ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Θεωρητική μελέτη Πιθανοτικών και Στατιστικών μοντέλων και υλοποίηση εφαρμογών τους με τη χρήση λογισμικού πακέτου Matlab

Όνομα σπουδαστή : Μπρούμας Γεράσιμος
ΑΜ : 1987

Επιβλέπων καθηγητής: Ασημακόπουλος Γεώργιος

Πάτρα, Φεβρουάριος 2020

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή

Πάτρα, Ημερομηνία

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

1. Ονοματεπώνυμο, Υπογραφή
2. Ονοματεπώνυμο, Υπογραφή
3. Ονοματεπώνυμο, Υπογραφή

Ευχαριστίες

Αρχικά θέλω να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές μου για τη πολύτιμη συμβολή τους στην ολοκλήρωση των προπτυχιακών σπουδών μου που ολοκληρώνονται με την παρούσα εργασία. Πολλές ευχαριστίες οφείλω στους γονείς μου που χωρίς την αμέριστη υλική και ηθική τους υποστήριξη θα ήταν αδύνατον να καταφέρω τον σκοπό μου. Επίσης θέλω να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου κ. Γεώργιο Ασημακόπουλο για την καθοδήγηση και την επίβλεψη της παρούσας πτυχιακής εργασίας

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη βασικών εννοιών της Θεωρίας Πιθανοτήτων και της Θεωρίας της Απαρίθμησης και της Στατιστικής. Η θεωρία Πιθανοτήτων και η Συνδυαστική παίζει πολύ σπουδαίο ρόλο σε πολλές πτυχές της καθημερινής ζωής από την Ασφάλιση έως την Μετεωρολογία και τα Παίγνια αλλά και στον τομέα της Πληροφορίας και της επεξεργασίας της. Στο πρώτο κεφάλαιο επιχειρούμε μια σύντομη εισαγωγή στην θεωρία των πιθανοτήτων καθώς και στην ιστορική εξέλιξη του κλάδου. Ακολουθεί στο δεύτερο κεφάλαιο η απαραίτητη μαθηματική περιγραφή. Στο τρίτο κεφάλαιο περιγράφονται οι βασικές αρχές απαρίθμησης και πώς αυτές συνδέονται με τις πιθανότητες. Τέλος στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι βασικές κατανομές των τυχαίων μεταβλητών που έχουν εφαρμογή στη Στατιστική. Στο πειραματικό μέρος της εργασίας με τη χρήση του λογισμικού πακέτου Matlab, παρουσιάζουμε την υλοποίηση για τέσσερις από τις σημαντικότερες πιθανοτικές και στατιστικές εφαρμογές των κατανομών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο : ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

1.1 Οι πιθανότητες ως μέρος των μαθηματικών

Ιστορικά, έχουν υπάρξει δύο βασικές κινητήριες δυνάμεις για την ανάπτυξη νέων μαθηματικών: Η ανθρώπινη πνευματική περιέργεια και η ευρύτερη επιστημονική ή κοινωνική αναγκαιότητα της κάθε εποχής. Για παράδειγμα, οι πρακτικές ανάγκες της μέτρησης εδαφών και αποστάσεων στην αρχαιότητα αποτέλεσαν σημαντικό κίνητρο για την ανάπτυξη της επίπεδης (Ευκλείδειας) γεωμετρίας. Παρομοίως, η ανάγκη για την κατανόηση και την πρόβλεψη της κίνησης των στερεών σωμάτων – όπως, π.χ., των πλανητών ή των βλημάτων που χρησιμοποιούνταν σε πολεμικές μάχες – ήταν ένα από τα βασικότερα κίνητρα για την ανάπτυξη του διαφορικού λογισμού από τον Νεύτωνα και τον Leibniz. Ένα πιο πρόσφατο, και ίσως πιο οικείο, παράδειγμα είναι η ανάπτυξη μιας νέας μαθηματικής θεωρίας για την περιγραφή και την ακριβή μέτρηση της «πληροφορίας». Στην εποχή μας, η έννοια της πληροφορίας βρίσκεται παντού – από τις πληροφορίες που μεταφέρονται ως δεδομένα μέσω του διαδικτύου και των κινητών τηλεφώνων, μέχρι τη μελέτη των πληροφοριών που είναι αποθηκευμένες στον ανθρώπινο εγκέφαλο και στο DNA. Πώς μετριέται και περιγράφεται η πληροφορία, ως φυσικό μέγεθος, στην καθεμία από τις πιο πάνω περιπτώσεις; Το επιστημονικό πεδίο της θεωρίας πληροφορίας δίνει κάποιες πρώτες απαντήσεις σε αυτά τα ερωτήματα. Μάλλον το σημαντικότερο (και αρχαιότερο) κίνητρο για την ανάπτυξη των πιθανοτήτων δηλαδή μιας μαθηματικά αυστηρής θεωρίας για την κατανόηση τυχαίων φαινομένων και, γενικότερα, καταστάσεων στις οποίες υπάρχει ένα σημαντικό μέρος αβεβαιότητας – ήταν το ανθρώπινο πάθος για τον τζόγο. Γύρω στα μέσα και προς τα τέλη του 19ου αιώνα, είχε ωριμάσει αρκετά η συστηματική μελέτη των σχετικά απλών φυσικών φαινομένων, όπως για παράδειγμα η μελέτη της κίνησης δύο απομονωμένων πλανητών κάτω από την επίδραση της αμοιβαίας βαρυτικής τους έλξης και είχε ξεκινήσει να αναπτύσσεται έντονο επιστημονικό ενδιαφέρον για τη μελέτη «πολύπλοκων» συστημάτων. Για παράδειγμα, ένα δωμάτιο περιέχει περίπου 1021 μόρια αέρα. Ακόμα κι αν γνωρίζουμε με ακρίβεια τους νόμους που διέπουν την κίνησή τους, είναι πρακτικά αδύνατο να λύσουμε ένα σύστημα 1021 διαφορικών εξισώσεων, ώστε να προβλέψουμε, π.χ., τη θερμοκρασία του αέρα στο δωμάτιο. Μια αποτελεσματικότερη προσέγγιση είναι να θεωρήσουμε τις θέσεις και τις ταχύτητες των μορίων τυχαίες και να αποπειραθούμε να κάνουμε μια στατιστική ανάλυση. Αυτή η προσέγγιση, η οποία αποτέλεσε την αφετηρία της σημαντικής νέας περιοχής της στατιστικής φυσικής, έδωσε την τελική ώθηση που απαιτούνταν ώστε οι πιθανότητες να αναπτυχθούν ως μια πλήρης μαθηματική θεωρία στο πρώτο μισό του 20ού αιώνα.

1.2 Ιστορική ανάπτυξη

Η αφετηρία της συστηματικής μελέτης των Πιθανοτήτων ως επιστημονικού πεδίου τοποθετείται στα μέσα του 17ου αιώνα, και συγκεκριμένα στην αλληλογραφία μεταξύ δύο σημαντικών μαθηματικών της εποχής, του Pascal και του Fermat, με αντικείμενο την κατανόηση ενός τυχερού παιχνιδιού.Μετά τη θεμελίωση των βασικών εννοιών από τους Pascal-Fermat, η σκυτάλη πέρασε σε έναν από τους σημαντικότερους μαθηματικούς όλων των εποχών, τον Gauss. Στα χέρια του

Gauss, οι πιθανότητες έπαψαν να αποτελούν ένα συνονθύλευμα μεμονωμένων παραδειγμάτων και απλών τεχνικών. Ο Gauss διατύπωσε και απέδειξε μια σειρά από θεμελιώδη αποτελέσματα, τα οποία αποτελούν τη βάση ολόκληρης της σύγχρονης θεωρίας πιθανοτήτων – αλλά και της στατιστικής – έως και σήμερα. Το σημαντικότερο από αυτά τα αποτελέσματα είναι το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (Κ.Ο.Θ.). Με απλά λόγια, το Κ.Ο.Θ. μας λέει δύο πράγματα: Πρώτον, πως μέσα από την πλήρη αταξία μερικές φορές γεννιέται τάξη. Για παράδειγμα, αν στρίψουμε ένα νόμισμα δυο-τρεις φορές, είναι απολύτως αδύνατο να προβλέψουμε τι θα συμβεί· αν, ας πούμε, θα φέρουμε πρώτα Γράμματα και μετά Κορώνα ή το αντίστροφο. Αλλά, αν στρίψουμε το νόμισμα χίλιες ή δέκα χιλιάδες φορές, τότε είναι σχεδόν βέβαιο ότι το ποσοστό των φορών που φέραμε Κορώνα θα είναι μεταξύ 49% και 51%. Επιπλέον, το Κ.Ο.Θ. μάς επιτρέπει να υπολογίσουμε, κατά προσέγγιση, πόσο μικρή είναι η πιθανότητα το ποσοστό από Κορώνες να μην είναι μεταξύ 49% και 51%.

