

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΜΟΝΙΜΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ
ΜΕΣΩ ΠΤΕΡΥΓΙΩΝ**



ΣΠΟΥΔΑΣΤΗΣ: ΤΑΣΟΠΟΥΛΟΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ (Α.Μ. 5989)

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΚΑΜΒΥΣΑΣ ΓΡΗΓΟΡΙΟΣ

ΠΑΤΡΑ 2020

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το παρόν τεύχος αποτελεί την πτυχιακή εργασία που εκπονήθηκε στο Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών της Σχολής Μηχανικών του Πανεπιστημίου Πελοποννήσου για την απόκτηση του πτυχίου του Μηχανολόγου Μηχανικού Τ.Ε. και έχει ως θέμα τη μόνιμη μεταφορά θερμότητας μέσω πτερυγίων.

Σκοπός της πτυχιακής αυτής εργασίας είναι η μελέτη διαφόρων τύπων πτερυγίων που χρησιμοποιούνται για την αύξηση του ρυθμού μεταφοράς θερμότητας σε πάρα πολλές εφαρμογές.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Καμβύσα για την βοήθεια που μου προσέφερε.

Τασόπουλος Κωνσταντίνος
Νοέμβριος 2020

Υπεύθυνη Δήλωση Σπουδαστή: Ο κάτωθι υπογεγραμμένος σπουδαστής έχω επίγνωση των συνεπειών του Νόμου περί λογοκλοπής και δηλώνω υπεύθυνα ότι είμαι συγγραφέας αυτής της Πτυχιακής Εργασίας, έχω δε αναφέρει στην Βιβλιογραφία μου όλες τις πηγές τις οποίες χρησιμοποίησα και έλαβα ιδέες ή δεδομένα. Δηλώνω επίσης ότι, οποιοδήποτε στοιχείο ή κείμενο το οποίο έχω ενσωματώσει στην εργασία μου προερχόμενο από Βιβλία ή άλλες εργασίες ή το διαδίκτυο, γραμμένο ακριβώς ή παραφρασμένο, το έχω πλήρως αναγνωρίσει ως πνευματικό έργο άλλου συγγραφέα και έχω αναφέρει ανελλιπώς το όνομά του και την πηγή προέλευσης.

Ο σπουδαστής
Τασόπουλος Κωνσταντίνος

.....

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία έχει σαν θέμα την μαθηματική μελέτη της μόνιμης μεταφοράς θερμότητας μέσω πτερυγίων. Παρουσιάζονται αποτελέσματα για την κατανομή θερμοκρασίας, τον ρυθμό ροής θερμότητας και την απόδοση για διάφορους τύπους πτερυγίων.

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται γενικές πληροφορίες για τα πτερύγια και τις εφαρμογές τους.

Στο δεύτερο, τρίτο και τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται αντίστοιχα το ορθογωνικό, το τριγωνικό και τα παραβολικά πτερύγια. Στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται επίσης και η σύγκριση της απόδοσης όλων των παραπάνω πτερυγίων.

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ	
ΠΕΡΙΛΗΨΗ	
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	
ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
1. ΠΤΕΡΥΓΙΑ	
1.1 Γενικά.....	2
1.2 Υλικά κατασκευής.....	4
1.3 Μηχανισμοί και νόμοι της μετάδοσης θερμότητας.....	5
2. ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΟ ΠΤΕΡΥΓΙΟ	
2.1 Κατασκευή της εξίσωσης.....	8
2.2 Επίλυση της εξίσωσης.....	10
2.3 Ρυθμός ροής θερμότητας.....	12
2.4 Απόδοση.....	13
3. ΤΡΙΓΩΝΙΚΟ ΠΤΕΡΥΓΙΟ	
3.1 Η διαφορική εξίσωση μεταφοράς θερμότητας στα επιμήκη πτερύγια.....	15
3.2 Η διαφορική εξίσωση του τριγωνικού πτερυγίου.....	16
3.3 Λύση της εξίσωσης.....	19
3.4 Ρυθμός ροής θερμότητας και απόδοση.....	20
4. ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΑ ΠΤΕΡΥΓΙΑ	
4.1 Κοίλο παραβολικό πτερύγιο.....	23
4.1.1 Η διαφορική εξίσωση.....	23

4.1.2 Λύση της εξίσωσης.....	24
4.1.3 Ρυθμός ροής θερμότητας και απόδοση.....	26
4.2 Κυρτό παραβολικό πτερύγιο	27
4.2.1 Η διαφορική εξίσωση.....	27
4.2.2 Λύση της εξίσωσης.....	28
4.2.3 Ρυθμός ροής θερμότητας και απόδοση.....	30
4.3 Σύγκριση των επιμήκων πτερυγίων.....	31
5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	34
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ BESSEL	35
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2: ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΚΑΙ ΠΗΛΙΚΟ ΣΕΙΡΩΝ	40
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	42

