιστροφή του κεφαλαίου του είχε ανακαλύψει τρόπους ώστε να εξασφαλίζεται μερικώς σε περιπτώσεις αδυναμίας αποπληρωμής αυτού, από τον οφειλέτη. Τέτοιες περιπτώσεις είναι η πτώχευση του προσώπου και η δέσμευση της περιουσίας του, ο θάνατος του ιδίου (δανειζόμενου), ή και αίτια που οφείλονται σε κακή συμπεριφορά – ηθική του δανειζόμενου/οφειλέτη παραδείγματος χάριν η φυλάκιση για λόγους παραβατικής συμπεριφοράς η οποία συνεπάγεται αδυναμία εργασίας και αποπληρωμής του δανείου, η χρησιμοθηρία και η απάτη κατά συρροήν. Όλα αυτά αντιμετωπίζονται κατά ένα μεγάλο ποσοστό με την υποχρέωση του οφειλέτη να καταβάλλει σε τακτά χρονικά διαστήματα τόκο για το κεφάλαιο που έχει δανειστεί. Η πρακτική αυτή του τόκου αποτελεί ανακάλυψη αγνώστου πατρός και κατά το παρελθόν δίχασε την κοινωνία με την ύπαρξή της, βρίσκοντας είτε υποστηρικτές είτε πολέμιους κυρίως την Ρωμαϊκή Εποχή. Συχνά συγγέετο με την τοκογλυφία και για λόγους περισσότερο θρησκευτικούς μέχρι και τον 17^ο αιώνα οι ασκούντες αυτήν την πρακτική του τόκου λογοκρίθηκαν. Φυσικά, το δίκαιον είναι δίκαιον και δεν θα πρέπει να χρησιμοποιείται κατά το συμφέρον της πλευράς του δανειστή – και τα δυο συμβαλλόμενα μέρη πρέπει να συμφωνούν σε ισοζυγή δικαιώματα αλλά και υποχρεώσεις. (ΜίτλεττονΧρίστια, 2016)

Συμπέρασμα 1 Από τα παραπάνω καταλήγουμε στο πρώτο συμπέρασμα ότι ο Τόκος (I) είναι το ποσό των χρημάτων που λαμβάνει ο δανειστής ενός κεφαλαίου (P) από τον δανειζόμενο για χρόνο t .

Για την διευκόλυνσή μας, ορίζουμε συμβολικά τις έννοιες του κεφαλαίου IV ως κάτωθι:

Απλός Τόκος – Simple Interest	I
-------------------------------	---

Ανατοκισμός	C
Κεφάλαιο	P (principal)
Επιτόκιο	r
Χρόνος	t
Τελική Αξία	S
Έτη (αναφορικά με δάνειο/α)	n

Πίνακας

4.1.1

Για τον υπολογισμό του απλού τόκου χρησιμοποιούμε τον εξής τύπο: όπου ο τόκος ισούται με το Κεφάλαιο (principal) ίσο με μια νομισματική μονάδα στην μονάδα του χρόνου, για χρόνο t με επιτόκιο r.

Σημειώνουμε ότι όταν μιλάμε για απλό τόκο $I = P \cdot r \cdot t$ εννοούμε απλή κεφαλαιοποίηση του τόκου. Η τελική αξία συμβολίζεται με το αγγλικό κεφαλαίο γράμμα S από την λέξη sum που θα πει άθροισμα, σύνολο. Η τελική αξία ή μέλλουσα αξία (future value - FV) αποτελεί το συνολικό οφειλόμενο Κεφάλαιο συν τον Τόκο και δίνεται από τον τύπο:

$$\begin{aligned} S &= P + I \\ &= P + P \cdot r \cdot t \\ &= P(1 + r \cdot t) \end{aligned}$$

Τόκος και Ιδιότητες

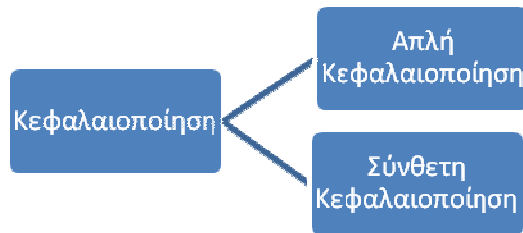
Ο τόκος μπορεί να είναι εξ' αρχής για Κεφάλαιο ίσο μονάδα του χρόνου (t) που συνήθως είναι το ένα έτος (ετήσιο).

ετήσιος δηλαδή να υπολογίζεται μιας νομισματικής μονάδας στην

Ωστόσο, ένα Κεφάλαιο μπορεί να τοκίζεται σε χρονικά διαστήματα t μικρότερα του ενός έτους. Τότε το πραγματικό ετήσιο επιτόκιο είναι μεγαλύτερο του ετήσιου ονομαστικού επιτοκίου. Είναι δυνατόν δηλαδή το δανειζόμενο Κεφάλαιο (P) να τοκίζεται ανά τρίμηνο (P/4), τετράμηνο (P/3), εξάμηνο (P/2) ή και ανά μήνα (P/12). Τότε μιλάμε για **Ανατοκισμό** (Compound Interest).

3.4 Κεφαλαιοποίηση

Η Κεφαλαιοποίηση είναι όρος που στην γλώσσα της Οικονομικής Επιστήμης ορίζεται ως η μετατροπή του τόκου σε κεφάλαιο. Στα Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά η Κεφαλαιοποίηση αναλύεται σε μαθηματικές πράξεις για την εύρεση του τόκου σε ένα Κεφάλαιο P. Η Κεφαλαιοποίηση διακρίνεται σε δυο κατηγορίες:



Σχήμα 1

3.4.1 Απλή Κεφαλαιοποίηση έχουμε όταν ο παραγόμενος τόκος I από τοκισμό κεφαλαίου P σε χρόνο t , συμψηφίζεται στο αρχικό κεφάλαιο, το δε κεφάλαιο παραμένει σταθερό.

3.4.2 Σύνθετη Κεφαλαιοποίηση ή Ανατοκισμός. Σε αυτή την περίπτωση, ο τόκος I που προέρχεται από τοκισμό κεφαλαίου P για διάστημα t με ετήσιο επιτόκιο r , προστίθεται στο αρχικό Κεφάλαιο (initial principal) στο τέλος της χρονικής περιόδου t . Αποτέλεσμα της διαδικασίας αυτής είναι την επόμενη χρονική περίοδο απαίτησης της οφειλής, να υπάρχει προς τοκισμό το αρχικό Κεφάλαιο P και ο τόκος της προηγούμενης περιόδου.

Σημείωση Γενικά σε ασκήσεις αποφεύγεται η χρήση πολλών μηδενικών για λόγους οικονομίας χώρου και χρόνου μεταξύ των πράξεων. Το ίδιο κάνει και το mathematica. Μπορούμε να τα προσθέσουμε στο τέλος της άσκησης. Για αυτόν τον λόγο, σε μια άσκηση μπορεί να γράφουμε 150 ή 200. Στην πραγματικότητα το ποσό αυτό είναι μεγαλύτερο, π.χ. 100.00 ή 200.000