΄Ετσι, από τις πολλές επαναλήψεις του τυχαίου και απρόβλεπτου, προκύπτει τάξη και προβλεψιμότητα. ΄Οπως θα δούμε σε επόμενα κεφάλαια, η βασική ιδιότητα πάνω στην οποία στηρίζεται αυτή η συμπεριφορά, είναι η ανεξαρτησία, δηλαδή το γεγονός ότι τα αποτελέσματα των διαδοχικών ρίψεων του νομίσματος είναι ανεξάρτητα το ένα από το άλλο. Ως την εποχή του Gauss και μέχρι μερικές δεκαετίες αργότερα, η μελέτη των πιθανοτήτων βασιζόταν σχεδόν εξολοκλήρου στην υπόθεση της ανεξαρτησίας. Για παράδειγμα, σε μια ιατρική μελέτη, είναι λογικό να υποθέσουμε ότι το πόσο αποτελεσματικά δρα ένα φάρμακο έχει διακυμάνσεις από ασθενή σε ασθενή, αλλά είναι εξίσου λογικό να υποθέσουμε ότι η αποτελεσματικότητα του φαρμάκου είναι ανεξάρτητη από τον εκάστοτε ασθενή. Παρομοίως, αν κάνουμε μια δημοσκόπηση διαλέγοντας τυχαία μέλη ενός πληθυσμού, είναι λογικό να υποθέσουμε πως το να επιλέξουμε έναν συγκεκριμένο άνθρωπο για τη δημοσκόπηση δεν θα επηρεάσει τις πολιτικές προτιμήσεις κάποιου άλλου. Και στις δύο αυτές περιπτώσεις μπορούμε, λοιπόν, να υποθέσουμε πως διαδοχικά δείγματα – μετρήσεις της ανταπόκρισης των ασθενών σε ένα φάρμακο και προτιμήσεις ψηφοφόρων – είναι στατιστικά ανεξάρτητα. Αλλά σε πιο πολύπλοκα φαινόμενα η υπόθεση της ανεξαρτησίας δεν είναι ρεαλιστική. Για παράδειγμα, ας πούμε πως έχουμε έναν αλγόριθμο επεξεργασίας κειμένου και θέλουμε να αναλύσουμε τη συνήθη συμπεριφορά του. Μια που δεν ξέρουμε εκ των προτέρων πάνω σε ποιο κείμενο θα εφαρμοστεί, λογικά θα καταφύγουμε στο να εξετάσουμε πώς συμπεριφέρεται σε κάποιο «τυχαίο» κείμενο. Αν όμως περιγράψουμε ένα τυχαίο κείμενο ως μια ακολουθία τυχαίων γραμμάτων τότε σίγουρα δεν μπορούμε να θεωρήσουμε πως τα διαδοχικά γράμματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους – εκτός κι αν είμαστε προετοιμασμένοι να δεχθούμε ως «κείμενο» μια ακολουθία γραμμάτων όπως η: ασλδ΄Κ αΣλκδν οι θζαίς .θΔΙοαιξΜ-ΟΙα τρ88 Δλκσαξ λκλ,09ος ,σαμδ! Ο πρώτος ερευνητής που μελέτησε συστηματικά τις τυχαίες ακολουθίες που αποτελούνται από όχι ανεξάρτητα αλλά συσχετισμένα μεταξύ τους δείγματα, ήταν ο Markov. Στην απλούστερη μορφή τους, οι ακολουθίες τέτοιων συσχετισμένων δειγμάτων ονομάζονται «αλυσίδες Markov», και η μελέτη τους αποτελεί κεντρικό μέρος πολλών ερευνητικών περιοχών της σύγχρονης επιστήμης και τεχνολογίας. Είναι αξιοσημείωτο πως ένα από τα βασικά κίνητρα του Markov ήταν η περιγραφή κειμένων φυσικής γλώσσας μέσω των πιθανοτήτων. Ακόμη και στη σημερινή εποχή του Internet, του Google και του YouTube, πολλοί από τους πιο δημοφιλείς αλγορίθμους που χρησιμοποιούνται καθημερινά από εκατομμύρια ανθρώπους καθώς «σερφάρουν» στο διαδίκτυο, είναι βασισμένοι σε μοντέλα που περιγράφουν το περιεχόμενο των σελίδων του WWW μέσω των αλυσίδων Markov. Ο πιο πρόσφατος μεγάλος σταθμός στην ιστορία των πιθανοτήτων είναι το 1933. Μέχρι τότε, παρά τη μεγάλη ώθηση που είχε πάρει η μελέτη τυχαίων φαινομένων στη φυσική και στο πρωτοεμφανιζόμενο τότε πεδίο της στατιστικής, οι πιθανότητες παρέμεναν μια μαθηματικά κακόφημη επιστημονική περιοχή. Ο λόγος ήταν πως δεν είχαν ακόμα ενταχθεί, με την αυστηρή έννοια, στο κεντρικό κομμάτι των μαθηματικών. Δεν είχαν, δηλαδή, θεμελιωθεί αξιωματικά, όπως η γεωμετρία, η ανάλυση, η θεωρία συνόλων και όλες οι υπόλοιπες βασικές περιοχές των μαθηματικών. Αυτήν τη θεμελίωση κατάφερε το 1933 ο σπουδαίος Ρώσος μαθηματικός A.N. Kolmogorov, του οποίου η τεράστια επιρροή στην επιστημονική εξέλιξη του 20ού αιώνα είναι εξαιρετικά έντονα αισθητή ως τις μέρες μας.

1.3 Πιθανότητες και πληροφορική

Τις τελευταίες δύο δεκαετίες, η χρήση της θεωρίας πιθανοτήτων στην πληροφορική έχει ενταθεί σε πάρα πολύ μεγάλο βαθμό. Προχωρημένες και πολύπλοκες τεχνικές από τις πιθανότητες αναπτύσσονται και βρίσκουν εφαρμογή σε όλο και πιο ευρείες και δύσκολες περιοχές της επιστήμης υπολογιστών. Συγκεκριμένα, τεχνικές και βασικές έννοιες των πιθανοτήτων παίζουν κεντρικό ρόλο, μεταξύ άλλων, στις εξής περιοχές:

- **Περιγραφή και προσομοίωση πολύπλοκων συστημάτων**. Π.χ., ένα μεγάλο δίκτυο που αποτελείται από πολλούς υπολογιστές (όπως το internet), ή ένα δίκτυο κινητής τηλεφωνίας, είναι αδύνατον να περιγραφεί με απόλυτη ακρίβεια. Νέοι υπολογιστές προστίθενται στο δίκτυο, κάποιοι αποσυνδέονται, ενώ και η συνδεσμολογία διαρκώς αλλάζει καθώς δημιουργούνται νέες συνδέσεις ή κάποιες υπάρχουσες παύουν να λειτουργούν. Επιπλέον, οι απαιτήσεις για τη μεταφορά δεδομένων αλλάζουν κάθε στιγμή με απρόβλεπτο τρόπο. Έτσι αναγκαστικά καταφεύγουμε σε μια πιθανοκρατική περιγραφή του δικτύου.

- **Πιθανοκρατική ανάλυση αλγορίθμων**. Συχνά παρατηρούμε ένας αλγόριθμος να έχει θεωρητικά απαγορευτικά μεγάλη πολυπλοκότητα, αλλά στην πράξη να είναι πολύ αποτελεσματικός. Αυτό συμβαίνει γιατί, ενώ η παραδοσιακή έννοια της πολυπλοκότητας βασίζεται στην ανάλυση της συμπεριφοράς του αλγορίθμου στη χειρότερη περίπτωση (σύμφωνα με τη λεγόμενη worst case analysis), στη μεγάλη πλειονότητα των περιπτώσεων μπορεί να είναι πολύ αποτελεσματικός. Η λεγόμενη πιθανοκρατική (ή average case) ανάλυση δίνει μια εξήγηση γι΄ αυτό το φαινόμενο: Αν θεωρήσουμε τα δεδομένα εισόδου τυχαία, τότε σε πολλές περιπτώσεις μπορούμε να δείξουμε ότι, με πιθανότητα πολύ κοντά στο 100%, η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου είναι πολύ σημαντικά μικρότερη από αυτήν της χειρότερης περίπτωσης.

- **Randomized αλγόριθμοι.** Υπάρχει μια κατηγορία αλγορίθμων, οι λεγόμενοι randomized ή τυχαιοκρατικοί αλγόριθμοι, οι οποίοι σε κάποια βήματα κατά την εκτέλεσή τους κάνουν «τυχαίες» επιλογές. Για παράδειγμα, το πρωτόκολλο επικοινωνίας του Ethernet χρησιμοποιεί τυχαίους αριθμούς για να αποφασίσει πότε θα ξαναζητήσει πρόσβαση στο δίκτυο. Η χρήση της τυχαιότητας – σε αυτόν και πολλούς άλλους σημαντικούς αλγορίθμους – όχι μόνο απλοποιεί τη δομή του αλγορίθμου, αλλά επιτυγχάνει σημαντικά καλύτερη συμπεριφορά του συστήματος. Το τίμημα που επιφέρει είναι πως πάντα υπάρχει μια μικρή πιθανότητα δυσλειτουργίας. Βάσει σωστού σχεδιασμού και προσεκτικής μαθηματικής ανάλυσης, αυτή η πιθανότητα μπορεί να καταστεί τόσο μικρή, ώστε το κέρδος από την άποψη της πολυπλοκότητας και της ευκολίας να είναι πολύ μεγαλύτερο.

Κλείνοντας, αναφέρουμε πως άλλες περιοχές της πληροφορικής στις οποίες χρησιμοποιούνται συστηματικά μέθοδοι των πιθανοτήτων περιλαμβάνουν, μεταξύ άλλων:

- το σχεδιασμό αλγορίθμων επεξεργασίας πολυμεσικών (multimedia) δεδομένων, π.χ., για τη συμπίεση ήχου, βίντεο και εικόνας,
- την ανάπτυξη μεθόδων μηχανικής μάθησης και ανάκτησης πληροφοριών,
- την κρυπτογραφία,
- τη θεωρητική θεμελίωση των βασικών εννοιών πολυπλοκότητας και υπολογισιμότητας (μηχανές Turing, NP-complete και NP-hard προβλήματα, κλπ.).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

2.1 Ορισμός, παραδείγματα και ιδιότητες

Σ΄ αυτό το σύντομο κεφάλαιο θα δώσουμε, για πρώτη φορά, έναν αυστηρά μαθηματικό ορισμό της έννοιας της πιθανότητας. Αν και, εκ πρώτης όψεως, ο ορισμός φαίνεται δυσνόητος και πολύ απομακρυσμένος από αυτό που διαισθητικά ονομάζουμε «πιθανότητα», όπως θα δούμε στα παραδείγματα που ακολουθούν, στην πράξη είναι πολύ απλός και εύχρηστος.

Ορισμός 2.1 (Μέτρο πιθανότητας) Έστω ένας χώρος πιθανότητας Ω και έστω F το δυναμοσύνολο του Ω, δηλαδή το σύνολο που έχει ως στοιχεία όλα τα ενδεχόμενα $A \subset \Omega$ (συμπεριλαμβανομένου και του κενού συνόλου $\emptyset$). Ένα μέτρο πιθανότητας είναι μια συνάρτηση $P : F \to [0, 1]$ η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Για οποιοδήποτε ενδεχόμενο $A \in F$ έχουμε: $P(A) \geq 0$.
2. .Πάντοτε έχουμε: $P(\Omega) = 1$.
3. Αν δύο ενδεχόμενα $A,B \in F$ είναι ξένα (δηλαδή $A \cap B = \emptyset$), τότε, $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$.

Και γενικότερα, αν A1, A2, . . . είναι μια οποιαδήποτε (πεπερασμένη ή όχι) ακολουθία ξένων ενδεχομένων (δηλαδή $Ai \cap Aj = \emptyset$ για κάθε i 6= j), τότε, $P(A1 \cup A2 \cup \cdots) = P(A1) + P(A2) + \cdots$.Πριν εξετάσουμε τις συνέπειες του ορισμού, ας δούμε πώς ορίζεται το μέτρο πιθανότητας σε ένα πολύ απλό παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.1 Ρίχνουμε ένα δίκαιο ζάρι. Όλα τα δυνατά αποτελέσματα περιγράφονται από τα στοιχεία του αντίστοιχου χώρου πιθανότητας $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα, A = «ζυγό αποτέλεσμα» = {2, 4, 6}, B = «μονό αποτέλεσμα» = {1, 3, 5}, και τα έξι στοιχειώδη ενδεχόμενα Ei = {i}, για κάθε i = 1, 2, 3, 4, 5, 6. Εφόσον το ζάρι είναι δίκαιο, απαιτούμε το αντίστοιχο μέτρο πιθανότητας P που περιγράφει αυτό το πείραμα να δίνει την ίδια πιθανότητα, δηλαδή 1/6, σε κάθε δυνατό αποτέλεσμα, δηλαδή να ικανοποιεί P(Ei) = 1/6 για κάθε i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα του ενδεχομένου A (η οποία διαισθητικά είναι προφανώς ίση με 1/2), παρατηρούμε όπως νωρίτερα πως το A μπορεί να εκφραστεί ως ένωση στοιχειωδών ενδεχομένων, δηλαδή, $A = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\} = E2 \cup E4 \cup E6$, και πως όλα τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι ξένα μεταξύ τους. ΄Αρα από την τρίτη ιδιότητα του ορισμού ενός μέτρου πιθανότητας έχουμε, $Pr(A) = P(A) = P(E2 \cup E4 \cup E6) = P(E2) + P(E4) + P(E6) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2$. Παρομοίως υπολογίζουμε την πιθανότητα του μονού αποτελέσματος, $Pr(B) = P(B) = P(E1 \cup E3 \cup E5) = P(E1) + P(E3) + P(E5) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2$.