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

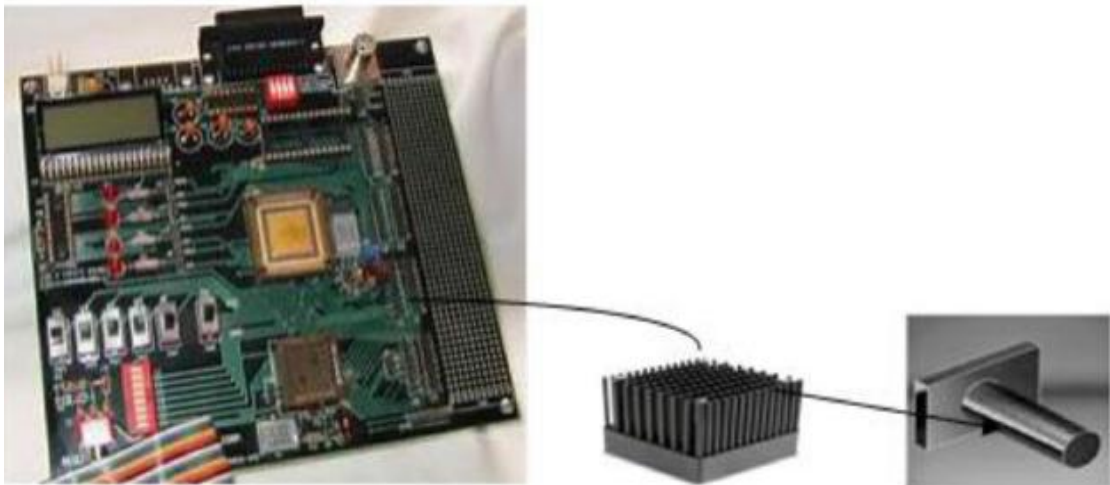
Τα πτερύγια είναι εκτεταμένες επιφάνειες, με διάφορες γεωμετρίες οι οποίες εμφανίζονται σε μία πληθώρα εφαρμογών όπου υπάρχει ανάγκη για ενίσχυση της μεταφοράς θερμότητας μεταξύ μιας επιφάνειας και του ρευστού που την περιβάλλει. Η βασική ιδέα είναι η αύξηση της επιφάνειας μέσα από την οποία μεταφέρεται θερμότητα λόγω συναγωγής. Οι εφαρμογές κυμαίνονται από εφαρμογές πολύ μεγάλης κλίμακας, όπως στην περίπτωση των εναλλακτών θερμότητας, έως εφαρμογές πολύ μικρής κλίμακας, όπως για παράδειγμα ο έλεγχος της θερμοκρασίας των ηλεκτρονικών εξαρτημάτων.

Από την μαθηματική πλευρά, η μελέτη των πτερυγίων περιλαμβάνει την ανάλυση της μεταφοράς θερμότητας και την επίλυση διαφορικών εξισώσεων δευτέρας τάξεως σε διάφορα συστημάτων συντεταγμένων. Οι αναλυτικές μέθοδοι επιτυγχάνουν να επιλύσουν αυτά τα προβλήματα και να προσφέρουν πληροφορίες σχετικά με τον αποδοτικό σχεδιασμό των πτερυγίων για μια ποικιλία γεωμετριών, μερικές από τις οποίες είναι ιδιαίτερα περίπλοκες.

1. ΠΤΕΡΥΓΙΑ

1.1 ΓΕΝΙΚΑ

Όποτε η διαθέσιμη επιφάνεια είναι ανεπαρκής για τη μεταφορά της απαιτούμενης ποσότητας θερμότητας με τη διαθέσιμη πτώση θερμοκρασίας και τον υπάρχοντα συντελεστή μεταφοράς θερμότητας, χρησιμοποιούνται εκτεταμένες επιφάνειες ή πτερύγια. Τα πτερύγια χρησιμοποιούνται συνήθως για την αύξηση του ρυθμού μεταφοράς θερμότητας της επιφάνειας όταν δεν είναι δυνατή η αύξηση του ρυθμού μεταφοράς θερμότητας είτε με αύξηση του συντελεστή μεταφοράς θερμότητας στην επιφάνεια είτε με αύξηση της διαφοράς θερμοκρασίας μεταξύ της επιφάνειας και του περιβάλλοντος ρευστού. Τα πτερύγια χρησιμοποιούνται κυρίως για μεταφορά αισθητής θερμότητας τόσο για θέρμανση όσο και για ψύξη του γειτονικού ρευστού.



Εικόνα 1.1 Ψύξη ηλεκτρονικών διατάξεων με χρήση πτερυγίων [1].

Ένα πτερύγιο (fin) ή αλλιώς επέκταση επιφάνειας (extended surface) είναι μια επιφάνεια που εκτείνεται από ένα αντικείμενο για να αυξήσει το ρυθμό μεταφοράς θερμότητας προς ή από το περιβάλλον με

την αύξηση της μεταφοράς θερμότητας με συναγωγή. Σύμφωνα με τις βασικές αρχές της μεταφοράς θερμότητας για να αυξήσουμε το ρυθμό ροής της θερμότητας πρέπει να αυξήσουμε είτε την διαφορά θερμοκρασίας, είτε το συντελεστή μεταφοράς θερμότητας είτε την επιφάνεια μέσω της οποίας γίνεται η μεταφορά. Μερικές φορές δεν είναι οικονομικό ή δεν είναι εφικτό να πραγματοποιηθούν οι δύο πρώτες επιλογές.