Άσκηση 1

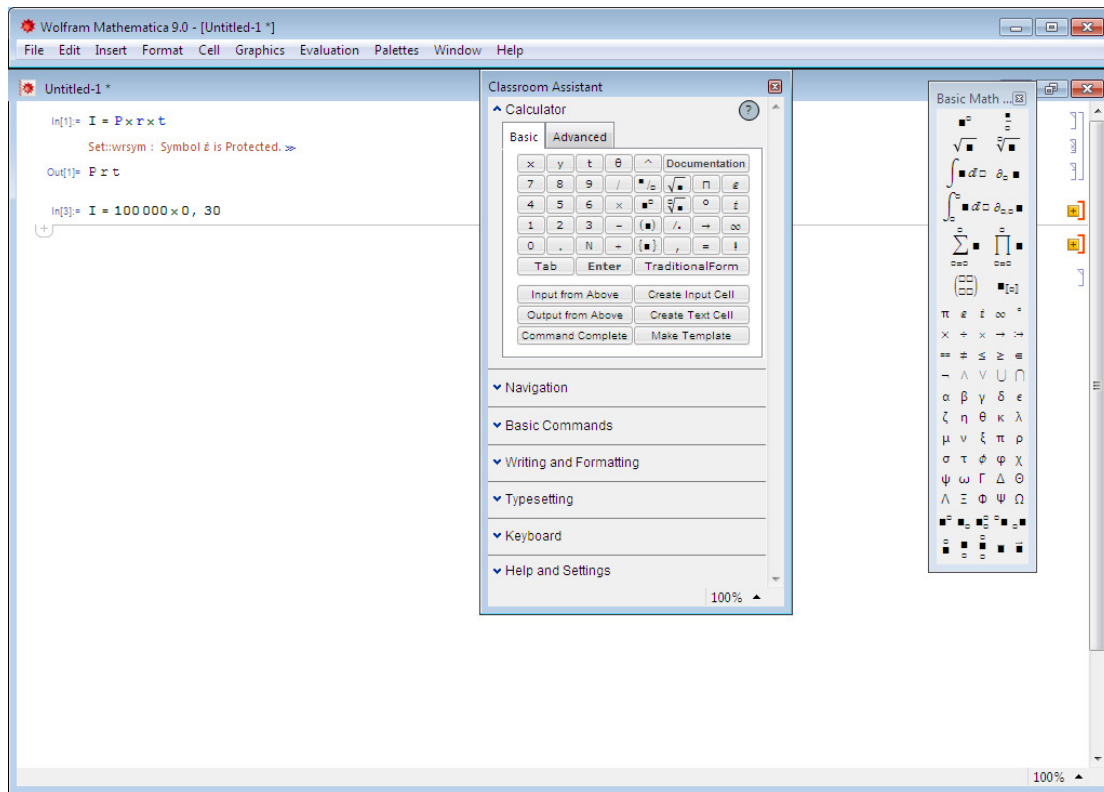
Επιχείρηση με βιβλία Γ' κατηγορίας δανείζεται κεφάλαιο αξίας € 100.000,00 από την Τράπεζα Α, με επιτόκιο 4% για 10 έτη. Να πραγματοποιήσετε υπολογισμό

- του τόκου για την περίπτωση της απλής κεφαλαιοποίησης και
- της συνολικής αξίας του Κεφαλαίου

Επίλυση

Βρίσκουμε αρχικά τον απλό τόκο αντικαθιστώντας στον τύπο

$$\text{a. } I = P \cdot r \cdot t \Rightarrow I = 100.000 \cdot 0,03 \cdot 10 \Rightarrow \\ \Rightarrow I = 40.000$$



εικόνα

1

b. Χρησιμοποιώντας τον τύπο της Τελικής Αξίας και αντικαθιστώντας, έχουμε:

$$S = P + I$$

$$\Rightarrow S = P + P \cdot r \cdot t$$

$$\Rightarrow S = P (1 + r \cdot t)$$

Αντικατάσταση

$$S = 100.000 + 40.000$$

$$\Rightarrow S = 100.000 + 100.000 \times 0,04 \times 10$$

$$\Rightarrow S = 100.000 (1 + 1,40) \Rightarrow S = 140.000,00$$

Άσκηση 2

Η Επιχείρηση Γ συνάπτει δάνειο με την Τράπεζα Β. Έστω κεφάλαιο 200, με επιτόκιο (r) 5% για 4 έτη. Να βρεθεί ο τόκος (I).

Επίλυση

Η θεμελιώδης εξίσωση του απλού τόκου την οποία και εξετάζουμε είναι η εξής:

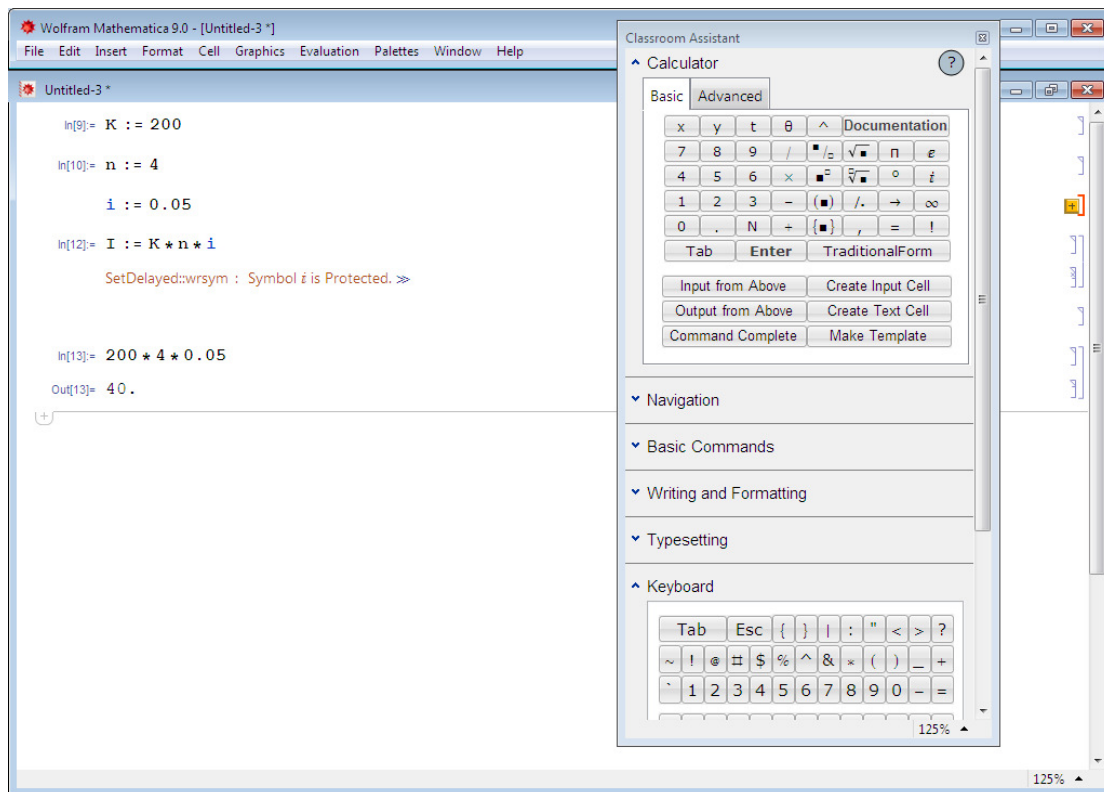
$$I = K \cdot n \cdot i$$

Το €1 του κεφαλαίου για 1 έτος θα μας δώσει τόκο $i = 5/100 = 0,05$. Ο τόκος για 4 έτη υπολογίζεται με τον παραπάνω τύπο και αντικαθιστώντας έχουμε:

$$I = K_1 \cdot 0,05 + K_2 \cdot 0,05 + K_3 \cdot 0,05 + K_4 \cdot 0,05 =$$

$$I = 200 \cdot 4 \cdot 0,05 \Rightarrow$$

$I = 40$ (εικόνα 2)



εικόνα

2

3.5 Μέθοδοι τοκισμού βάσει χρόνου t και τοκοφόρες ημέρες

Κατά την σύναψη ενός δανείου υπολογίζεται η χρονική του διάρκεια με στόχο τον καθορισμό του αναλογούντος τόκου. Ένα κεφάλαιο θα τοκισθεί είτε αυτό αποταμιεύεται είτε δανείζεται. Κατά την αποταμίευση οι τοκοφόρες ημέρες ξεκινούν από την αμέσως επόμενη ημέρα της κατάθεσης και λήγουν με την ανάληψη του κεφαλαίου. Αντιθέτως, όταν η τράπεζα δανείζει κεφάλαιο στον οφειλέτη, οι τοκοφόρες ημέρες ξεκινούν από την ίδια κιόλας ημέρα και λήγουν την ημέρα που το κεφάλαιο αυτό εξοφλείται.