Παρατηρήσεις

1. Το πιο πάνω παράδειγμα ανήκει σε μια ευρεία κατηγορία προβλημάτων όπου έχουμε ισοπίθανα στοιχειώδη ενδεχόμενα,

2. Τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι πάντα ξένα μεταξύ τους. Κατά συνέπεια, αν το Ω είναι πεπερασμένο, για να οριστεί το μέτρο πιθανότητας για όλα τα ενδεχόμενα αρκεί να οριστεί για τα στοιχειώδη ενδεχόμενα. Ο λόγος είναι απλός. ΄Εστω ένα οποιοδήποτε ενδεχόμενο Α το οποίο αποτελείται από τα στοιχεία ω1, ω2, . . . , ωk. Εκφράζοντας το Α ως την ένωση των ξένων ενδεχομένων, $A = \{\omega1\} \cup \{\omega2\} \cup \cdots \cup \{\omega k\}$, και χρησιμοποιώντας την τρίτη ιδιότητα του ορισμού του μέτρου πιθανότητας, μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα του Α από τις πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων $\{\omega i\}$ ως, $P(A) = P(\{\omega1\}) + P(\{\omega2\}) + \cdots + P(\{\omega k\})$.

3. ΄Οταν δύο ενδεχόμενα Α,Β δεν είναι ξένα, τότε η πιθανότητα της ένωσής τους γενικά δεν ισούται με το άθροισμα των επιμέρους πιθανοτήτων. Π.χ., στο πιο πάνω παράδειγμα έχουμε ότι το $A = \{2, 4, 6\} = \{2, 4, 6\} \cup \{2\} = A \cup E2$, αλλά φυσικά P(A) 6= P(A) + P(E2) αφού 1/2 6= 1/2 + 1/6!

Παράδειγμα 2.2 Σε ένα εργαστήριο πληροφορικής λειτουργούν τρία δίκτυα, από τα οποία, κατά τις τελευταίες 200 μέρες:

- 30% των ημερών, τουλάχιστον ένα δίκτυο δεν λειτουργεί,
- 10% των ημερών, ακριβώς δύο δεν λειτουργούν,
- 5% των ημερών, δεν λειτουργεί κανένα δίκτυο.

Εξετάζουμε το τι συμβαίνει μια «τυχαία» μέρα. ΄Εστω Ω το σύνολο όλων των διακοσίων ημερών, και έστω Bi το ενδεχόμενο του να λειτουργούν ακριβώς i από τα τρία δίκτυα, για i = 0, 1, 2, 3. Για παράδειγμα, το B2 είναι το σύνολο των ημερών εκείνων κατά τις οποίες δύο δίκτυα λειτουργούν κι ένα όχι.

Από τις υποθέσεις μας έχουμε ότι Pr(B0) = 5% = 0.05 και Pr(B1) = 10% = 0.1. Επιπλέον, η πρώτη υπόθεση μας λέει ότι Pr(B′3) = 30% = 0.3 (γιατί;). Αλλά ποιες είναι οι πιθανότητες των B2 και B3;

Για το B3 παρατηρούμε ότι, εφόσον το «λειτουργούν και τα τρία δίκτυα» είναι το αντίθετο του «τουλάχιστον ένα δεν λειτουργεί», διαισθητικά περιμένουμε να ισχύει ότι, Pr({λειτουργούν και τα τρία δίκτυα}) = 1− Pr({τουλάχιστον ένα δεν λειτουργεί}), δηλαδή ότι, Pr(B3) = 1− Pr(B′3) = 1− 30% = 0.7. Πράγματι, αυτή η διαισθητική Για το B2 τώρα, παρατηρούμε ότι το υπόθεση είναι σωστή, όπως θα δούμε αμέσως μετά το παράδειγμα. ενδεχόμενο B’3 του να μην λειτουργεί τουλάχιστον ένα δίκτυο μπορεί να εκφραστεί ως ένωση, B′3 = B0 ∪B1 ∪B2, όπου τα B0, B1 και B2 είναι εξ ορισμού ξένα. ΄Αρα, 0.3 = Pr(B′3) = Pr(B0) + Pr(B1) + Pr(B2) = 0.05 + 0.1 + Pr(B2), οπότε βρίσκουμε πως Pr(B2) = 0.15 ή 15%.

Λήμμα 2.1 Για οποιοδήποτε ενδεχόμενο A και οποιοδήποτε μέτρο πιθανότητας P, έχουμε: P(A′) = 1− P(A). (2.1)

Απόδειξη: ΄Εστω ότι το A είναι υποσύνολο του χώρου πιθανότητας **Ω**, όπου, από τη δεύτερη ιδιότητα του ορισμού ενός μέτρου πιθανότητας, έχουμε P(**Ω**) = 1. Προφανώς μπορούμε να εκφράσουμε το **Ω** ως την ένωση **Ω** = A ∪ A′, όπου εξ ορισμού τα A και A′ είναι ξένα. ΄Αρα, από την τρίτη ιδιότητα του ορισμού του μέτρου πιθανότητας, 1 = P(**Ω**) = P(A) + P(A′), που αποδεικνύει τη ζητούμενη σχέση (2.1).

Παράδειγμα 2.3 Ρίχνουμε ένα δίκαιο ζάρι 2 φορές, οπότε ο χώρος πιθανότητας **Ω** αποτελείται από τα 36 δυνατά αποτελέσματα: **Ω** = {11, 12, 13, 14, 15, 16 21, 22,26……61,62,66}. Εφόσον το ζάρι είναι δίκαιο, λογικά υποθέτουμε ότι το καθένα από τα 36 στοιχειώδη ενδεχόμενα έχει την ίδια πιθανότητα, δηλαδή 1/36. Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα των εξής ενδεχομένων:

A = «ασόδυο» = {12, 21},

B = «εξάρες» = {66},

Γ = «6 την πρώτη φορά» = {61, 62, 63, 64, 65, 66},

Δ = «σύνολο 6» = {15, 24, 33, 42, 51}.

Για το A έχουμε, από τις πιο πάνω υποθέσεις,

Pr(A) = Pr({12, 21}) = Pr({12} ∪ {21})= Pr({12}) + Pr({21})=1/36=1/18≈ 0.0555

όπου και πάλι χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι πάντοτε ξένα μεταξύ τους. Για το B απλώς έχουμε, Pr(B) = Pr{66} = 1/36, άρα υπάρχει διπλάσια πιθανότητα να φέρουμε ασόδυο από το να φέρουμε εξάρες.

Με την ίδια λογική, για το Γ έχουμε,

Pr(Γ) = Pr({61} ∪ {62} ∪ {63} ∪ {64} ∪ {65} ∪ {66})= Pr({61}) + Pr({62}) + Pr({63}) + Pr({64}) + Pr({65}) + Pr({66})= 6/36 = 1/6,

δηλαδή μόλις αποδείξαμε το διαισθητικά προφανές – ότι η πιθανότητα του να φέρουμε 6 την πρώτη φορά είναι 1/6. Και ακολουθώντας πάλι την ίδια λογική, εύκολα υπολογίζουμε ότι, εφόσον το Δ αποτελείται από 5 στοιχεία και όλα τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, Pr(Δ) = 5/36. Αυτή η παρατήρηση ισχύει πιο γενικά, όπως διατυπώνεται στο πιο κάτω λήμμα.

Λήμμα 2.2 Αν όλα τα στοιχειώδη ενδεχόμενα ενός (πεπερασμένου) χώρου πιθανότητας **Ω** είναι ισοπίθανα, τότε η πιθανότητα ενός οποιουδήποτε ενδεχομένου A⊂ **Ω** είναι ίση με: Pr(A) = #A #**Ω** = πλήθος στοιχείων του A πλήθος στοιχείων του **Ω**.

Απόδειξη: Έστω ότι ο χώρος πιθανότητας **Ω** = {ω1, ω2, . . . , ωn} αποτελείται από τα #**Ω** = n στοιχεία ωi, για i = 1, 2, . . . , n, έστω P το μέτρο πιθανότητας, και έστω p η πιθανότητα ενός οποιουδήποτε στοιχειώδους ενδεχομένου, δηλαδή p = Pr{ωi} για κάθε i. Από τις ιδιότητες του ορισμού του μέτρου πιθανότητας έχουμε, 1 = P(Ω) = P (n⋃ i=1 {ωi}) = n∑ i=1 P({ωi}) = np, άρα έχουμε p = 1/n. Έστω τώρα ένα οποιοδήποτε ενδεχόμενο A = {α1, α2, . . . , αk} που αποτελείται από #A = k στοιχεία. Τότε έχουμε, P(A) = P (k⋃ i=1 {αi}) = n∑ i=1, P({αi}) = kp = k 1 n = #A #Ω

Κανόνες πιθανότητας (1–5)

Για οποιοδήποτε μέτρο πιθανότητας P:

1. $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$, και $0 \leq P(A) \leq 1$, για κάθε ενδεχόμενο A.

2. Αν $A \subset B$, τότε $P(A) \leq P(B)$.

3. Αν τα ενδεχόμενα A1, A2, . . . είναι ξένα (δηλαδή Ai ∩Aj = ∅ για κάθε i 6= j), τότε: P(A1 ∪A2 ∪ · · ·) = P(A1) + P(A2) + · · · .

4. $P(A') = 1 - P(A)$, για κάθε ενδεχόμενο A.

5. Αν όλα τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, τότε για κάθε ενδεχόμενο A: Pr(A) = #A #Ω = πλήθος στοιχείων του A πλήθος στοιχείων του Ω

2.2 Γενικός ορισμός του μέτρου πιθανότητας

Αν ο χώρος πιθανότητας είναι διακριτός (δηλαδή είτε πεπερασμένος είτε άπειρος αλλά αριθμήσιμος), τότε ο ορισμός που δώσαμε για το μέτρο πιθανότητας σε αυτό το κεφάλαιο είναι μαθηματικά πλήρης και απολύτως επαρκής για όλες τις αντίστοιχες εφαρμογές. Αλλά για την περίπτωση άπειρων και μη αριθμήσιμων χώρων πιθανότητας, ο ορισμός αυτός είναι απαραίτητο να τροποποιηθεί. Ο λόγος μπορεί να εξηγηθεί από το εξής παράδειγμα. Έστω ότι θέλουμε να ορίσουμε την έννοια ενός «τυχαίου πραγματικού αριθμού» στο διάστημα [0, 1]. Σε αυτή την περίπτωση κάθε ενδεχόμενο A είναι ένα υποσύνολο του διαστήματος [0, 1], και το A περιγράφει το ενδεχόμενο ο τυχαίος αυτός αριθμός να ανήκει στο A. Για παράδειγμα, αν το A = [0, 1/2], λογικά θα θέλαμε να ορίσουμε ένα μέτρο πιθανότητας P που να μας λέει ότι η ένας τυχαίος πραγματικός αριθμός μεταξύ 0 και 1 να είναι μικρότερος ή ίσος με 1/2, ισούται με 1/2. Με άλλα λόγια, να έχει P(A) = 1/2. Γενικά, θα θέλαμε για κάθε υποδιάστημα B του [0, 1], η τιμή του μέτρου πιθανότητας P(B) να ισούται με το μήκος αυτού του διαστήματος.