Εικόνα 1.2 Διάφορες μορφές πτερυγίων [3].

Η προσθήκη μιας διαμόρφωσης πτερυγίου στο αντικείμενο, ωστόσο, αυξάνει την επιφάνεια και πολλές φορές είναι μια οικονομική λύση σε προβλήματα μεταφοράς θερμότητας. Τα κυκλικά πτερύγια γύρω από τον κύλινδρο, τα τετράγωνα και ορθογώνια πτερύγια που είναι προσαρτημένα σε έναν κινητήρα και τα πτερύγια που είναι

προσαρτημένα στους σωλήνες του ψυγείου είναι μερικά γνωστά παραδείγματα.

1.2 ΥΛΙΚΑ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ

Τα υλικά που χρησιμοποιούνται συνήθως για την κατασκευή πτερυγίων είναι τα εξής:

Χαλκός και τα κράματά του

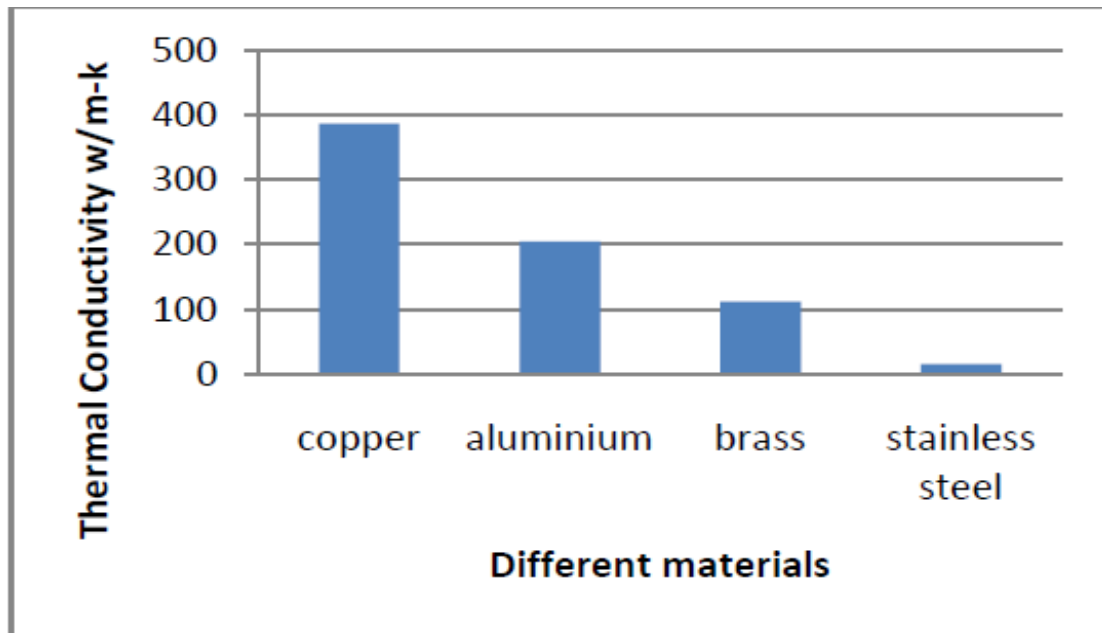
Ο χαλκός έχει καλύτερες θερμικές ιδιότητες σε σύγκριση με τον ορείχαλκο και το αλουμίνιο. Παρουσιάζει αντοχή στη διάβρωση, ανθεκτικότητα στη βιοαποδόμηση, μέγιστη επιτρεπόμενη πίεση και εσωτερική πίεση, ρήξη ερπυσμού, αντοχή σε κόπωση, θερμική διαστολή, ικανότητα κράματος, ευκολία κατασκευής και ευκολία σύνδεσης.

Αλουμίνιο και τα κράματά του

Το αλουμίνιο χρησιμοποιείται πολύ συχνά στην κατασκευή πτερυγίων. Έχει τη δυνατότητα να εκπέμπει θερμότητα αποτελεσματικά. Λόγω του ότι είναι ελαφρύ, είναι πιο εύκολο στην εγκατάσταση. Δεν διαβρώνεται. Τα κράματα του αλουμινίου που χρησιμοποιούνται συχνά είναι τα Aluminium2014, Aluminium6061, Aluminium6013.

Ορείχαλκος

Ο ορείχαλκος είναι ένα κράμα χαλκού και ψευδαργύρου. Μπορεί να ανακυκλωθεί. Η προσθήκη αλουμινίου, μολύβδου και πυριτίου στον ορείχαλκο ενίσχυση την αντοχή του στη διάβρωση. Προκύπτουν προβλήματα με την εμφάνιση ρωγμών στον ορείχαλκο. Οι σημαντικότεροι τύποι του ορείχαλκου είναι οι: alpha, beta, gamma και ο λευκός ορείχαλκος.



Σχήμα 1.1 Οι τιμές της θερμικής αγωγιμότητας των υλικών που χρησιμοποιούνται συνήθως για την κατασκευή περυγίων [1].