Γνωρίζουμε την θεμελιώδη εξίσωση του απλού τόκου η οποία είναι η εξής:

$$I = K * n * i$$

Όπου: I ο τόκος, K το κεφάλαιο, n ο χρόνος διάρκειας του δανείου και i το επιτόκιο. Ένα δάνειο είναι είτε βραχυπρόθεσμο είτε μακροπρόθεσμο. Όταν ένα δάνειο είναι βραχυπρόθεσμο, δηλαδή η διάρκειά του είναι μικρότερη του ενός έτους τότε ο τόκος μπορεί να δίνεται σε ημέρες. Σε αυτή την περίπτωση ο υπολογισμός του απλού τόκου γίνεται υπολογίζοντας τις ημέρες τοκισμού και τις ημέρες του έτους.

Το έτος στον υπολογισμό του τόκου**Μέθοδος 1^η Μικτό έτος**

Στην μέθοδο αυτή θεωρούμε πως το έτος έχει 360 ημέρες. Το έτος αυτό έχει εφαρμογή στην Ελλάδα. Ο τύπος που χρησιμοποιούμε είναι ο ακόλουθος:

$$I = \frac{K \cdot t \cdot i}{360}$$

Μέθοδος 2^η Εμπορικό έτος

Σε αυτήν έχουμε ως δεδομένο πως κάθε μήνας έχει 30 ημέρες και το έτος 360.

$$I = \frac{K \cdot t \cdot i}{360}$$

Μέθοδος 3^η Πολιτικό έτος

Στο πολιτικό έτος όλοι οι μήνες έχουν τις ημέρες που τους αντιστοιχούν ημερολογιακά και το έτος έχει 365 ημέρες ή 366 αν είναι δίσεκτο. Δίσεκτο θεωρείται το έτος στο οποίο προστίθεται μια ακόμη ημέρα π.χ. η 29^η Φεβρουαρίου με αποτέλεσμα το έτος να αποτελείται από 366 ημέρες. Βρίσκουμε εάν το έτος που μας ενδιαφέρει είναι δίσεκτο διαιρώντας το με το 4. Αν διαιρείται ακριβώς τότε το έτος θεωρείται δίσεκτο, αν το αποτέλεσμα είναι δεκαδικός τότε το έτος δεν θεωρείται δίσεκτο και έχει 365 ημέρες. (<https://www.sansimera.gr/articles/420>) Ο τόκος σε αυτή την περίπτωση υπολογίζεται από τους εξής δυο τύπους:

$I = \frac{K \cdot t \cdot i}{365}$	$I = \frac{K \cdot t \cdot i}{366}$
-------------------------------------	-------------------------------------

Άσκηση 3

Έστω κεφάλαιο €400.000,00 τοκίζεται με απλό τόκο από 01/02/20XX - 01/03/20XX με ετήσιο επιτόκιο $i = 3\%$. Να βρεθεί ο τόκος όταν το έτος είναι:

- α. μικτό,
 β. εμπορικό,
 γ. πολιτικό.

Επίλυση

Χρησιμοποιώντας τους πιο πάνω τύπους των τριών μεθόδων έχουμε τα εξής αποτελέσματα.

- α. $I = K \cdot t \cdot i / 360 = 400.000 \cdot 28 \cdot 0,03 / 360$
 $I = 336.000 / 360 = 933,33$

$$\beta. \quad I = K \cdot t \cdot i / 360 = 400.000 \cdot 30 \cdot 0,03/360$$

$$I = 360.000/360 = 1.000$$

$$\gamma. \quad I = K \cdot t \cdot i/365 \text{ ή } 366 = 400.000 \cdot 28 \cdot 0,03/365 \text{ ή } 366$$

$$I = 336.000/365 = 920,55 \text{ ή } I = 336.000/366 = 918,03$$

3.6 Ράντες

Όπως είδαμε, ο τόκος είναι ένα ποσό που καταβάλλεται σε τακτά χρονικά διαστήματα συμφωνημένα μεταξύ του πιστωτή και του οφειλέτη.

Τόκος υπάρχει όπου οφείλεται κάποιο ποσό εκφρασμένο σε χρηματικές μονάδες.

Η Επιστήμη της Λογιστικής καλείται να αντιμετωπίσει οικονομικά προβλήματα, ορισμένα εκ των οποίων αφορούν τακτικές πληρωμές π.χ. Μισθοδοσία επιχείρησης, εξόφληση οφειλών, γραμματίων, δανείων, διαχείριση ταμείου μιας επιχείρησης, ορθολογική διαχείριση εισροών και εκροών.

παράδειγμα Ίδιοκτήτης καταστήματος καταθέτει κάθε τέλος Δεκεμβρίου τα χρηματικά ποσά των €200, €150 και €70 προς εξόφληση βραχυπρόθεσμου δανείου για 4 συναπτά έτη.

Η καθορισμένη, τακτική κατάθεση συμφωνημένων χρηματικών ποσών ανά ίσα χρονικά διαστήματα αποτελεί μια διαδικασία που στην Οικονομική Επιστήμη καλείται **ράντα**.

Ο όρος προέρχεται από το λατινικό *reddita* (ρεντίτα) που θα πει αυτός που ανταμείβεται. Ως *rent* ή *annuity* τον βρίσκουμε στα Αγγλικά και στα Ελληνικά ως **χ ρ η μ α τ ο ρ ή ή χρηματοσειρά**. Μερικά παραδείγματα ραντών αποτελούν το ενοίκιο που καταβάλλει ένας ενοικιαστής, η εξαμηνιαία ή ετήσιας βάσης εξόφληση δανείου-δανείων, η μηνιαία καταβολή μισθού μισθωτών και υπαλλήλων μιας επιχείρησης, οι μηνιαίες κρατήσεις στο μισθό αυτών προς απόδοση στα ασφαλιστικά ταμεία.

Όρος ράντας – Περίοδος ράντας – Αρχή ράντας – Τέλος ράντας Ορισμοί – Κατηγοριοποίηση

Μια ράντα χαρακτηρίζεται από μια καθορισμένη συνέχεια μέσα σε καθορισμένο χρόνο. Έτσι, μια ράντα έχει αρχή και τέλος.

Ένα ποσό εκφρασμένο σε χρηματικές μονάδες που καταβάλλεται κάθε φορά καλείται *όρος της ράντας*.

Το διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δυο διαδοχικών όρων της ράντας καλείται *περίοδος ράντας*.

Ως *αρχή της ράντας* ορίζεται η έναρξη της 1^{ης} περιόδου ισχύος αυτής ενώ τέλος της ράντας καλείται η τελευταία φορά εφαρμογής της ράντας. (Κούγιας και Γεωργίου, 2004)

Τέλος ράντας καλείται το τέλος της τελευταίας περιόδου της ράντας και την συμβολίζουμε με το γράμμα “S”.

Αθροίζοντας τις πραγματικές αξίες των όρων μιας ράντας βρίσκουμε την *αρχική* της αξία. Συμβολίζεται με το γράμμα “A”.

Αθροίζοντας, τέλος, τις τελικές αξίες των όρων της ράντας βρίσκουμε την *τελική αξία* της ράντας.

Στην Επιστήμη της Λογιστικής είναι ξεκάθαρο πως όταν μιλάμε για ράντες, μιλάμε για επαναλαμβανόμενες χρηματικές καταθέσεις ή πληρωμές. Οι ράντες αφορούν το χρήμα ως μέσο ανταλλαγής για την απόκτηση κάποιου αγαθού, υλικού ή άυλου.

Παρατήρηση Η συνηθέστερη περίπτωση στην οποία εμφανίζονται οι ράντες είναι αυτή ενός μακροπρόθεσμου κυρίως δανείου στο οποίο έχουμε καταβολή ισόποσων ποσών σε ίσα μεταξύ τους χρονικά διαστήματα για περίοδο μεγαλύτερη του ενός έτους. Στα μακροπρόθεσμα δάνεια τα οποία αφορούν περίοδο μεγαλύτερη του ενός έτους εφαρμόζεται ανατοκισμός.