Εδώ συμβαίνει κάτι πραγματικά αξιοσημείωτο και μάλλον απροσδόκητο. Μπορεί να αποδειχθεί πως είναι αδύνατον να οριστεί ένα μέτρο πιθανότητας στο $\Omega = [0, 1]$ το οποίο να ικανοποιεί τις τρεις συνθήκες του ορισμού μας και επίσης να δίνει, για κάθε υποδιάστημα $\subset [0, 1]$, $P(B) =$ μήκος του B. Η βαθύτερη αιτία της δυσκολίας είναι η ύπαρξη κάποιων πολύ πολύπλοκων, κατά κάποιον τρόπο παθολογικών, υποσυνόλων B του $[0, 1]$. Η λύση σε αυτό το πρόβλημα είναι να περιορίσουμε τα υποσύνολα του χώρου πιθανότητας Ω στα οποία απαιτούμε να ορίζεται το μέτρο πιθανότητας. Αυτή η παρατήρηση αποτελεί την αφετηρία μιας μεγάλης υποπεριοχής της μαθηματικής ανάλυσης, η οποία ονομάζεται θεωρία μέτρου, αλλά με την οποία δεν θα ασχοληθούμε περαιτέρω επί του παρόντος και γενικά σε αυτό το βιβλίο. Αρκεί να θυμάστε πως, όταν ο χώρος πιθανότητας δεν είναι αριθμήσιμος, υπάρχουν κάποια σπανιότατα παθολογικά ενδεχόμενα για τα οποία δεν μπορούμε να ορίσουμε την πιθανότητά τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο : ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Οπως είδαμε σε κάποια παραδείγματα των προηγουμένων κεφαλαίων, συχνά συναντάμε καταστάσεις όπου όλες οι δυνατές εκφάνσεις ενός τυχαίου πειράματος έχουν την ίδια πιθανότητα. Αυτά αποτελούν μια επιμέρους αλλά σημαντική κατηγορία προβλημάτων, και σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε πώς μπορούν να επιλυθούν εύκολα με τη χρήση κάποιων απλών αποτελεσμάτων της συνδυαστικής. Η αφετηρία μας είναι ο κανόνας πιθανότητας #5 τον οποίο είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο:

Κανόνας πιθανότητας #5

Αν όλα τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, τότε, για κάθε ενδεχόμενο A: Pr(A) = #A#Ω= πλήθος στοιχείων του A πλήθος στοιχείων του **Ω**.

Για να εφαρμοστεί αυτός ο κανόνας, προφανώς πρέπει να είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε το πλήθος των στοιχείων που περιέχονται σε διάφορα σύνολα – συγκεκριμένα στο χώρο πιθανότητας **Ω** και στο ενδεχόμενο A το οποίο μας ενδιαφέρει σε κάθε περίπτωση. Η συνδυαστική είναι ο μαθηματικός τομέας που μας προσφέρει ακριβώς τα εργαλεία που χρειαζόμαστε για αυτούς τους υπολογισμούς. Πιο κάτω θα δούμε μια σειρά από σχετικά απλά αποτελέσματα της συνδυαστικής, και μέσα από παραδείγματα θα δείξουμε με ποιους τρόπους αυτά τα αποτελέσματα χρησιμοποιούνται για την απάντηση ερωτημάτων σε προβλήματα πιθανοτήτων.

3.1 Διατάξεις, συνδυασμοί, επιλογές και πιθανότητες

Ιδιότητα 3.1 ΄Οταν συνδυάζονται δύο πειράματα, εκ των οποίον το πρώτο έχει N δυνατά αποτελέσματα και το δεύτερο έχει M δυνατά αποτελέσματα, τότε το νέο πείραμα έχει $M \times N$ δυνατά αποτελέσματα. Πιο αυστηρά μαθηματικά μιλώντας, αν το σύνολο A περιγράφει όλα τα δυνατά αποτελέσματα του πρώτου πειράματος και αντίστοιχα το B τα αποτελέσματα του δεύτερου, τότε όλα τα δυνατά αποτελέσματα του συνδυασμού των δύο πειραμάτων περιγράφεται από το καρτεσιανό τους γινόμενο, $A\times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$, και το πλήθος των στοιχείων του προφανώς ικανοποιεί: $\#(A\times B) = (\#A)(\#B)$.

Παράδειγμα 3.1 (α΄) Εφόσον η ρίψη ενός ζαριού έχει 6 δυνατά αποτελέσματα, οι δύο διαδοχικές ρίψεις έχουν 6×6 = 36 δυνατά αποτελέσματα, οι τρεις διαδοχικές ρίψεις έχουν 6×6×6 = 216 δυνατά αποτελέσματα, και γενικά οι k διαδοχικές ρίψεις έχουν 6k δυνατά αποτελέσματα.

(β΄) Επιλέγουμε έναν από τους 5 υπολογιστές ενός εργαστηρίου (5 δυνατά αποτελέσματα) και αποφασίζουμε να του εγκαταστήσουμε λειτουργικό σύστημα windows ή linux (2 δυνατά αποτελέσματα). Συνολικά υπάρχουν 5× 2 = 10 δυνατά αποτελέσματα.

Παράδειγμα 3.2 Τρία άτομα, ας τους πούμε Α, Β και Γ, τρέχουν σε έναν αγώνα 100 μέτρων. Υποθέτουμε ότι η τελική κατάταξη είναι εντελώς τυχαία. Ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει ο Β;

Κατ΄ αρχάς παρατηρούμε ότι ο χώρος πιθανότητας είναι το σύνολο όλων των δυνατών διατάξεων των Α, Β και Γ: **Ω** = {123, 132, 213, 231, 312, 321}, όπου, για παράδειγμα, το 132 μας λέει πως ο Α βγήκε πρώτος, ο Β τρίτος και ο Γ δεύτερος. Το ενδεχόμενο που μας ενδιαφέρει, δηλαδή το να κερδίσει ο Β, αντιστοιχεί στο σύνολο {213, 312}. Εφόσον «η τελική κατάταξη είναι εντελώς τυχαία», υποθέτουμε ότι όλα τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, και από τον κανόνα πιθανότητας #5 έχουμε : Pr(«κέρδισε ο Β») = Pr({213, 312}) = #{213, 312}/ #**Ω** = 2/6= 1/3, όπως είναι και διαισθητικά προφανές.

Εδώ απλώς απαριθμήσαμε όλες τις δυνατές κατατάξεις για τα 3 άτομα. Αλλά αν, αντί για τρεις, συμμετείχαν στον αγώνα 100 άνθρωποι, πόσες δυνατές κατατάξεις θα υπήρχαν; Μπορούμε να σκεφτούμε την τελική κατάταξη ως το αποτέλεσμα του συνδυασμού 100 επιμέρους «πειραμάτων»: Για την πρώτη θέση έχουμε 100 επιλογές. Έχοντας αποφασίσει ποιος είναι πρώτος, για τη δεύτερη θέση έχουμε 99 επιλογές, κ.ο.κ. Έτσι, εφαρμόζοντας διαδοχικά την Ιδιότητα 3.1, για την τελική κατάταξη έχουμε, 100× 99× 98× · · · × 3× 2× 1 = 100!, δυνατές κατατάξεις, δηλαδή 100! δυνατούς τρόπους που μπορούν να διαταχθούν 100 άτομα. Με το ίδιο ακριβώς σκεπτικό καταλήγουμε στο εξής συμπέρασμα:

Ιδιότητα 3.2 Υπάρχουν Ν ! δυνατές διατάξεις Ν αντικειμένων.

Παρατήρηση: Θυμίζουμε πως για κάθε ακέραιο αριθμό $N \geq 1$ το «N παραγοντικό» συμβολίζεται ως $N!$ και ορίζεται ως το γινόμενο $N! = N(N - 1) \cdot \cdot \cdot 2 \cdot 1$. Επίσης, για λόγους ευκολίας ορίζουμε συμβατικά το $0! = 1$.

Παράδειγμα 3.3 Έστω ότι στις βουλευτικές εκλογές συμμετέχουν 42 κόμματα. Άρα υπάρχουν $42! \approx 1051$ δυνατές κατατάξεις, αλλά πόσες δυνατές κατατάξεις έχουμε για τα 3 πρώτα κόμματα; Μπορούμε να σκεφτούμε το τελικό αποτέλεσμα ως το συνδυασμό τριών επιμέρους «πειραμάτων»: Για την πρώτη θέση έχουμε 42 επιλογές. Έχοντας αποφασίσει ποιο κόμμα είναι πρώτο, για τη δεύτερη θέση έχουμε 41, και παρομοίως για την τρίτη 40 επιλογές. Εφαρμόζοντας διαδοχικά την Ιδιότητα 4.1, το πλήθος των τελικών κατατάξεων για τα τρία πρώτα κόμματα είναι, $42\times 41\times 40 = 68880$. Γενικά, μπορούμε να ρωτήσουμε πόσες διαφορετικές διατάξεις μπορούμε να πετύχουμε, επιλέγοντας k από N αντικείμενα. Με το ίδιο σκεπτικό, έχουμε N επιλογές για το πρώτο, $(N - 1)$ για το δεύτερο, κ.ο.κ., μέχρι το αντικείμενο k, για το οποίο έχουμε $(N - k + 1)$ επιλογές. Άρα, από την Ιδιότητα 3.1, βρίσκουμε πως το πλήθος των τελικών διατάξεων είναι:

$$N(N - 1) \cdot\cdot (N - k + 2)(N - k + 1) = (N(N - 1) \cdot\cdot (N - k + 1) \cdot (N - k)!) / (N - k)! =$$

$$\frac{N!}{(N-k)!}.$$

Εχουμε έτσι αποδείξει το εξής:

Ιδιότητα 3.3 Το πλήθος όλων των δυνατών διατάξεων k αντικειμένων που επιλέγονται από N αντικείμενα ισούται με:

$$\cdot\ \frac{N!}{(N-k)!}$$

Παράδειγμα 4.4 Έστω ότι έχουμε μια συνηθισμένη τράπουλα 52 φύλλων. Από την Ιδιότητα 3.2 υπάρχουν $52! \approx 8\times 1067$ δυνατές διατάξεις για τα φύλλα της τράπουλας!

Αν επιλέξουμε 3 φύλλα στην τύχη, πόσες δυνατές (διατεταγμένες) τριάδες υπάρχουν; Από την Ιδιότητα 3.3, το πλήθος τους είναι, $52!/ (52- 3)! = 52\times 51\times 50\times 49! /49! =$

$52\times 51\times 50 = 132600$.