1.3 ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΝΟΜΟΙ ΤΗΣ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

Υπάρχουν τρεις μηχανισμοί μετάδοσης της θερμότητας:

- αγωγή (conduction)
- συναγωγή (convection)
- ακτινοβολία (radiation)

Θερμική αγωγή είναι ο μηχανισμός μεταφοράς θερμότητας από μία περιοχή (ή σύστημα) υψηλής θερμοκρασίας σε μια άλλη (ή άλλο) χαμηλότερης θερμοκρασίας, μέσω ενός μέσου (στερεού, υγρού ή αέριου σε ηρεμία), λόγω της φυσικής επαφής. Η μεταφορά αυτή επιτυγχάνεται είτε με μοριακή αλληλεπίδραση, δηλαδή μεταφορά ενέργειας από τα περισσότερο ενεργητικά μόρια στα γειτονικά τους, με χαμηλότερο επίπεδο ενέργειας, είτε μέσω της συγκέντρωσης των ελεύθερων ηλεκτρονίων, στα καθαρά μεταλλικά στερεά. Το πιο κλασικό παράδειγμα ροής θερμότητας με αγωγιμότητα είναι οι θερμικές απώλειες από τις αδιαφανείς επιφάνειες των κτηρίων το χειμώνα. Υπάρχει επίσης μια

ισχυρή συσχέτιση μεταξύ της έννοιας της θερμικής αγωγιμότητας και αυτής της ηλεκτρικής αγωγιμότητας στα στερεά. Ροές λόγω θερμικής αγωγιμότητας συμβαίνουν στην κατεύθυνση της μείωσης της θερμοκρασίας, ενώ αντίστοιχα η ηλεκτρική αγωγιμότητα εξελίσσεται από σημεία υψηλού σε σημεία χαμηλού δυναμικού.

Περιγράφεται από τον νόμο του Fourier:

$$q = -kA \frac{dT}{dx} \quad (1.1)$$

Ο ρυθμός ροής θερμότητας είναι ανάλογος της κλίσης της θερμοκρασίας και της επιφάνειας επαφής. Με το k συμβολίζεται η θερμική αγωγιμότητα του μέσου. Το πρόσημο (-) έχει την έννοια ότι η ροή θερμότητας είναι στην κατεύθυνση που η θερμοκρασία μειώνεται.

Η μετάδοση θερμότητας με συναγωγή είναι αποτέλεσμα των μεγαλύτερης κλίμακας κινήσεων ενός ρευστού, είτε αυτό είναι υγρό ή αέριο. Όσο υψηλότερη είναι η ταχύτητα της ροής του ρευστού, τόσο υψηλότερος είναι ο ρυθμός μεταφοράς θερμότητας με συναγωγή γενικά. Για παράδειγμα, απώλεια θερμότητας με συναγωγή έχουμε όταν κρύος άνεμος φυσάει πάνω από το δέρμα ενός ανθρώπου και αφαιρεί θερμότητα από αυτό.

Περιγράφεται από τον νόμο του Newton:

$$q = hA\Delta T \quad (1.2)$$

Ο ρυθμός ροής θερμότητας είναι ανάλογος της διαφοράς θερμοκρασίας και της επιφάνειας επαφής. Με το h συμβολίζεται ο συντελεστής συναγωγής του στερεού και του περιβάλλοντος ρευστού. Εξαρτάται σημαντικά από την ταχύτητα ροής του ρευστού. Φυσικά η θερμότητα κατευθύνεται από το θερμότερο προς το ψυχρότερο.

Μετάδοση θερμότητας με ακτινοβολία είναι η μεταφορά ενέργειας με ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Δεν χρειάζεται η ύπαρξη κανενός υλικού μέσου για την διάδοση της ακτινοβολία, η οποία όπως είναι γνωστό διαδίδεται και στο κενό. Η μόνη προϋπόθεση για τη μετάδοση θερμότητας με ακτινοβολία είναι η παρουσία δύο επιφανειών σε διαφορετική θερμοκρασία. Η ενέργεια που μεταφέρεται από τον ήλιο στη

γη είναι ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα μετάδοσης θερμότητας μέσω ακτινοβολίας.

Περιγράφεται από τον νόμο Stefan-Boltzmann:

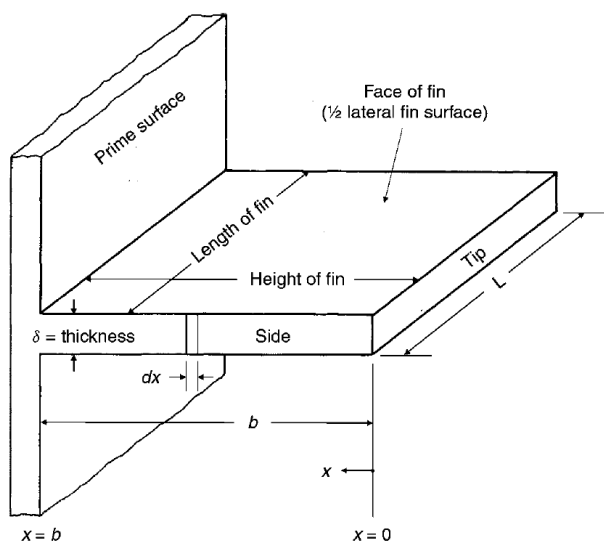
$$q = \sigma AT^4 \quad (1.3)$$

Ο ρυθμός ροής θερμότητας είναι ανάλογος του εμβαδού της επιφάνειας του σώματος που ακτινοβολεί και της τέταρτης δύναμης της απόλυτης θερμοκρασίας. Με το σ συμβολίζεται η σταθερά Stefan-Boltzmann. Επίσης, πολύ συχνά στο β' μέλος εισάγουμε έναν διορθωτικό παράγοντα που ονομάζεται συντελεστής εκπομπής και περιέχει την εξάρτηση από το είδος της επιφάνειας.

2. ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΟ ΠΤΕΡΥΓΙΟ

2.1 ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

Η πιο απλή περίπτωση πτερυγίου είναι το ορθογωνικό πτερύγιο. Ανήκει στην κατηγορία των επιμήκων πτερυγίων. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένα πτερύγιο ορθογωνίου σχήματος και οι διαστάσεις του.



Σχήμα 2.1 Ορθογωνικό πτερύγιο [2]

Θεωρούμε ένα στοιχείο όγκου του πτερυγίου με μήκος dx , πάχος δ , εμβαδόν διατομής $A_c=L\delta$ και περίμετρο $P=2L+2\delta$. Επειδή $L \gg \delta$, θεωρούμε ότι $P=2L$. Στη μόνιμη κατάσταση, σε κάθε στοιχείο του πτερυγίου η θερμότητα που εισέρχεται σε αυτό είναι ίση με τη θερμότητα που εξέρχεται από αυτό. Συνεπώς η θερμότητα που εισέρχεται στο στοιχείο στη θέση x λόγω αγωγής είναι ίση με τη θερμότητα που εξέρχεται από αυτό στη θέση $x+dx$ λόγω αγωγής συν τη θερμότητα που εξέρχεται από την επιφάνεια του στοιχείου λόγω συναγωγής.

Η μαθηματική διατύπωση της παραπάνω πρότασης είναι η εξής:

$$Q_{cond,x} = Q_{cond,x+dx} + Q_{conv} \quad (2.1)$$

όπου η ροή θερμότητας λόγω συναγωγής είναι:

$$Q_{conv} = hPdx(T - T_s) \quad (2.2)$$

όπου Pdx είναι το εμβαδόν μέσω του οποίου γίνεται η συναγωγή, h ο συντελεστής συναγωγής και T_s είναι η θερμοκρασία του περιβάλλοντος.

Αν αντικαταστήσουμε την σχέση (2.2) στην (2.1) και διαιρέσουμε με dx βρίσκουμε:

$$\frac{Q_{cond,x+dx} - Q_{cond,x}}{dx} + hP(T - T_s) = 0 \quad (2.3)$$

Ο πρώτος όρος όμως είναι η παράγωγος της ροής θερμότητας λόγω αγωγής. Άρα η εξίσωση γίνεται:

$$\frac{dQ_{cond}}{dx} + hP(T - T_s) = 0 \quad (2.4)$$

Η ροή θερμότητας λόγω αγωγής δίνεται από τον νόμο του Fourier:

$$Q_{cond} = -kA_c \frac{dT}{dx} \quad (2.5)$$

όπου k είναι ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας του υλικού του πτερυγίου.

Αν παραγωγίσουμε την (2.5) και αντικαταστήσουμε στην (2.4) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} -kA_c \frac{d^2T}{dx^2} + hP(T - T_s) = 0 &\Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{kA_c}(T - T_s) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} - \frac{h2L}{kL\delta}(T - T_s) = 0 &\quad (2.6) \end{aligned}$$

Αν αντί της θερμοκρασίας χρησιμοποιήσουμε την ποσότητα θ :

$$\theta(x) = T(x) - T_s \quad (2.7)$$

που είναι η διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ του σημείου x και του περιβάλλοντος, τότε η διαφορική εξίσωση που περιγράφει τη μεταφορά θερμότητας στο ορθογωνικό περύγιο έχει τη μορφή:

$$\frac{d^2\theta(x)}{dx^2} - \frac{2h}{k\delta}\theta(x) = 0 \quad (2.8)$$

γιατί $\frac{dT}{dx} = \frac{d\theta}{dx}$

2.2 ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση είναι μία συνήθης διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως με σταθερούς συντελεστές.

Θέτουμε:

$$m = \sqrt{\frac{2h}{k\delta}} \quad (2.9)$$

οπότε γράφεται:

$$\frac{d^2\theta(x)}{dx^2} - m^2\theta(x) = 0 \quad (2.10)$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$\lambda^2 - m^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm m \quad (2.11)$$

Η γενική λύση της (2.8) είναι:

$$\theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} \quad (2.12)$$

Στη συνέχεια με σκοπό να υπολογίσουμε την ειδική λύση, εφαρμόζουμε τις συνοριακές συνθήκες για να υπολογίσουμε τις σταθερές C_1 και C_2 .

Οι συνοριακές συνθήκες είναι οι εξής:

1) Στο άκρο $x=b$, δηλαδή στη βάση του πτερυγίου η θερμοκρασία είναι σταθερή και ίση με T_b και αντίστοιχα η διαφορά $\theta(x=b)=\theta_b$, όπου $\theta_b=T_b-T_s$.