Άσκηση 4

Επιχειρηματίας καταθέτει κάθε τέλος του έτους (28/12/20XX) για τρία έτη τα χρηματικά ποσά των €200, €250 και €300. Ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού είναι 3%.

Να βρεθούν α. η τελική αξία της ράντας
β. η αρχική αξία της ράντας

Επίλυση

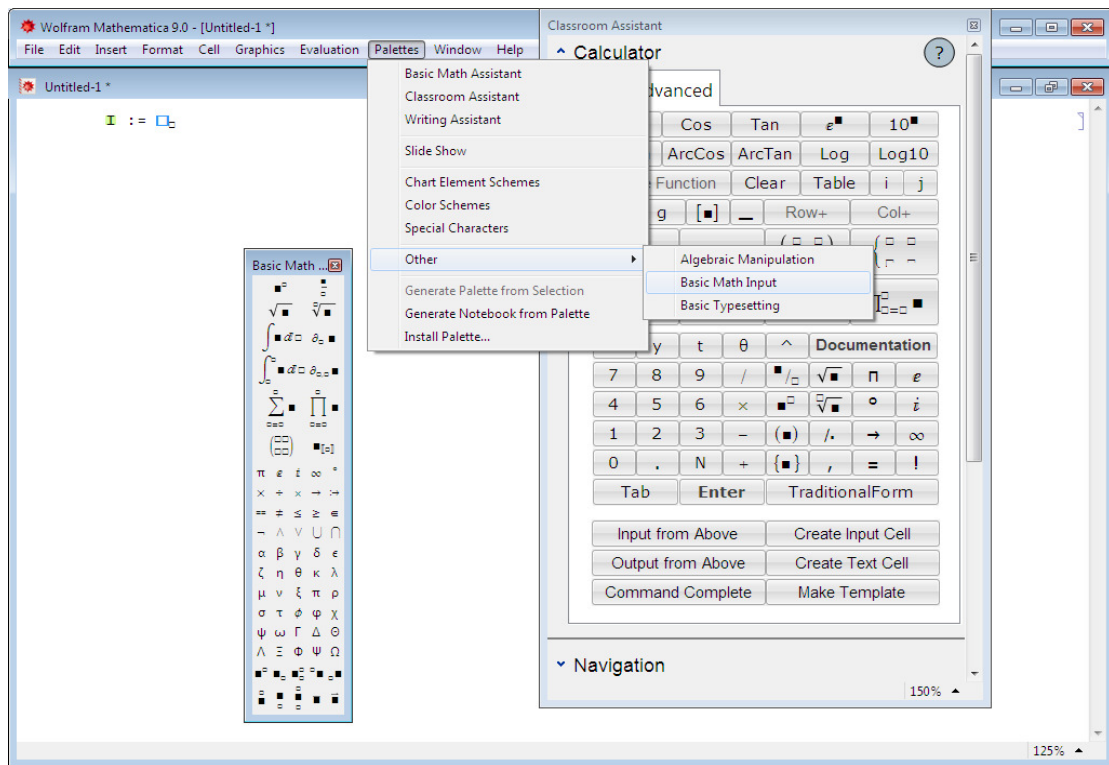
α. Για να βρούμε την τελική αξία της ράντας βρίσκουμε την αξία όλων των όρων της μαζί, στο τέλος της (τέλος ράντας, βλ. ορισμό). Τέλος της ράντας είναι η τρίτη χρονιά. Είναι βασικό να θυμόμαστε τον ορισμό της περιόδου της ράντας. Έτσι ο πρώτος όρος της ράντας, τα €200, θα ανατοκισθεί για δύο έτη, ο δεύτερος όρος της ράντας, τα €250 θα ανατοκισθούν για έναν χρόνο και ο τρίτος και τελευταίος όρος της ράντας, αυτός των €300, δεν θα ανατοκισθεί αφού δεν υπάρχει χρόνος ανατοκισμού και απλά θα προστεθεί.

$$S = 200(1+0,03)^2 + 250(1+0,03)^1 + 300$$

$$\Leftrightarrow S = 212 + 257,5 + 300$$

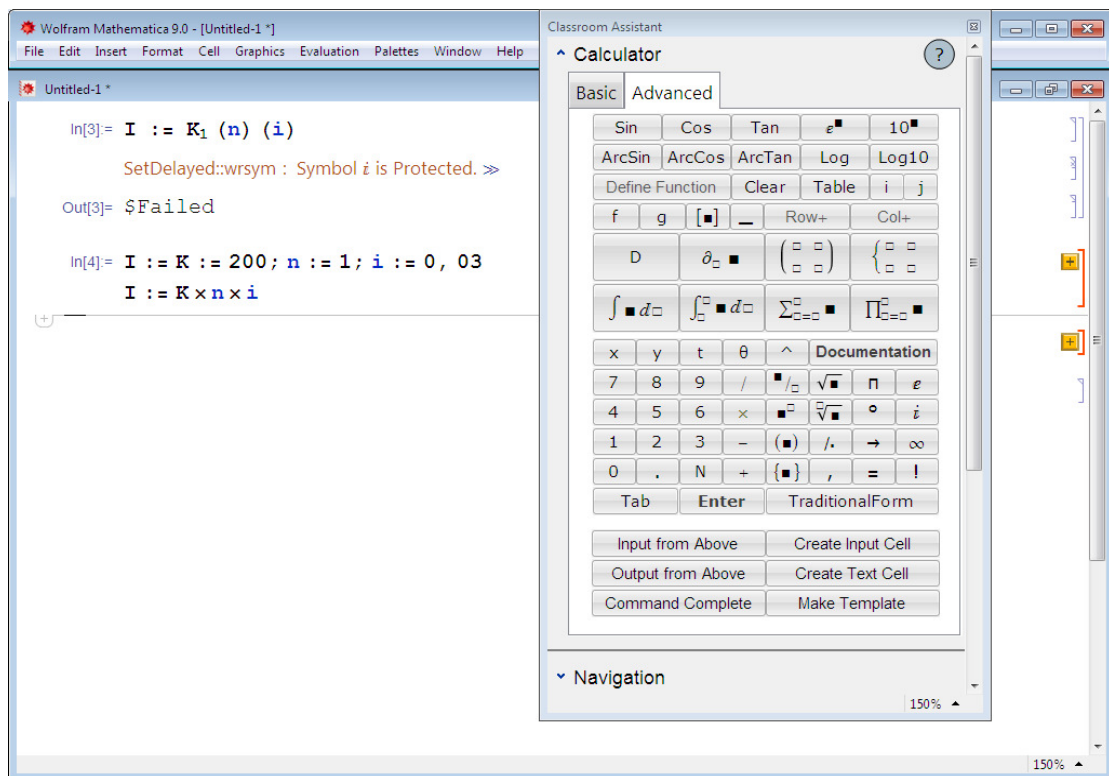
$$\Leftrightarrow S = 769,5$$

Στο notebook μου βρίσκω την παλέτα BasicMathInput (εικόνα 3) και εισάγω στην πράξη μου το σύμβολο για την απεικόνιση του K_1 , K_2 κλπ. και κάνω τις πράξεις δίνοντας τις εντολές που δείχνει η παρακάτω εικόνα. (εικόνα 4)