Αν υποθέσουμε τώρα ότι η επιλογή των τριών φύλλων είναι εντελώς τυχαία, ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου A να επιλέξουμε τρεις άσους; Εδώ ο χώρος πιθανότητας **Ω** αποτελείται από όλες τις δυνατές τριάδες φύλλων, που, όπως υπολογίσαμε, είναι #**Ω** = 132600, και εφόσον η επιλογή είναι εντελώς τυχαία υποθέτουμε ότι όλα τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα. Ως υποσύνολο του **Ω**, το ενδεχόμενο A αποτελείται από όλες τις δυνατές τριάδες άσων. Η Ιδιότητα 3.3 λοιπόν μας λέει ότι, εφόσον εξετάζουμε τις διατάξεις k = 3 φύλλων που μπορούν να επιλεχθούν από N = 4 (δηλαδή από τους τέσσερις άσους), έχουμε #A = 4!(4−3)! = 4!/1! = 24. ΄Αρα, από τον κανόνα πιθανότητας #5 έχουμε : Pr(«επιλέξαμε 3 άσους») = Pr(A) = #A #**Ω** = 24/ 132600 = 1/5525 ≈ 0.02%.

Παράδειγμα 3.5 Αν επιλέξουμε 5 άτομα από μια ομάδα 100 ατόμων, η Ιδιότητα 3.3 μας λέει πως υπάρχουν, 100! / (100− 5)! διατάξεις δυνατών 5άδων. Αλλά αν δεν μας ενδιαφέρει η διάταξη, δηλαδή η σειρά με την οποία επιλέγουμε τα 5 άτομα, πόσες διαφορετικές πεντάδες υπάρχουν; Γενικά, πόσες ομάδες k αντικειμένων μπορούν να προκύψουν, όταν αυτά επιλέγονται από N αντικείμενα; ΄Εστω ότι το πλήθος τους είναι x, δηλαδή υπάρχουν x μη διατεταγμένες ομάδες k αντικειμένων. Από την Ιδιότητα 3.2, κάθε τέτοια ομάδα μπορεί να διαταχθεί με k! τρόπους. ΄Αρα, το συνολικό πλήθος των διατεταγμένων ομάδων είναι x ·k!. Αλλά, από την Ιδιότητα 3.3, αυτό ισούται με N !/(N − k)!. ΄Αρα έχουμε, x · k! = N ! / (N − k)! , δηλαδή

x = N ! / k!(N − k)! .

Ιδιότητα 3.4 Το πλήθος όλων των δυνατών συνδυασμών (ή μη διατεταγμένων επιλογών) k αντικειμένων που επιλέγονται από N αντικείμενα ισούται με,

$\binom{N}{k} = \left(\frac{N!}{k!(N-k)!}\right)$, όπου το $\binom{N}{k}$ είναι ο συνήθης διωνυμικός συντελεστής

Παράδειγμα 3.6 ΄Οπως στο Παράδειγμα 3.5, επιλέγουμε 5 άτομα από 100. Αν δεν μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής, υπάρχουν,

100! / 5!(100− 5)! = 100× 99× 98× 96× 96× 95! 5!95! = 75287520, δυνατές πεντάδες που μπορούμε να επιλέξουμε. Έστω τώρα ότι τα 100 άτομα αποτελούνται από 40 άνδρες και 60 γυναίκες, και ότι η επιλογή μας είναι εντελώς τυχαία. Θα εξετάσουμε τα εξής ερωτήματα:

• Πόσες πεντάδες μπορούν να σχηματιστούν με 2 άνδρες και 3 γυναίκες;
• Ποια η πιθανότητα να επιλέξουμε μόνο μία γυναίκα;
• Ποια η πιθανότητα να μην επιλέξουμε καμία γυναίκα;

Για το πρώτο ερώτημα παρατηρούμε ότι το πείραμα μπορεί να χωριστεί σε δύο μέρη. Βάσει της Ιδιότητας 3.4 μπορούμε να επιλέξουμε 2 άνδρες από τους 40 με $\binom{40}{2}$ τρόπους, και 3 γυναίκες από τις 60 με $\binom{60}{3}$ τρόπους. ΄Αρα, ο συνδυασμός αυτών των δύο επιλογών, βάσει της Ιδιότητας 3.1, έχει, $\binom{40}{2}\binom{60}{3}$ = 40!60! / 2!38!3!57! = 40× 39× 60× 59× 58 2× 3× 2 = 26691600, δυνατά αποτελέσματα.

Για τα άλλα δύο ερωτήματα, ορίζουμε το χώρο πιθανότητας **Ω** ως το σύνολο όλων των δυνατών (μη διατεταγμένων) επιλογών 5 ατόμων από 100 (εφόσον σε αυτό το πρόβλημα δεν μας απασχολεί η σειρά με την οποία επιλέγονται), οπότε βάσει της Ιδιότητας 4.4 βρίσκουμε όπως παραπάνω ότι #**Ω** = $\binom{100}{5}$ = 75287520. Ορίζουμε επίσης και τα δύο ενδεχόμενα, A = {όλες οι πεντάδες που αποτελούνται από 4 άνδρες και μία γυναίκα}, B = {όλες οι πεντάδες που αποτελούνται μόνο από άντρες}. Με την ίδια συλλογιστική που χρησιμοποιήσαμε για το πρώτο ερώτημα έχουμε, από τις Ιδιότητες 3.4 και 3.1, ότι, #A = $\binom{40}{4}\binom{60}{1}$ = · · · = 5483400, #B = $\binom{40}{5}$ = · · · = 658008. [Παρατηρήστε πως στον υπολογισμό του #B δεν συμπεριλάβαμε την επιλογή της «καμίας γυναίκας από τις 60», αλλά αυτό δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα διότι το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορεί να γίνει αυτή η επιλογή ισούται με $\binom{60}{0}$ = 60! / 0!60! = 1.] Αφού θεωρούμε ότι η επιλογή γίνεται «εντελώς τυχαία», μπορούμε να εφαρμόσουμε τον πέμπτο κανόνα πιθανότητας, έτσι ώστε, Pr(«επιλέξαμε μόνο μία γυναίκα») = Pr(A) = #A #**Ω** = 5483400 / 75287520 ≈ 0.0728, Pr(«δεν επιλέξαμε καμία γυναίκα») = Pr(B) = #B #**Ω** = 658008 / 75287520 ≈ 0.0087.

Παράδειγμα 3.7 Επιλέγουμε τυχαία 3 βιβλία από 10, που αποτελούνται από 5 συγγράμματα μαθημάτων και 5 εγχειρίδια (manual) υπολογιστών. Ποια η πιθανότητα να είναι όλα εγχειρίδια; Να είναι δύο εγχειρίδια κι ένα σύγγραμμα; Ακριβώς όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, εφόσον δεν μας ενδιαφέρει η σειρά με την οποία επιλέγονται τα βιβλία, ορίζουμε, Ω = {«όλες οι μη διατεταγμένες τριάδες βιβλίων»}, Α = {«οι μη διατεταγμένες τριάδες εγχειριδίων»}, Β = {«οι μη διατεταγμένες τριάδες με 2 εγχειρίδια και ένα σύγγραμμα»}, και υπολογίζουμε,

$$\#\Omega = \binom{10}{3} = 120,$$

$$\#A = \binom{5}{3} = 10,$$

$$\#B = \binom{5}{2}\binom{5}{1} = 50,$$

οπότε έχουμε τις πιθανότητες,

Pr(«επιλέξαμε 3 manual») = Pr(A) = #A/ #Ω = 10/ 120 = 1/ 12 ,

Pr(«επιλέξαμε 2 manual και ένα σύγγραμα») = Pr(B) = #B / #Ω = 50/ 120 = 5/ 12.

Παράδειγμα 3.8 Σε κάποιες εκλογές είναι υποψήφιοι 3 φοιτητές και 7 καθηγητές. Εκλέγονται τυχαία τρεις και ζητάμε την πιθανότητα να εκλεγούν τουλάχιστον ένας φοιτητής και τουλάχιστον ένας καθηγητής. Πάλι με την ίδια συλλογιστική όπως στα δύο παραπάνω παραδείγματα, εφόσον δεν μας ενδιαφέρει η διάταξη των τριών ατόμων, υπολογίζουμε τη ζητούμενη πιθανότητα ως, Pr(«εκλέγονται ≥ 1 Φ και ≥ 1 Κ») = Pr ({«εκλέγονται 1 Φ και 2 Κ»} ∪ {«εκλέγονται 2 Φ και 1 Κ»}) = Pr(«εκλέγονται 1 Φ και 2 Κ») + Pr(«εκλέγονται 2 Φ και 1 Κ»), επειδή τα δύο ενδεχόμενα στη δεύτερη γραμμή παραπάνω είναι ξένα. ΄Αρα, τελικά έχουμε, Pr(«εκλέγονται ≥ 1 Φ και ≥ 1 Κ»)
$= \binom{3}{1}\binom{7}{2}\binom{10}{3} + \binom{3}{2}\binom{7}{1}\binom{10}{3}$ = 21/ 40 + 7/ 40 = 0.7.

Ας υποθέσουμε τώρα πως, ανάλογα με τη σειρά εκλογής, αυτοί που εκλέγονται παίρνουν διαφορετικούς ρόλους σε μια επιτροπή – ο πρώτος γίνεται πρόεδρος, ο δεύτερος γραμματέας και ο τρίτος ταμίας. Ποια είναι η πιθανότητα να εκλεγεί φοιτητής πρόεδρος, και καθηγητές γραμματέας και ταμίας; Εφόσον εδώ μας απασχολεί και η σειρά με την οποία επιλέγονται τα «αντικείμενα» (δηλαδή τα μέλη της επιτροπής), υπολογίζουμε αυτή την πιθανότητα βάσει του χώρου πιθανότητας **Ω**, ο οποίος περιέχει όλες τις διατεταγμένες τριάδες, δηλαδή περιέχει 10!/(10−3)! = 720 στοιχεία. ΄Αρα, η πιθανότητα του ενδεχομένου που μας ενδιαφέρει, βάσει της Ιδιότητα 3.3 ισούται με: 3! /(3−1)! / 7!/(7−2)! = 7 /40 ≈ 0.175.

Παράδειγμα 3.9 Σε 3 επεξεργαστές πρέπει να κατανεμηθούν 12 διεργασίες, δίνοντας 4 διεργασίες στον κάθε επεξεργαστή. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτός ο καταμερισμός; Για να απαντήσουμε, χωρίζουμε το πρόβλημα σε τρία μέρη. Αρχικά επιλέγουμε 4 διεργασίες από τις 12 για τον πρώτο επεξεργαστή, πράγμα που (βάσει της Ιδιότητας 4.4) μπορεί να γίνει με(12 4) τρόπους. Κατόπιν, επιλέγουμε 4 διεργασίες από τις υπόλοιπες 8 για τον δεύτερο επεξεργαστή, πράγμα που μπορεί να γίνει με (8 4) τρόπους. Και τέλος οι 4 διεργασίες που απομένουν πηγαίνουν στον τρίτο επεξεργαστή. Χρησιμοποιώντας την Ιδιότητα 3.1, συνολικά αυτός ο καταμερισμός μπορεί να γίνει με: $\binom{12}{4}\binom{8}{4}$ = (12! / 4!8!) / (8!/ 4!4!) = 12! /4!4!4! τρόπους. Στη γενική του μορφή, ακριβώς ο ίδιος συλλογισμός μάς δίνει:

Ιδιότητα 3.5 Για να μοιραστούν Ν αντικείμενα σε Μ ομάδες, όπου η πρώτη αποτελείται από k1 αντικείμενα, η δεύτερη από k2 αντικείμενα κ.ο.κ. ως την ομάδα Μ η οποία αποτελείται από kM αντικείμενα, υπάρχουν,

$$\binom{N}{k_1 k_2 \ldots k_M} = \frac{N!}{k_1!k_2!\ldots k_M!}$$

δυνατοί συνδυασμοί. Όπου το $\binom{N}{k_1 k_2 \ldots k_M}$

είναι ο πολυωνυμικός συντελεστής. [Δεδομένου φυσικά ότι το άθροισμα k1 + k2 + · · ·+ kM = N].