2) Στο άκρο $x=0$, θεωρούμε ότι η μεταφορά θερμότητας είναι αμελητέα (μονωμένο άκρο). Συνεπώς η συνθήκη είναι: $\frac{d\theta}{dx}\Big|_{x=0} = 0$

Αρχικά εφαρμόζουμε την πρώτη συνοριακή συνθήκη στη γενική λύση (σχέση 2.12):

$$\theta(b) = C_1 e^{mb} + C_2 e^{-mb} \Rightarrow \theta_b = C_1 e^{mb} + C_2 e^{-mb} \quad (2.13)$$

Για να εφαρμόσουμε την δεύτερη συνοριακή συνθήκη πρέπει πρώτα να παραγωγίσουμε την συνάρτηση $\theta(x)$. Η παράγωγος είναι:

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = mC_1 e^{mx} - mC_2 e^{-mx} \quad (2.14)$$

Τώρα εφαρμόζουμε την δεύτερη συνοριακή συνθήκη:

$$\frac{d\theta}{dx}\Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow mC_1 e^{0m} - mC_2 e^{-0m} = 0 \Rightarrow mC_1 - mC_2 = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 \quad (2.15)$$

Δηλαδή οι δύο σταθερές είναι ίσες. Αν τώρα αντικαταστήσουμε στην σχέση (2.13) μπορούμε να βρούμε την σταθερά:

$$\theta_b = C_1 e^{mb} + C_1 e^{-mb} \Rightarrow \theta_b = C_1 (e^{mb} + e^{-mb}) \Rightarrow C_1 = \frac{\theta_b}{e^{mb} + e^{-mb}} \quad (2.16)$$

Στη συνέχεια για να πάρουμε την ειδική λύση αντικαθιστούμε τις τιμές που βρήκαμε για τις σταθερές C_1 και C_2 στην γενική λύση (σχέση 2.12).

$$\theta(x) = \frac{\theta_b}{e^{mb} + e^{-mb}} e^{mx} + \frac{\theta_b}{e^{mb} + e^{-mb}} e^{-mx} \Rightarrow \theta(x) = \theta_b \frac{e^{mx} + e^{-mx}}{e^{mb} + e^{-mb}} \quad (2.17)$$

Η λύση αυτή μπορεί να γραφτεί και σε καλύτερη μορφή αν χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση του υπερβολικού συνημιτόνου \cosh . Όπως γνωρίζουμε η συνάρτηση αυτή δίνεται από τη σχέση:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (2.18)$$

Αν στη θέση του x βάλουμε το mx και το mb τότε παίρνουμε:

$$\cosh(mx) = \frac{e^{mx} + e^{-mx}}{2} \quad (2.19)$$

και

$$\cosh(mb) = \frac{e^{mb} + e^{-mb}}{2} \quad (2.20)$$

Άρα ο αριθμητής και ο παρονομαστής της σχέσης (2.17) μπορούν να πάρουν την μορφή:

$$e^{mx} + e^{-mx} = 2 \cosh(mx) \quad (2.21)$$

$$e^{mb} + e^{-mb} = 2 \cosh(mb) \quad (2.22)$$

Έτσι η γενική λύση της εξίσωσης γράφεται και στην μορφή:

$$\theta(x) = \theta_b \frac{2 \cosh(mx)}{2 \cosh(mb)} \Rightarrow \theta(x) = \theta_b \frac{\cosh(mx)}{\cosh(mb)} \quad (2.23)$$

2.3 ΡΥΘΜΟΣ ΡΟΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τη ροή θερμότητας από τη βάση του πτερυγίου. Αυτή υπολογίζεται από τον τύπο:

$$q_b = kA \left. \frac{d\theta(x)}{dx} \right|_{x=b} \quad (2.24)$$

Δεν έχουμε βάλει το αρνητικό πρόσημο γιατί έτσι κι αλλιώς η κατεύθυνση που έχουμε πάρει ως θετική για τον άξονα x είναι αντίθετη με την κατεύθυνση της ροής της θερμότητας.

Η παράγωγος της $\theta(x)$ είναι:

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = \theta_b \frac{m \sinh(mx)}{\cosh(mb)} \quad (2.25)$$

γιατί η παράγωγος του υπερβολικού συνημιτόνου είναι το υπερβολικό ημίτονο.

Η τιμή της παραγώγου στη θέση $x=b$ βρίσκεται ως εξής:

$$\left. \frac{d\theta(x)}{dx} \right|_{x=b} = m\theta_b \frac{\sinh(mb)}{\cosh(mb)} = m\theta_b \tanh(mb) \quad (2.26)$$

Άρα η ροή θερμότητας είναι:

$$q_b = kAm\theta_b \tanh(mb) \quad (2.27)$$

Το εμβαδόν A της διατομής του πτερυγίου είναι $A=\delta L$ (σχήμα 2.1)

Άρα:

$$q_b = k\delta Lm\theta_b \tanh(mb) \quad (2.28)$$

2.4 ΑΠΟΔΟΣΗ

Αυτή είναι η πραγματική ροή θερμότητας. Η ιδανική ροή θερμότητας είναι:

$$q_{ideal} = hPb\theta_b \quad (2.29)$$

όπου h είναι ο συντελεστής συναγωγής μεταξύ πτερυγίου και περιβάλλοντος και P είναι η περίμετρος του πτερυγίου.