εικόνα

3



εικόνα

4

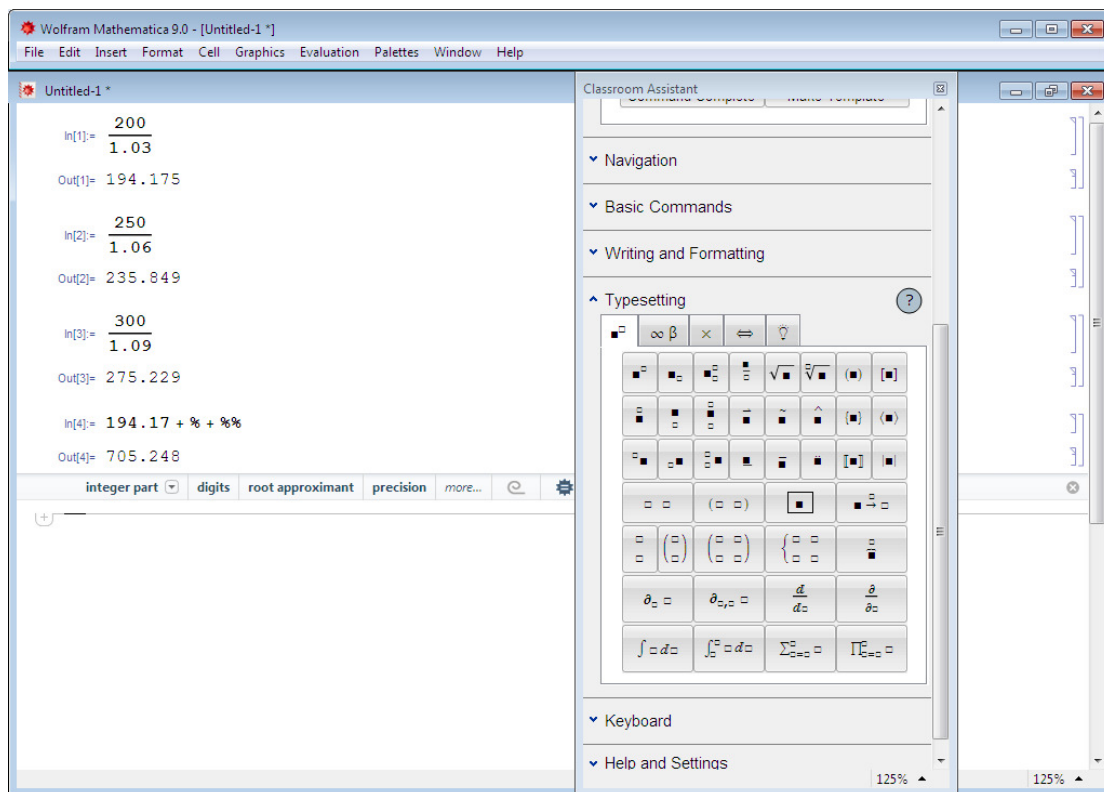
β. Για να βρω την αρχική αξία της ράντας αθροίζω τις πραγματικές αξίες των όρων της στην αρχή του 1^{ου} έτους.

$$A = \frac{200}{(1+0,03)^1} + \frac{250}{(1+0,03)^2} + \frac{300}{(1+0,03)^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 194,17 + 235,85 + 275,23$$

$$\Rightarrow A = 705,25$$

Στο mathematica δίνω τις εντολές και κάνω τις πράξεις χρησιμοποιώντας την παλέτα ClassroomAssistant για να εισάγω το κλάσμα και την δύναμη. Τέλος, για να υπολογιστεί το άθροισμα των τριών πράξεων, εισάγω το πρώτο αποτέλεσμα της διαίρεσης συν το σύμβολο τοις εκατό (%) συν δυο φορές το σύμβολο τοις εκατό (%%) για να προστεθούν και τα υπόλοιπα δυο αποτελέσματα των εντολών εξόδου. Στα ποσά της άσκησης έχουμε κάνει στρογγυλοποίηση. (εικόνα 5)



εικόνα

5

3.7 Αριθμοδείκτες

Η Ανάλυση λογιστικών καταστάσεων είναι μια συνήθης πρακτική ελέγχου ποιότητας και βασική υποχρέωση ενός οικονομολόγου – λογιστή.

Μια ανάλυση που εξετάζει στοιχεία μιας επιχειρηματικής μονάδας – εταιρείας απαιτεί συστηματικό έλεγχο και ακολουθεί το τρίπτυχο: αρχή, μέση και τέλος. Αυτό σημαίνει πως ένας αναλυτής πρέπει να διενεργεί αναλύσεις που αφορούν δεδομένα του παρόντος αλλά και του μέλλοντος. «Μια συστηματική ανάλυση απαιτεί την

διεξαγωγή διαχρονικών (*time-series*) και διαστρωματικών (*crosssectional*) συγκρίσεων μεταξύ επιχειρήσεων.» Γκίκας, 2002, σελ. 43.

Οι αριθμοδείκτες αποτελούν βασικό μέσο διεξαγωγής της ανάλυσης χρηματοοικονομικών καταστάσεων. Παρακάτω θα επιλυθούν ασκήσεις με αριθμοδείκτες από τις τέσσερις κατηγορίες αριθμοδεικτών.

Οι οικονομικές συναρτήσεις αποτελούν βασικά εργαλεία στην χρηματοοικονομική επιστήμη ενώ η χρήση τους είναι απαραίτητη σε οικονομοτεχνικές μελέτες και αξιολόγηση επενδυτικών σχεδίων. Η χρηματοοικονομική ανάλυση εξάλλου είναι βασικός πυλώνας της οικονομικής επιστήμης και της Λογιστικής επιστήμης.

Τυπολόγιο βασικών οικονομικών συναρτήσεων

FVfuturevalue, μελλοντική αξία μιας επένδυσης

PVpresentvalue, το ποσό που καταβάλλουμε σήμερα για μια επένδυση

R το επιτόκιο

AYTM (Approximate Yield To Maturity)

$$\text{AYTM} = \frac{\text{FV-MP}}{\text{FV} + \text{MP}}$$

Τοκομερίδιο + χρόνος μέχρι την λήξη

$$\text{Τοκομερίδιο} = r \times I$$

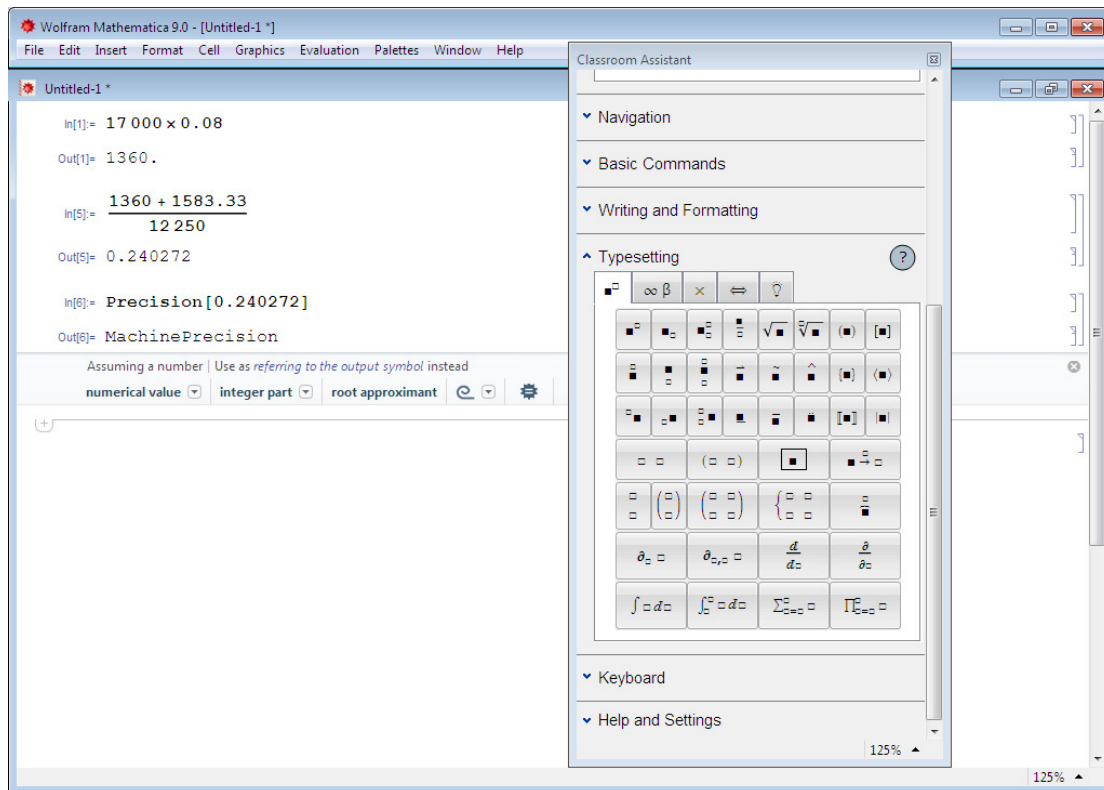
Άσκηση 5

Ομολογία που λήγει σε 6 χρόνια με ονομαστική αξία € 17.000 και εκδοτικό επιτόκιο (r) 8% έχει σημερινή αξία €7.500. Να βρεθεί η απόδοση του ομολόγου χρησιμοποιώντας το mathematica.