Παρατήρηση: Αν έχουμε μόνο Μ = 2 ομάδες και Ν αντικείμενα, τότε για k1 = k αναγκαστικά θα έχουμε k2 = N − k και η Ιδιότητα 4.5 λέει πως υπάρχουν N !k!(N−k)!

τρόποι να μοιράσουμε N αντικείμενα σε δύο ομάδες των k και (N − k), αντίστοιχα. Αυτό είναι ταυτόσημο με το περιεχόμενο της Ιδιότητας 3.4, άρα η Ιδιότητα 3.5 αποτελεί γενίκευση της 3.4.

Παράδειγμα 3.10 Έχουμε 20 υπολογιστές, που αποτελούνται από 10 PC και 10 Apple, και τους μοιράζουμε τυχαία σε τρία clusters, που αποτελούνται από 10, 5 και 5 υπολογιστές αντίστοιχα. Ποιες είναι οι πιθανότητες των ενδεχομένων A και B πιο κάτω;

A = {«όλα τα PC στο ίδιο cluster»},

B = {«4 PC στο πρώτο cluster, 3 PC στο δεύτερο και 3 PC στο τρίτο»}.

Ο χώρος πιθανότητας Ω, που περιγράφει αυτό το πείραμα, αποτελείται από όλους τους δυνατούς τρόπους με τους οποίους 20 αντικείμενα μπορούν να χωριστούν σε τρεις ομάδες των 10, 5 και 5 αντικειμένων. Άρα, από την Ιδιότητα 3.5, έχουμε,

$$\#\Omega = \binom{20}{2055} = \frac{20!}{10!5!5!}$$

Επιπλέον, οι υπολογιστές κατατάσσονται σε clusters τυχαία, οπότε υποθέτουμε ότι όλα τα στοι-χειώδη ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα και θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι τον πέμπτο κανόνα πιθανότητας για να υπολογίσουμε την πιθανότητα του A και του B. Για το A παρατηρούμε πως «όλα τα PC στο ίδιο cluster» είναι ακριβώς ισοδύναμο με το «όλα τα PC στο πρώτο cluster». Άρα, το πλήθος των στοιχείων του A ισούται με το πλήθος των τρόπων που μπορούν τα 10 Apple να μοιραστούν σε δύο clusters με 5 το καθένα, δηλαδή (10 5) .

Συνεπώς, Pr(A) = Pr(«όλα τα PC στο ίδιο cluster») = $\binom{10}{5} / \binom{20}{1055} = \cdot\cdot\cdot \approx 10^{-6}$.

Τέλος, για το B, έχουμε όλους τους δυνατούς τρόπους με τους οποίους τα 10 PC μπορούν να μοιραστούν σε 3 clusters με αναλογία 4-3-3, σε συνδυασμό με όλους τους τρόπους με τους οποίους τα 10 Apple μπορούν να μοιραστούν σε 3 clusters με αναλογία 6-2-2. Άρα: Pr(B) = Pr(«4 PC στο πρώτο cluster, 3 PC στο δεύτερο και 3 PC στο τρίτο») =

$$\#B/\,\#\Omega = \binom{10}{433}\binom{10}{622} / \binom{10}{433}\binom{10}{622} = (10!\ 10!\ 10!\ 5!\ 5!) / (20!\ 4!\ 3!\ 3!\ 6!\ 2!\ 2!) =$$

$\cdot\cdot\cdot \approx 0.195.$

3.2 Πέντε «κανόνες αρίθμησης»

Στο κεφάλαιο αυτό ως τώρα διατυπώσαμε κάποιες βασικές ιδιότητες της συνδυαστικής τις οποίες θα χρησιμοποιούμε συχνά. Για να αναφερόμαστε σε αυτές πιο εύκολα, τις παραθέτουμε περιληπτικά πιο κάτω.

Κανόνες αρίθμησης

1. Αν ένα πείραμα έχει N δυνατά αποτελέσματα και ένα άλλο M δυνατά αποτελέσματα, τότε ο συνδυασμός τους έχει M ×N δυνατά αποτελέσματα.

2. Υπάρχουν N ! δυνατές διατάξεις N αντικειμένων.

3. Υπάρχουν $\left(\frac{N!}{(N-k)!}\right)$ δυνατές διατάξεις k αντικειμένων που επιλέγονται από N .

4. Υπάρχουν $\binom{N}{k} = \left(\frac{N!}{k!(N-k)!}\right)$ δυνατοί συνδυασμοί (ή μη διατεταγμένες επιλογές) k αντικειμένων που επιλέγονται από N αντικείμενα.

5. Υπάρχουν $\binom{N}{k_1 k_2 \ldots k_M} =\cdot \frac{N!}{k_1!k_2!\ldots k_M!}$ δυνατοί συνδυασμοί βάσει των οποίων μπορούν να μοιραστούν N αντικείμενα σε M ομάδες, όπου η πρώτη αποτελείται από k1 αντικείμενα, η δεύτερη από k2 αντικείμενα κ.ο.κ. ως την ομάδα M η οποία αποτελείται από k_M αντικείμενα [για $k_1 + k_2 + \cdot\cdot\cdot + k_M = N$].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο : ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ – ΒΑΣΙΚΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε περιληπτικά σε ορισμένες κατανομές τυχαίων μεταβλητών που συναντώνται συχνά σε διάφορες εφαρμογές στης επιστήμης της

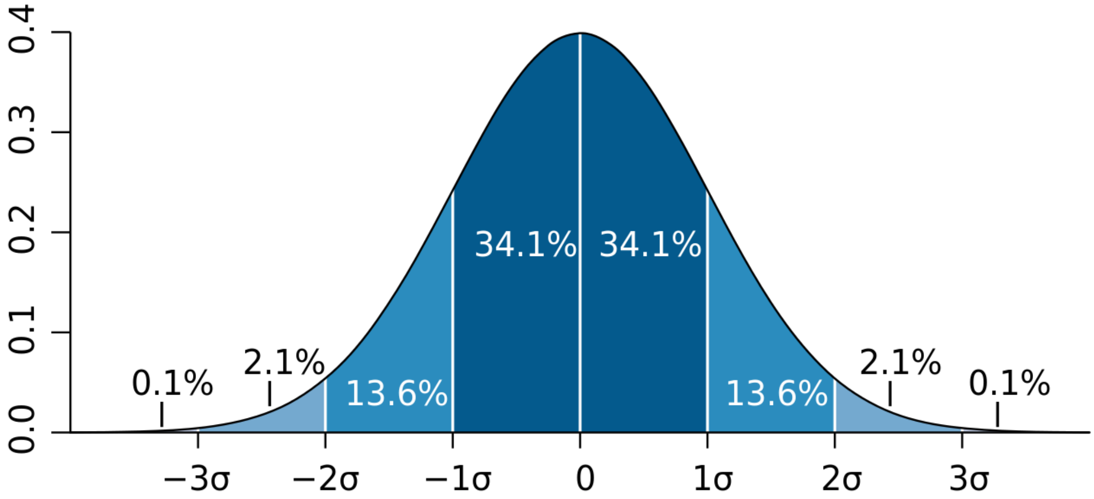
Στατιστικής.

4.1 Κανονική Κατανομή (Γκαουσιανή Κατάνομή)

Η **κανονική κατανομή** (γνωστή και ως γκαουσιανή *κατανομή*) αναφέρεται σε συνεχείς μεταβλητές αποτελώντας μία συνεχή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. Χρησιμοποιείται ως μία πρώτη προσέγγιση για να περιγραφούν τυχαίες μεταβλητές πραγματικών τιμών, οι οποίες τείνουν να συγκεντρώνονται γύρω από μια μέση τιμή. Η κανονική κατανομή αποτελεί την πιο σημαντική κατανομή της στατιστικής μεθοδολογίας για τους εξής βασικούς λόγους:

- Την κανονική κατανομή ακολουθούν είτε με ακρίβεια είτε με μεγάλη προσέγγιση τα περισσότερα συνεχή φαινόμενα.
- Πολλές ασυνεχείς κατανομές πιθανοτήτων μπορούν να προσεγγιστούν μέσω της κανονικής κατανομής. Για παράδειγμα πολλά πληθυσμιακά χαρακτηριστικά, όπως το ύψος, το βάρος η βαθμολογία σε διαγώνισμα, κ.λπ.
- Η κανονική κατανομή αποτελεί σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα (το άθροισμα ενός ικανοποιητικά μεγάλου αριθμού ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών προσεγγίζεται από την κανονική κατανομή) τη βάση της στατιστικής συμπερασματολογίας ή επαγωγικής στατιστικής.
- Τυχαία σφάλματα που εμφανίζονται σε διάφορες μετρήσεις έχουν κανονική κατανομή. Γι' αυτό το λόγο η Κανονική κατανομή αναφέρεται πολλές φορές και ως κατανομή σφαλμάτων.

Η γραφική παράσταση της σχετιζόμενης συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας έχει σχήμα «καμπάνας», και είναι γνωστή ως γκαουσιανή συνάρτηση ή κωδωνοειδής καμπύλη.



Σχήμα 1. Κανονική Κατανομή

4.1.1 Φαινόμενα των οποίων κατανομές που μοντελοποιούνται ως κανονική

Στη βιολογία, ο λογάριθμος διαφόρων μεταβλητών τείνει να ακολουθεί την κανονική κατανομή, δηλαδή, τείνουν να ακολουθούν μία λογαριθμική κανονική κατανομή, με παραδείγματα όπως: Μέτρα μεγέθους ζωντανού ιστού (μήκος, ύψος, επιφάνεια δέρματος, βάρος).Το μήκος αδρανών προσαρτημάτων (μαλλιά, νύχια, δόντια) βιολογικών δειγμάτων, στην κατεύθυνση της μεγέθυνσης. Ορισμένα φυσιολογικά μεγέθη, όπως η πίεση του αίματος των ενηλίκων.

Στα οικονομικά, και συγκεκριμένα το μοντέλο Black–Scholes, αλλαγές στο λογάριθμο των συναλλαγματικών ισοτιμιών, των δεικτών τιμών, και των χρηματιστηριακών δεικτών υποτίθενται ως κανονικές. Ορισμένοι μαθηματικοί αντιτίθενται σε αυτή την περίπτωση χρήσης της κανονικής κατανομής.

Τα υπολογιστικά λάθη σε φυσικά πειράματα μοντελοποιούνται συχνά μέσω της κανονικής κατανομής.