Η ιδανική ροή θερμότητας υπολογίζεται με τη λογική ότι η ροή θερμότητας θα ήταν μέγιστη αν ολόκληρο το πτερύγιο είχε σταθερά τη θερμοκρασία της βάσης του. Τότε θα είχαμε μεταφορά θερμότητας με συναγωγή και η διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ του πτερυγίου και του περιβάλλοντος θα ήταν φυσικά ίση με θ_b . Το γινόμενο Pb είναι το

εμβαδόν από το οποίο μεταφέρεται η θερμότητα με συναγωγή προς το περιβάλλον. Στην πράξη όμως η θερμοκρασία του πτερυγίου μειώνεται από τη βάση προς τα έξω.

Η περίμετρος είναι ίση με:

$$P = 2L + 2\delta \quad (2.30)$$

Επειδή όμως το μήκος L είναι πολύ μεγαλύτερο του πάχους δ , μπορούμε προσεγγιστικά να πούμε ότι:

$$P = 2L \quad (2.31)$$

Οπότε η ιδανική ροή θερμότητας γίνεται:

$$q_{ideal} = h2Lb\theta_b \quad (2.32)$$

Η απόδοση του πτερυγίου ορίζεται από το λόγο της πραγματικής ροής θερμότητας προς την ιδανική ροή θερμότητας.

Άρα η απόδοση υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\eta = \frac{k\delta L m \theta_b \tanh(mb)}{h2Lb\theta_b} = \frac{k\delta m \tanh(mb)}{2hb} \quad (2.33)$$

Η σχέση αυτή απλοποιείται σημαντικά γιατί σύμφωνα με την σχέση (2.9):

$$m^2 = \frac{2h}{k\delta}$$

Τελικά η απόδοση απλοποιείται ως εξής:

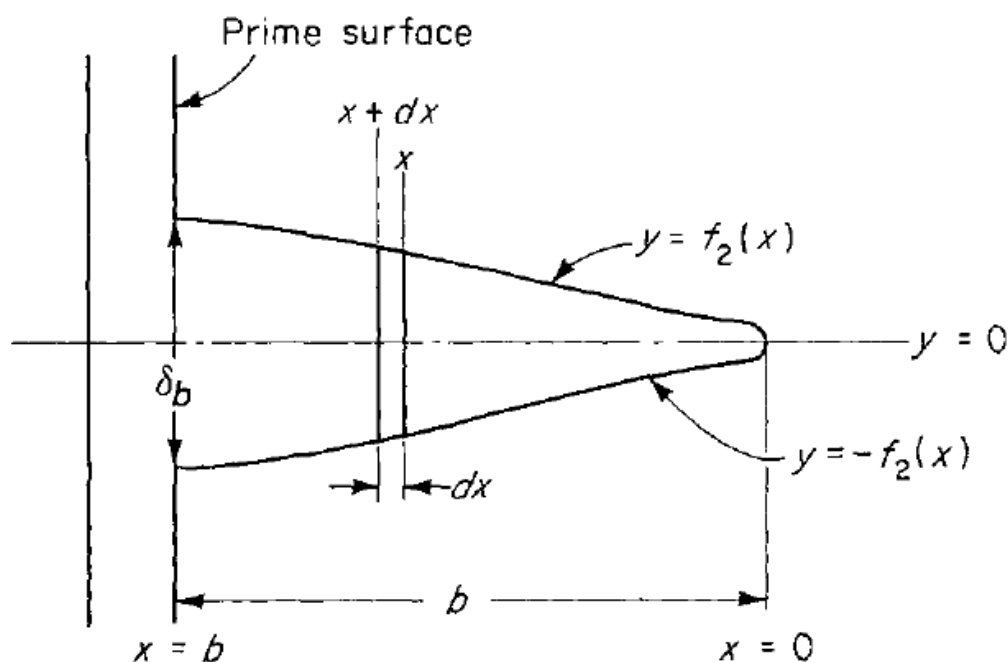
$$\eta = \frac{m \tanh(mb)}{m^2 b} = \frac{\tanh(mb)}{mb} \quad (2.34)$$

και εξαρτάται μόνο από την τιμή του γινομένου mb .

3. ΤΡΙΓΩΝΙΚΟ ΠΤΕΡΥΓΙΟ

3.1 Η ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΣΤΑ ΕΠΙΜΗΚΗ ΠΤΕΡΥΓΙΑ

Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κατανομή θερμοκρασίας μέσα στο πτερύγιο βασίζεται στην θεώρηση ότι έχουμε μόνιμη κατάσταση, δηλαδή όση θερμότητα εισέρχεται σε απειροστό στοιχείο του πτερυγίου, τόση και εξέρχεται. Στο σχήμα 3.1 φαίνεται η γενική μορφή ενός επιμήκους πτερυγίου.



Σχήμα 3.1 Επίμηκες πτερύγιο αυθαίρετου προφίλ [2].

Το απειροστό στοιχείο περιορίζεται από επίπεδα παράλληλα στη βάση του πτερυγίου στο x και στο $x+dx$, καθώς και από τις καμπύλες $y = \pm f_2(x)$ που καθορίζουν το σχήμα του πτερυγίου.