Επίλυση

Χρησιμοποιώντας τους τύπους AYTM και του τοκομεριδίου και αντικαθιστώντας έχω το παρακάτω αποτέλεσμα. (εικόνα 7)

Το αποτέλεσμα 0,24 επί τοις εκατό δηλαδή 24% «είναι η απόδοση του ομολόγου που θα έχει ο επενδυτής που θα αποφασίσει να διαθέσει σήμερα € 7.500 για την εν λόγω ομολογία, την οποία θα κρατήσει ως την λήξη της και θα επανεπενδύσει και τα 6 έτησια τοκομερίδια με την απόδοση στην λήξη (*yieldtomaturity – YTM*)» (Χριστόπουλος και Ντόκας, 2012)



εικόνα

6

Άσκηση 6

Να υπολογίσετε τον αριθμοδείκτη άμεσης ρευστότητας στο mathematica λαμβάνοντας υπόψιν τα παρακάτω στοιχεία και να επεξηγήσετε το αποτέλεσμα.

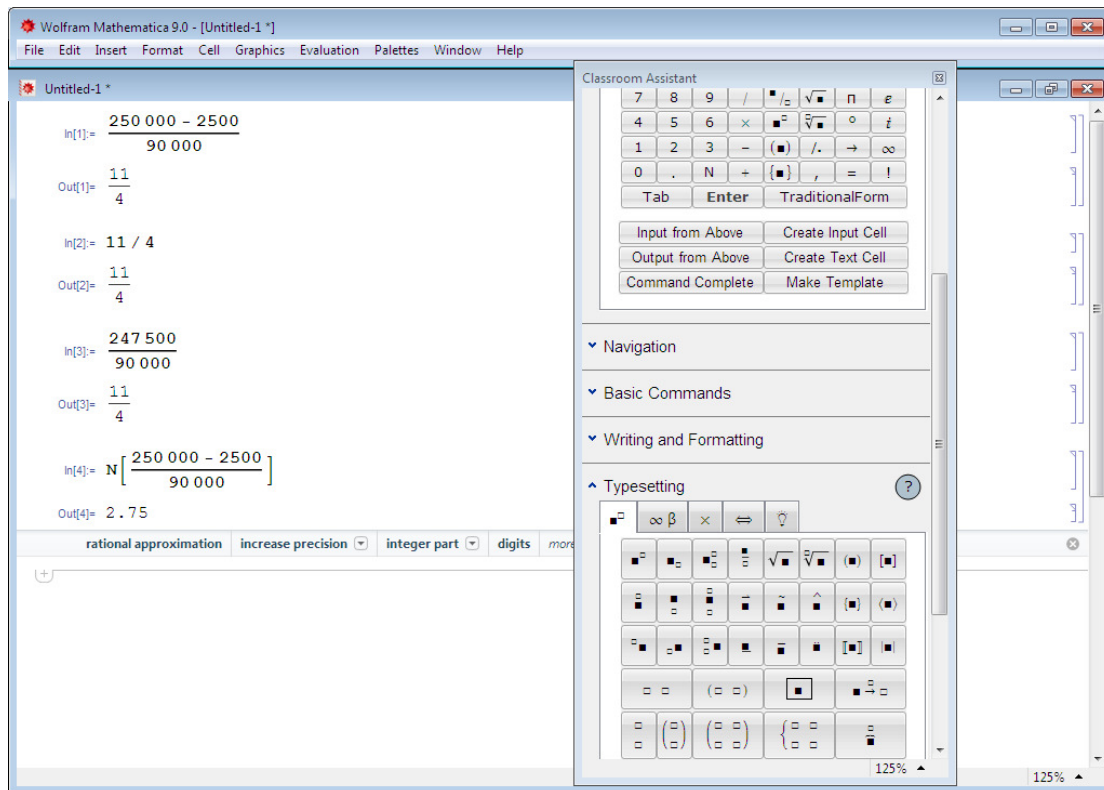
1. Κ.Ε. 250.000
2. Αποθέματα 2.500
3. Βραχυπρόθεσμες υποχρεώσεις 9,00

Επίλυση

Ο αριθμοδείκτης ή δείκτης άμεσης ρευστότητας βρίσκεται από τον παρακάτω τύπο και δείχνει τον βαθμό κάλυψης των βραχυπρόθεσμων υποχρεώσεων μια εταιρείας από τα στοιχεία Ενεργητικού της που μπορούν να ρευστοποιηθούν ή ρευστοποιούνται άμεσα (κυκλοφορούν Ενεργητικό και αποθέματα). Ο αριθμοδείκτης άμεσης ρευστότητας αποδεικνύει υψηλή ρευστότητα όταν λαμβάνει τιμές μεγαλύτερες της μονάδας.

Κυκλοφορούν Ενεργητικό - Αποθέματα

Αριθμοδείκτης Άμεσης Ρευστότητας =



εικόνα

7

Παρατηρούμε πως εισάγοντας τους αριθμούς απλά σαν κλάσμα, το mathematica μας δίνει το αποτέλεσμα επακριβώς σε κλασματική μορφή. Για να έχουμε το αποτέλεσμα σε μορφή δεκαδικού εισάγουμε την έκφραση $N[\text{expression}]$ από την παλέτα ClassroomAssistant \rightarrow Advanced και ύστερα το κλάσμα. (εικόνα 8)

Άσκηση 7

Επιχείρηση παρουσιάζει τα εξής αποτελέσματα στον Ισολογισμό της 31/12/20XX. Να υπολογίσετε τον παρακάτω αριθμοδείκτη δραστηριότητας (activityratio) με χρήση του mathematica λαμβάνοντας υπόψιν τα παρακάτω στοιχεία.

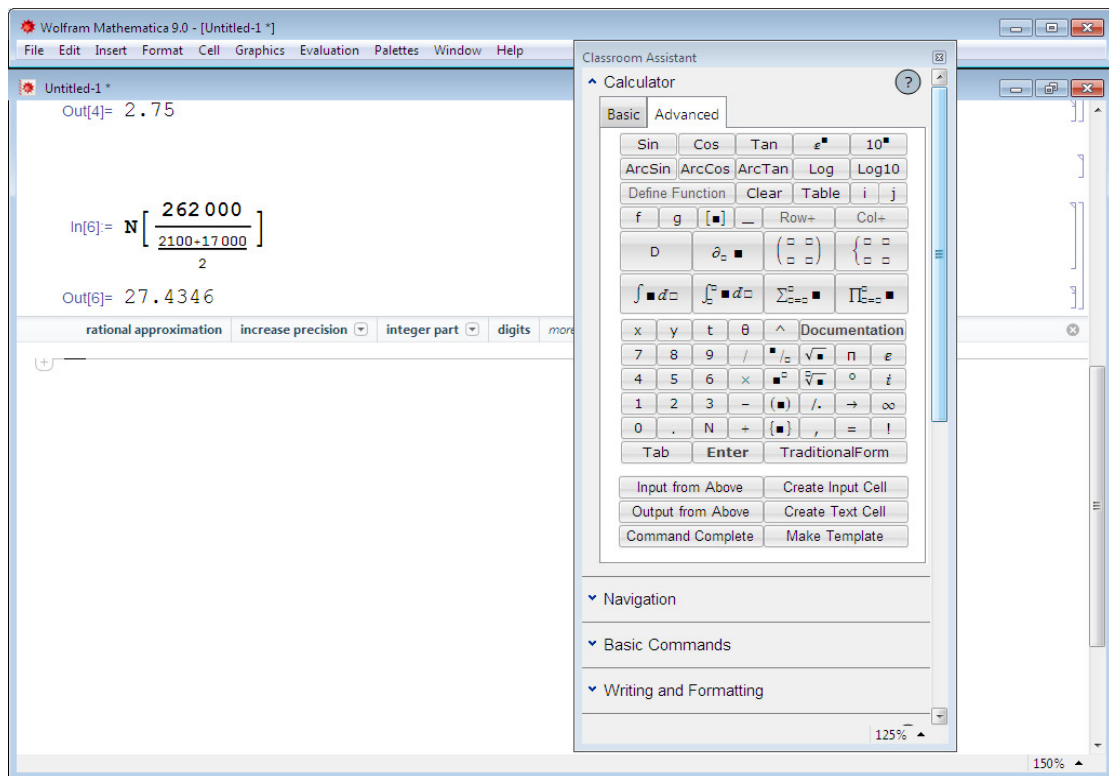
1. Κόστος πωληθέντων 262.000
2. Αρχικό απόθεμα 2.100
3. Τελικό απόθεμα 17.000