Σε τυποποιημένα τεστ, τα αποτελέσματα αναλύονται βάσει της κανονικής κατανομής.

Στην υδρολογία η κατανομή της μακροχρόνιας βροχόπτωσης (π.χ. μηνιαία ή ετήσια σύνολα, αποτελούμενα από το άθροισμα 30 και 360 ημερησίων τιμών αντίστοιχα) θεωρείται συχνά ότι ακολουθεί πρακτικά την κανονική κατανομή σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα.

4.2 Διωνυμική Κατανομή

Η Διωνυμική κατανομή συνδέεται με ένα πολύ απλό πείραμα τύχης. Ίσως το απλούστερο! Πρόκειται για τη δοκιμή Bernoulli1 , ένα πείραμα τύχης με μόνο δύο, αμοιβαίως αποκλειόμενα, δυνατά αποτελέσματα. Το ένα αποτέλεσμα έχει επικρατήσει να ονομάζεται επιτυχία και το άλλο αποτυχία. Το πιο «δημοφιλές» στη βιβλιογραφία παράδειγμα δοκιμής Bernoulli είναι η ρίψη ενός νομίσματος μία φορά. Τα δυνατά αποτελέσματα είναι προφανώς μόνο δύο: «κεφαλή» ή «γράμματα». Αν μας ενδιαφέρει η ένδειξη «κεφαλή» χαρακτηρίζουμε επιτυχία το αποτέλεσμα «κεφαλή» και αποτυχία το αποτέλεσμα «γράμματα» ενώ αν μας ενδιαφέρει η ένδειξη «γράμματα» χαρακτηρίζουμε επιτυχία το αποτέλεσμα «γράμματα» και αποτυχία το αποτέλεσμα «κεφαλή». Ας δούμε μερικά ακόμη παραδείγματα: Μας ενδιαφέρει να διατυπώσουμε πιθανοθεωρητικά συμπεράσματα α) για τον αριθμό των ζώων μιας κτηνοτροφικής μονάδας που έχουν προσβληθεί από μια συγκεκριμένη ασθένεια. Η εξέταση ενός ζώου για το αν έχει προσβληθεί ή όχι από την ασθένεια είναι δοκιμή Bernoulli γιατί τα δυνατά αποτελέσματα είναι μόνο δύο: το ζώο είτε έχει προσβληθεί (επιτυχία) είτε δεν έχει προσβληθεί (αποτυχία) β) για τον αριθμό αλλοιωμένων προϊόντων που είναι αποθηκευμένα στις εγκαταστάσεις μιας βιομηχανικής μονάδας επεξεργασίας αγροτικών προϊόντων. Ο έλεγχος ενός προϊόντος για το αν είναι αλλοιωμένο ή όχι είναι δοκιμή Bernoulli γιατί το προϊόν είτε έχει αλλοιωθεί (επιτυχία) είτε δεν έχει αλλοιωθεί (αποτυχία) γ) για τον αριθμό των φυτών μιας καλλιέργειας που η ξηρή φυτική μάζα τους ξεπερνάει τα 150gr. Ο έλεγχος ενός φυτού για το αν η ξηρή μάζα του ξεπερνάει ή όχι τα 150gr είναι δοκιμή Bernoulli γιατί το φυτό έχει ξηρή μάζα είτε μεγαλύτερη από 150gr (επιτυχία) είτε το πολύ 150gr (αποτυχία) δ) για τον αριθμό των φυτών μιας καλλιέργειας που έχουν λιγότερα από 6 φύλλα. Ο έλεγχος ενός φυτού για το αν έχει λιγότερα από 6 φύλλα είναι δοκιμή Bernoulli γιατί το φυτό έχει είτε λιγότερα από 6 (επιτυχία) είτε τουλάχιστον 6 φύλλα (αποτυχία).

Σε μια δοκιμή Bernoulli είναι φανερό ότι ο αριθμός των επιτυχιών είναι ή 1 ή 0. Αν η πιθανότητα επιτυχίας είναι p προφανώς η πιθανότητα αποτυχίας είναι 1 − p την οποία συμβολίζουμε με q. Ας συμβολίσουμε επίσης τον αριθμό των επιτυχιών σε μια δοκιμή Bernoulli με X. Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X ονομάζεται κατανομή Bernoulli με παράμετρο p, συμβολίζεται με) b(p και έχει συνάρτηση πιθανότητας,

$$f(x) = P(X = x) = p^x \cdot (1-p)^{1-x},\ x = 0, 1. \text{ ή } f(x) = P(X = x) = \begin{cases} p, & x = 1 \\ 1-p, & x = 0. \end{cases}$$

Παρότι, όπως αναφέραμε αλλά και διαπιστώσαμε, η δοκιμή Bernoulli είναι ένα πολύ απλό πείραμα, εντούτοις (ή μήπως γι' αυτό) βρίσκεται στον πυρήνα πολλών πραγματικών προβλημάτων με ευρύτατο φάσμα εφαρμογών που παρουσιάζουν μάλιστα ιδιαίτερο ενδιαφέρον και σε αρκετές περιπτώσεις ιδιαίτερες δυσκολίες στην αντιμετώπισή τους. Πιο συγκεκριμένα, πολλά πραγματικά προβλήματα αναλύονται σε μια σειρά–ακολουθία δοκιμών Bernoulli και τα τελικά ερωτήματα που απορρέουν από αυτά σχετίζονται με τον αριθμό των επιτυχιών που συμβαίνουν. Για παράδειγμα, το τελικό ερώτημα μετά την ανάλυση ενός τέτοιου προβλήματος μπορεί να είναι: «πόσες επιτυχίες συμβαίνουν σε n επαναλήψεις μιας δοκιμής Bernoulli» ή «πόσες επαναλήψεις μιας δοκιμής Bernoulli απαιτούνται μέχρι την πρώτη επιτυχία» ή «πόσες επαναλήψεις μιας δοκιμής Bernoulli απαιτούνται μέχρι την r επιτυχία» ή «πόσες επαναλήψεις μιας δοκιμής Bernoulli απαιτούνται μέχρι να συμβεί μια ροή k συνεχόμενων επιτυχιών».

4.3 Κατανομή Poisson

Στην θεωρία πιθανοτήτων και στατιστικής, η **κατανομή Poisson** , ονομάστηκε από τον Γάλλο μαθηματικό Siméon Denis Poisson, είναι μία διακριτή συνάρτηση κατανομής που εκφράζει την πιθανότητα ενός δεδομένου αριθμού γεγονότων που συμβαίνουν σε ένα σταθερό διάστημα χρόνου ή/και χώρου αν αυτά τα γεγονότα συμβαίνουν με ένα γνωστό μέσο ρυθμό και είναι ανεξάρτητα από το χρονικό διάστημα από την τελευταία περίπτωση. Η κατανομή Poisson μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για τον αριθμό γεγονότων σε άλλα καθορισμένα διαστήματα όπως η απόσταση, η επιφάνεια ή ο όγκος. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι κάποιος παίρνει 4 αλληλογραφίες ημερησίως κατά μέσο όρο. Θα υπάρξει, ωστόσο, μία ορισμένη διάδοση: μερικές φορές λίγα περισσότερα, μερικές φορές λίγο λιγότερα, πότε-πότε τίποτα.[2] Δεδομένου μόνο του μέσου ρυθμού, για ένα ορισμένο διάστημα παρακολούθησης (αριθμό αλληλογραφίας ανά μέρα, τηλεφωνήματα ανά ώρα, κτλ.), και υποθέτοντας ότι η διαδικασία, ή ο συνδυασμός των διαδικασιών , που παράγουν τα γεγονότα είναι ουσιαστικά τυχαίος, η κατανομή Poisson καθορίζει πόσο πιθανό είναι ότι ο αριθμός θα είναι 3, ή 5, ή 10, ή κάποιος άλλος αριθμός, κατά την διάρκεια μίας περιόδου παρατήρησης. Αυτό σημαίνει ότι, προβλέπει τον αριθμό διάδοσης γύρω από ένα γνωστό ρυθμό εξάπλωσης . Η κατανομή Poisson έχει την παράμετρο λ που δηλώνει τη μέση τιμή αριθμού εμφανίσεων ενός γεγονότος, οι οποίες είναι ανεξάρτητες της τελευταίας χρονικής στιγμής εμφάνισης του γεγονότος.

$$P_\lambda(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}$$

4.3.1 Εφαρμογές της Poisson κατανομής

- Παράδειγμα στην Τηλεπικοινωνία: οι τηλεφωνικές κλήσεις που φτάνουν σε ένα σύστημα.
- Παράδειγμα στην Αστρονομία: τα φωτόνια που φτάνουν σε ένα τηλεσκόπιο.
- Παράδειγμα στη Βιολογία: ο αριθμός των μεταλλάξεων σε ένα κλώνο του DNA ανά μονάδα μήκους.
- Παράδειγμα στη Διαχείριση: οι πελάτες που φθάνουν σε έναν πάγκο ή ένα τηλεφωνικό κέντρο.
- Παράδειγμα Πολιτικών μηχανικών: τα αυτοκίνητα που φθάνουν στα φώτα τροχαίας.
- Παράδειγμα στη Χρηματοδότηση και ασφάλιση: ο αριθμός των Απωλειών/Απαιτήσεων που συμβαίνουν σε μία δεδομένη χρονική περίοδο του χρόνου.

- Παράδειγμα στη Σεισμολογία σεισμού: ένα ασυμπτωτικό μοντέλο Poisson of σεισμικών ρίσκων για μεγάλους σεισμούς. (Lomnitz, 1994).
- Παράδειγμα στη Ραδιενέργεια: διάσπαση ενός ραδιενεργού πυρήνα.

Η Poisson κατανομή προκύπτει σε σχέση με τις Poisson επεξεργασίες. Εφαρμόζεται σε διάφορα φαινόμενα με διακριτές ιδιότητες (αυτό είναι, εκείνα που μπορούν να συμβούν 0, 1, 2, 3, ... φορές κατά τη διάρκεια μίας δεδομένης περιόδου του χρόνου ή σε μία δεδομένη περιοχή) όποτε η πιθανότητα να συμβεί το φαινόμενο είναι σταθερή στο χρόνο ή χώρο. Παραδείγματα από γεγονότα που μπορούν να μοντελοποιηθούν ως Poisson κατανομή περιλαμβάνουν:

- Ο αριθμός των στρατιωτών που σκοτώνονται από άλογο-κλωτσιές κάθε χρόνο σε κάθε σώμα στο Πρώσος ιππικό. Αυτό το παράδειγμα έγινε γνωστό από ένα βιβλίο του Ladislaus Josephovich Bortkiewicz (1868–1931).
- Ο αριθμός των κυττάρων ζύμης που χρησιμοποιύνται όταν ετοιμάζεται η μπύρα Guinness. Αυτό το παράδειγμα έγινε γνωστό από τον William Sealy Gosset (1876–1937).
- Ο αριθμός των τηλεφωνικών κλήσεων που φτάνουν σε ένα τηλεφωνικό κέντρο σε ένα λεπτό. Αυτό το παράδειγμα έγινε γνωστό από τον A.K. Erlang (1878 – 1929).
- Κίνηση στο διαδίκτυο.
- Ο αριθμός των γκολ σε αθλήματα που περιλαμβάνουν δύο αγωνιζόμενες ομάδες.
- Ο αριθμός των θανάτων ετησίως σε μια συγκεκριμένη ηλικιακή ομάδα.
- Ο αριθμός των αλμάτων σε μια τιμή της μετοχής σε ένα δεδομένο χρονικό διάστημα.
- Υπό την παραδοχή της ομοιογένειας, ο αριθμός των φορών που ένας web server είναι προσβάσιμος ανά λεπτό.
- Ο αριθμός των μεταλλάξεων σε ένα δεδομένο τμήμα του DNA μετά από ένα ορισμένο ποσό της ακτινοβολίας.
- Η αναλογία των κυττάρων που θα έχουν μολυνθεί σε μία δεδομένη πολλαπλότητα μόλυνσης.
- Η άφιξη των φωτονίων σε ένα κύκλωμα εικονοψηφίδων σε μία δεδομένη φωταψία και επί ένα δεδομένο χρονικό διάστημα.
- Η στόχευση των V-1 ιπτάμενων βομβών στο Λονδίνο κατά τη διάρκεια του Β' Παγκοσμίου Πολέμου.