$\text{Κυκλοφοριακή ταχύτητα Αποθεμάτων} = \frac{\text{Κόστος πωληθέντων}}{\text{Μέσος όρος αποθεμάτων}}$

Επίλυση

Ο αριθμοδείκτης Κυκλοφοριακής ταχύτητας Αποθεμάτων απεικονίζει την ταχύτητα με την οποία ρευστοποιούνται τα αποθέματα μιας/της επιχείρησης.

Ο Μέσος Όρος Αποθεμάτων υπολογίζεται προσθέτοντας αρχικό και τελικό απόθεμα και το αποτέλεσμα προς 2.



εικόνα

8

Άσκηση 8

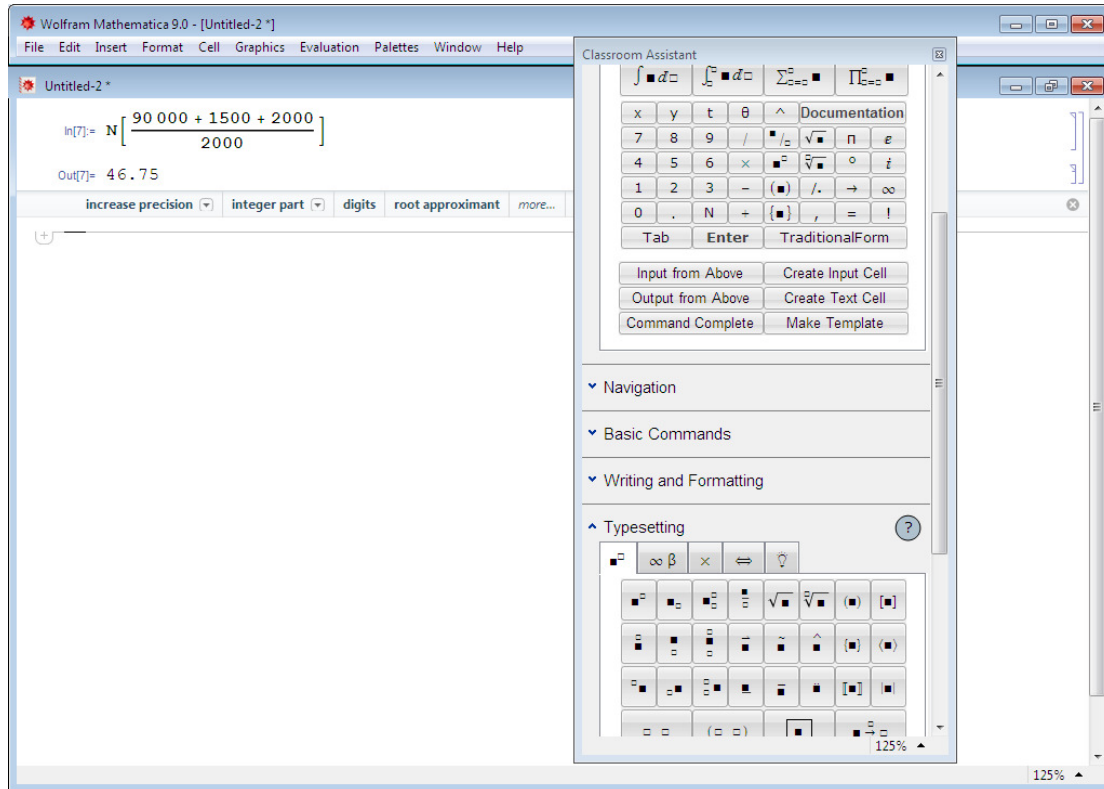
Να υπολογίσετε τον Αριθμοδείκτη Κάλυψης Τόκων με Κέρδη με βάση τα στοιχεία που σας δίνονται και χρήση του mathematica.

1. Καθαρά Κέρδη € 90.000,00
2. Φόροι εισοδήματος € 1.500,00
3. Σύνολο χρεωστικών ετήσιων τόκων € 2.000,00

Επίλυση

Ο αριθμοδείκτης Κάλυψης Τόκων με Κέρδη στόχο έχει να απεικονίσει την σχέση μεταξύ τόκων και μικτών κερδών πριν την αφαίρεση φόρων και τόκων (ΚΠΤΦ) που είναι διαθέσιμα για την εξυπηρέτηση των ετήσιων τόκων και απαιτεί μια σειρά από προσαρμογές ώστε τα κέρδη της επιχείρησης να προκύπτουν από την κύρια δραστηριότητά της. (Γκίκας Χ. Δημήτριος, Αθήνα, 2002). Υπολογίζεται από τον παρακάτω τύπο:

$\text{Δείκτης Κάλυψης Τόκων με Κέρδη} = \frac{\text{ΚΠΤΦ}}{\text{Τόκοι έξοδα ή Σύνολο Χρεωστικών τόκων}}$
--