Ο Gallagher το 1976 έδειξε ότι οι μετρήσεις των πρώτων αριθμών σε σύντομα χρονικά διαστήματα υπακούουν σε μια κατανομή Poisson υπό την προϋπόθεση μία συγκεκριμένη έκδοση μιας αναπόδεικτης εικασίας του Hardy και του Littlewood είναι αλήθεια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο : ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ –ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

5.1 Μεταθέσεις – Συνδυασμοί

Η μετάθεση ενός αριθμού αντικειμένων είναι ο αριθμός διαφορετικών τρόπων που μπορούν αυτά να διαταχθούν: η θέση είναι σημαντική. Με τους συνδυασμούς, δεν μας ενδιαφέρει η σειρά με την οποία τοποθετήθηκαν τα αντικείμενα.

Αυτός ο αλγόριθμος (πρόγραμμα στο Matlab) υπολογίζει τον αριθμό των μεταβολών και των συνδυασμών N αντικειμένων που λαμβάνονται D κάθε φορά.

Κώδικας Matlab

```
% Clears variables and screen
clear; clc

% Asks user for input
n = input('Total number of objects: ');
d = input('Size of subgroup: ');

% Computes and displays permut. according to basic formulas
p = 1;
for i = n - d + 1 : n
    p = p*i;
end
str1 = [num2str(p) ' permutations'];
disp(str1)

% Computes and displays combin. according to basic formulas
str2 = [num2str(p/factorial(d)) ' combinations'];
disp(str2)
```

Παράδειγμα 1

Πόσες μεταθέσεις και πόσοι συνδυασμοί μπορεί να γίνουν από τα 26 γράμματα του λατινικού αλφαβήτου, λαμβάνοντας πέντε κάθε φορά;

Εκτελούμε τον παραπάνω κώδικα και πληκτρολογούμε:

Total number of objects: 26

Size of subgroup: 5

Η απάντηση είναι :

7893600 permutations

65780 combinations

Παράδειγμα 2

Πόσοι διαφορετικοί τρόποι υπάρχουν για την επισκευή 12 υπολογιστών εάν το συνεργείο μπορεί να επισκευάσει μόνο 2 κάθε φορά;

Εκτελούμε τον παραπάνω κώδικα και πληκτρολογούμε:

Total number of objects: 12

Size of subgroup: 2

Η απάντηση είναι :

132 permutations

66 combinations

5.2 Κανονική Κατανομή

Αυτός ο αλγόριθμος (πρόγραμμα στο Matlab) υπολογίζει την πιθανότητα και τη συχνότητα των δεδομένων τιμών σε μια τυπική καμπύλη κανονικής κατανομής (καμπάνα Gauss). Πρέπει να εισαγάγετε τον μέσο όρο, την τυπική απόκλιση και την τιμή ενδιαφέροντος.

Κώδικας Matlab

```
% Clears screen and deletes all the variables in the workspace
clc; clear;

% Asks the user for input
m = input('Mean: ');
s = input('Std. Dev: ');
y = input('x = ');

% Calculates the frequency (y coordinate)
y = abs((y - m)/s);
r = exp(-y^2/2)/sqrt(2*pi);
str = ['Frequency: ' num2str(r)];
disp(str)
```

```
z = y;
% Approximates probability (area under curve)
y = 1/(1 + 0.33267*abs(y));
a1 = 0.4361836;
a2 = -0.1201676;
a3 = 0.9372980;
t = 1 - r*(a1*y + a2*y^2 + a3*y^3);
if z < 0
    t = 1 - t;
end

str = ['Probability: ' num2str(t)];
disp(str)
```

Παράδειγμα 1

Ο μέσος αριθμός εκτελέσιμων εντολών ανά χιλιοστό του δευτερολέπτου (IPMS) ενός συγκεκριμένου τύπου σύγχρονων υπολογιστών είναι 150. Η τυπική απόκλιση είναι 15 IPMS. Εάν τα IPMS ακολουθούν την κανονική κατανομή , ποια είναι η πιθανότητα ένας υπολογιστής να εκτελέσει μεταξύ 150 και 180 εντολών ανά χιλιοστό του δευτερολέπτου;

Εκτελούμε τον παραπάνω κώδικα και πληκτρολογούμε:

Mean: 150

Std. Dev: 15

x = 180

Η απάντηση είναι :

Frequency: 0.053991

Probability: 0.97724

5.3 Διωνυμική Κατανομή

Όταν εξετάζεται μια Διωνυμική κατανομή γεγονότων, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτόν τον αλγόριθμο για να υπολογίσουμε την πιθανότητα απόκτησης ενός δεδομένου αριθμού επιτυχιών σε έναν δεδομένο αριθμό δοκιμών Bernoulli. Είναι απαραίτητο να δοθεί η πιθανότητα επιτυχίας σε μία μόνο δοκιμή.

Κωδικας Matlab

```
clear; clc;
n = input('Number of trials: ');
x = input('Exact number of successes: ');
p = input('Probability of success: ');
m1 = log(factorial(n));
m2 = log(factorial(x));
m3 = log(factorial(n-x));
r = exp(m1 - m2 - m3 + x*log(p) + (n-x)*log(1-p));
str = ['Probability of ' num2str(x) ' successes in '
...                 num2str(n) ' trials: ' num2str(r)];
disp(str)
```

Παράδειγμα 1

Ποια είναι η πιθανότητα να πετύχουμε τρία αποτελέσματα «κεφαλή» σε πέντε ρίψεις ενός 'δίκαιου' κέρματος ; (με τον όρο δίκαιο κέρμα εννοούμε με ίση πιθανότητα εμφάνισης 'κεφαλή' ή 'γράμματα')

Εκτελούμε τον παραπάνω κώδικα και πληκτρολογούμε:

Number of trials: 5

Exact number of successes: 3

Probability of success: .5

Η απάντηση είναι :

Probability of 3 successes in 5 trials: 0.3125

Παράδειγμα 2

Ποια είναι η πιθανότητα , σε πέντε ρίψεις ενός 'δίκαιου' ζαριού , ένας αριθμός να εμφανιστεί δύο φορές ;

Εκτελούμε τον παραπάνω κώδικα και πληκτρολογούμε:

Number of trials: 5

Exact number of successes: 2

Probability of success: 1/6

Η απάντηση είναι :

Probability of 2 successes in 5 trials: 0.16075

5.4 Κατανομή Poisson

Χρησιμοποιώντας την κατανομή Poisson, το πρόγραμμα αυτό υπολογίζει την πιθανότητα ενός συμβάντος που εμφανίζεται σε έναν δεδομένο αριθμό επαναλήψεων. Η μέθοδος απαιτεί την γνώση της πιθανότητας εμφάνισης του γεγονότος.

Κώδικας Matlab

```
% Clears screen and deletes all the variables in the workspace
clc; clear;

% Asks the user for input
f = input('Calculated Frequency: ');
x = input('Test Frequency: ');

% Computes probability
a = log(factorial(x));
a = exp(-f + x*log(f) - a);

% Displays result
str = ['Probability of ' num2str(x) ' occurrences = ' num2str(a)];
disp(str)
```

Παράδειγμα 1

Ορισμένα προγράμματα μεταφορτώνονται σε 2000 υπολογιστές. Η πιθανότητα οποιουδήποτε υπολογιστή να μολυνθεί από έναν ιό είναι 0,001 . Έτσι, μπορούμε να περιμένουμε ότι 2 υπολογιστές θα υποστούν μόλυνση (0.001 x 2000 = 2). Ποια είναι η πιθανότητα να μολυνθούν 4 υπολογιστές;

Εκτελούμε τον παραπάνω κώδικα και πληκτρολογούμε:

```
Calculated Frequency: 2

Test Frequency: 4
```

Η απάντηση είναι :

```
Probability of 4 occurrences = 0.090224
```

Παράδειγμα 2

Ποια είναι η πιθανότητα να μολυνθεί μόνο ένας υπολογιστής;

Πληκτρολογούμε :

Calculated Frequency: 2

Test Frequency: 1

Και το αποτέλεσμα είναι :

```
Probability of 1 occurrences = 0.27067
```

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Εισαγωγή στις πιθανότητες, D.P. Bertsekas, J.N. Tsitsiklis. Εκδόσεις Τζιόλα, 2010.[Πρωτότυπο στα αγγλικά: Introduction to Probability, D.P. Bertsekas, J.N.

Tsitsiklis. 2η έκδοση, Athena Scientific, 2008.]

[2] Εισαγωγή στη θεωρία πιθανοτήτων, P. Hoel, S. Port, C. Stone. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2001. [Πρωτότυπο στα αγγλικά: Introduction to Probability Theory, P.G. Hoel, S.C. Port, C.J. Stone. Brooks Cole, 2009.]

[3] Probability and Algorithms, J.M. Steele, D. Aldous, D.J. Bertsimas, E.G. Coffman, D. Hochbaum, M. Hofri, J.C. Lagarias, S.T. Weidman. U.S. National ResearchCouncil, 1992. Διαθέσιμο online: http://www.nap.edu/openbook.php?isbn=0309047765451

[4] http://www.matrixlab-examples.com/poisson-distribution.html

[5] Probability and Computing: Randomized Algorithms and Probabilistic Analysis, M. Mitzenmacher, E. Upfal. Cambridge University Press, 2005.

[6] Βασικές αρχές θεωρίας πιθανοτήτων, S. Ross. Εκδόσεις Κλειδάριθμος, 2012. [Πρωτότυπο στα αγγλικά: First Course in Probability, S. Ross. 8η έκδοση, Prentice Hall,2009.]

[7] Πιθανότητες, τυχαίες μεταβλητές και στοχαστικές διαδικασίες, A. Papoulis, S.U. Pillai. 4η έκδοση, Εκδόσεις Τζιόλα, 2007. [Πρωτότυπο στα αγγλικά: Probability, Random Variables and Stochastic Processes, A. Papoulis, S.U. Pillai. 4η έκδοση, McGraw Hill, 2002.]

[8] An Introduction to Probability Theory and Its Applications, volumes I-II, W. Feller. 3η έκδοση, Wiley, 1968.