εικόνα

9

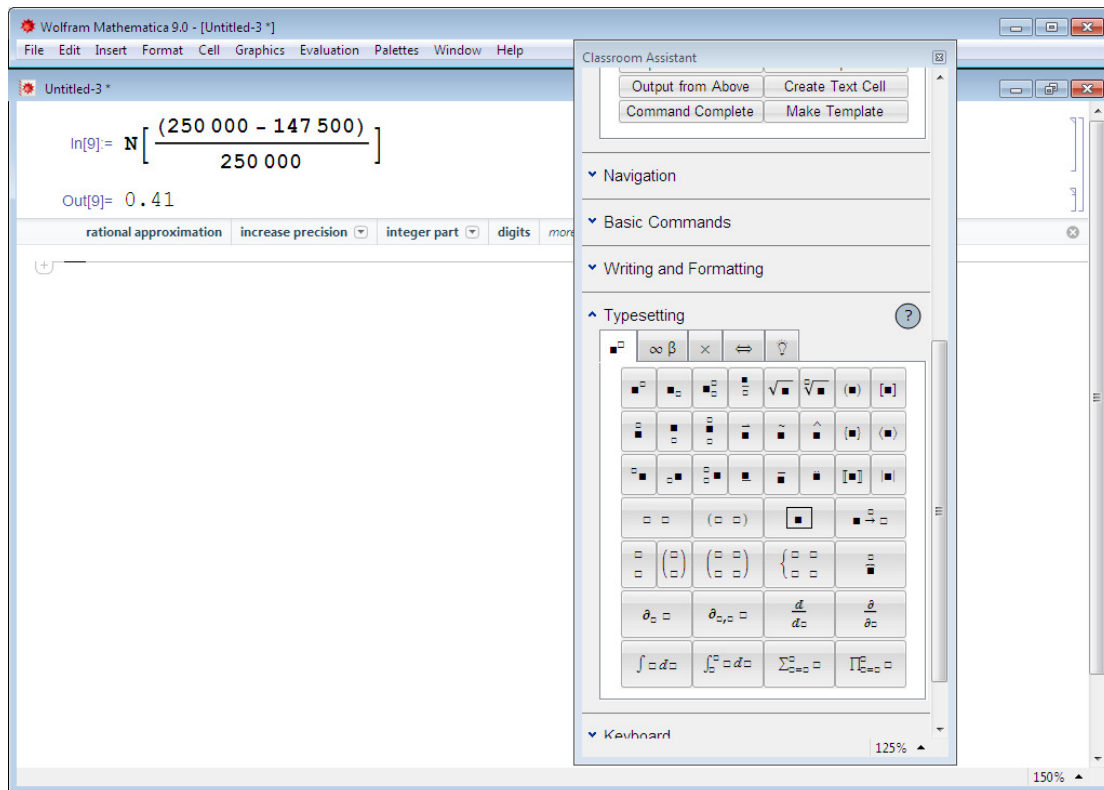
Άσκηση 9

Επιχείρηση παρουσιάζει τα εξής οικονομικά αποτελέσματα στον Ισολογισμό της 31/12/20XX. Να υπολογίσετε τον Αριθμοδείκτη Αποδοτικότητα (ProfitabilityRatio) που σας δίνεται και να απεικονίσετε το αποτέλεσμα στο mathematica με χρήση παλέτας.

1. Πωλήσεις € 250.000,00
2. Κόστος πωληθέντων € 147.500,00

$\text{Δείκτης Μικτού Περιθωρίου Κέρδους} = \frac{\text{Πωλήσεις} - \text{Κόστος πωληθέντων}}{\text{Πωλήσεις}}$

Επίλυση (εικόνα 10)



εικόνα

Για να επιλύσουμε την άσκηση εισάγουμε από την παλέτα την έκφραση $\mathbf{N}[\text{expr}]$ από την παλέτα ClassroomAssistant→Advanced και στην συνέχεια τα σύμβολα του κλάσματος από την καρτέλα Typesetting. Στον αριθμητή μπορώ να εισάγω απευθείας το σύμβολο (■) αφού έχω δυο ποσά και αφαίρεση μεταξύ τους και αφού συμπληρώσουμε και τον παρονομαστή κάνουμε αριστερό κλικ έξω από το κλάσμα της έκφρασης και πληκτρολογούμε Shift&Enter. Το αποτέλεσμα θα είναι δεκαδικός αριθμός.

Συμπεράσματα

Το mathematica ως λογισμικό αποτελεί σημαντικό εργαλείο σε πολλούς επιστημονικούς κλάδους. Δεν είναι μόνο η άνεση που χαρίζει το περιβάλλον του στον χρήστη αλλά και η ελευθερία δημιουργίας νέων συναρτήσεων και εντολών που προσφέρει. Το mathematica ως λογισμικό κερδίζει συνεχώς έδαφος στην εκπαίδευση και στον επαγγελματικό κόσμο.

Μέσω συζητήσεών μου με τελειόφοιτους Αρχιτεκτονικής σχολής, Τεχνολογικών Σχολών, Μαθηματικούς και απόφοιτους Σχολών Πληροφορικής, εντόπισα πως το λογισμικό mathematica ήταν ήδη γνωστό σε εκείνους και μάλιστα έκαναν λόγο για ένα εύκολο στην χρήση λογισμικό για το οποίο είχαν διδαχτεί και είχαν χρησιμοποιήσει κατά την διάρκεια των σπουδών τους, ορισμένοι δε και αργότερα της αποφοίτησής τους.

Το λογισμικό πακέτο μαθηματικών mathematica αποτελεί κορυφαίο εργαλείο, ήδη από το 1988 οπότε και κυκλοφόρησε για πρώτη φορά στην αγορά από τον δημιουργό του Stephen Wolfram. Από τότε μέχρι και σήμερα αποτελεί ένα από τα καλύτερα λογισμικά στην υπηρεσία των μαθηματικών και στα χέρια ενός εκπαιδευτικού μαθηματικού για την άποψη και εύκολη απεικόνιση συναρτήσεων και γραφημάτων στους μαθητές του.

Από την παραπάνω ανάλυση πιστεύω πως ο χρήστης έχει ήδη πάρει μια ιδέα για το λογισμικό αυτό που πάνω από όλα το χαρακτηρίζει η απλότητα. Ο χρήστης που έχει ασχοληθεί με Microsoft προγράμματα εύκολα μπορεί να χειριστεί το mathematica αλλά και ο χρήστης που δεν έχει ιδιαίτερα ασχοληθεί με σχετικά προγράμματα, επίσης εύκολα θα κατανοήσει και θα χειριστεί το λογισμικό αυτό.

Βιβλιογραφία

Αθανασίου, Γ. (2007). *Οδηγός για το λογισμικό Mathematica*.

Βικιπαίδεια, λήμμα : *Ολοκληρωτικός Λογισμός*. Κύριο λήμμα Ολοκλήρωμα
Γκίκας, Χ. Δ. (2002). *Η ανάλυση και οι χρήσεις των λογιστικών καταστάσεων*,
εκδόσεις Μπένου.

Δασίλας, Δρ. Α. (2012-2013). *Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά*
Κούγιας, Γ. και Γεωργίου, Δ. (2004). *Χρηματο-οικονομικά Μαθηματικά*.
Εκδόσεις νέων τεχνολογιών, έκδοση 1^η

Χριστόπουλος, Α. και Ντόκας, Ι. (2012). *Θέματα Τραπεζικής και Χρηματοοικονομικής Θεωρίας*. Εκδόσεις Κριτική.

Boutsikas, M.V. (2004-2008). *Εισαγωγή στο Mathematica*.

Spivak, M.(2000). *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός λογισμός*. Πανεπιστημιακές
Εκδόσεις Κρήτης. Έκδοση έκτη.

Ανακεφαλαιοποίηση Recapitalization(2016). Ανακτήθηκε από:
<https://www.dailyeconomics.gr/oikonomikoi-oroi/anakefalaiopoihsh>

Βικιπαίδεια, ορισμός για το λήμμα *Λογισμός*. (15/10/2018). Ανακτήθηκε από:
<https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%9B%CE%BF%CE%B3%CE%B9%CF%83%CE%BC%CF%8C%CF%82>

Η συντριπτική υπεροχή του Λάμπνιτς επί του Νέυτωνα. (26/09/2011). Ανακτήθηκε από:
<https://physicsgg.me/2011/09/26/%CE%B7-%CF%83%CF%85%CE%BD%CF%84%CF%81%CE%B9%CF%80%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AE-%CF%85%CF%80%CE%B5%CF%81%CE%BF%CF%87%CE%AE-%CF%84%CE%BF%CF%85-%CE%BB%CE%AC%CE%BC%CF%80%CE%BD%CE%B9%CF%84%CF%82-%CE%B5%CF%80/>

Κάλφας, Β. και Ζωγραφίδης, Γ. (2012).4.4. *Τά πάντα ρεῖ*: Ανακτήθηκε από:
http://www.greek-language.gr/digitalResources/ancient_greek/history/filosofia/page_022.html

Λήμμα ορισμού του set delayed operator. *Wolfram language and system documentation center*. Ανακτήθηκε από:
<http://reference.wolfram.com/language/ref/SetDelayed.html>

Μίτλεπτον, Χ. (2016). *Η κεφαλαιοποίηση του τόκου*. Ανακτήθηκε από:
<https://psychonomika.info/2016/08/21/%CE%B7-%CE%BA%CE%B5%CF%86%CE%B1%CE%BB%CE%B1%CE%B9%CE%BF%CF%80%CE%BF%CE%AF%CE%B7%CF%83%CE%B7-%CF%84%CE%BF%CF%85-%CF%84%CF%8C%CE%BA%CE%BF%CF%85>
<https://www.dailyeconomics.gr/oikonomikoi-oroi/anakefalaiopoihsh>
Ορισμός για το λήμμα δίσεκτο έτος. Ανακτήθηκε από:
<https://www.sansimera.gr/articles/420>