Η διαφορά ανάμεσα στην θερμότητα που εισέρχεται στο στοιχείο στο $x+dx$ και σε αυτήν που εξέρχεται από το στοιχείο στο x είναι:

$$dq = k \frac{d}{dx} \left(2Lf_2(x) \frac{dT}{dx} \right) \quad (3.1)$$

Το γινόμενο $2Lf_2(x)$ είναι το εμβαδόν του πτερυγίου στην θέση x και L είναι το μήκος του.

Αφού θεωρούμε ότι η θερμοκρασία σε κάθε θέση δεν μεταβάλλεται (υπόθεση μόνιμης κατάστασης), αυτή η περίσσεια θερμότητας θα πρέπει να είναι ίση με την θερμότητα που μεταφέρεται στο περιβάλλον λόγω συναγωγής.

$$dq = hP(T - T_s)dx = 2h[L + f_2(x)](T - T_s)dx \quad (3.2)$$

Επειδή το πάχος του πτερυγίου πρέπει να είναι πολύ μικρότερο από το μήκος και το ύψος του, η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$dq = 2hL(T - T_s)dx \quad (3.3)$$

Εξισώνοντας τα δύο ποσά θερμότητας έχουμε το ισοζύγιο της θερμότητας:

$$k \frac{d}{dx} \left(f_2(x) \frac{d\theta}{dx} \right) = h\theta \quad (3.4)$$

ή

$$f_2(x) \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{df_2(x)}{dx} \cdot \frac{d\theta}{dx} - \frac{h}{k} \theta = 0 \quad (3.5)$$

3.2 Η ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΙΚΟΥ ΠΤΕΡΥΓΙΟΥ

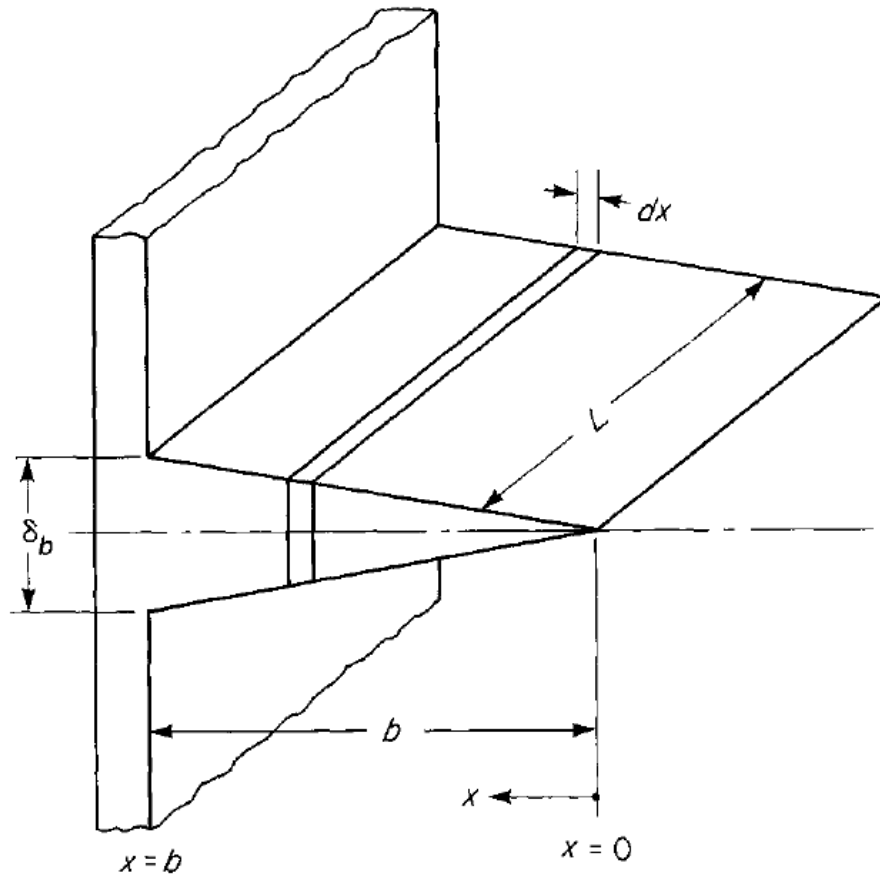
Για το επίμηκες πτερύγιο τριγωνικού προφίλ που φαίνεται στο σχήμα 3.2, η συνάρτηση που περιγράφει το προφίλ του πτερυγίου είναι:

$$f_2(x) = \frac{\delta_b}{2} \cdot \frac{x}{b} \quad (3.6)$$

όπου δ_b το πάχος του πτερυγίου στην βάση του.

Αντικαθιστώντας στην (3.5) παίρνουμε την διαφορική εξίσωση που περιγράφει την μεταφορά θερμότητας στο τριγωνικό πτερύγιο:

$$x \frac{d^2\theta(x)}{dx^2} + \frac{d\theta(x)}{dx} - m^2 b \theta(x) = 0 \quad (3.7)$$



Σχήμα 3.1 Τριγωνικό πτερύγιο [2].

όπου: $m = \sqrt{\frac{2h}{k\delta_b}}$

Η (3.7) είναι μία συνήθης διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως με μεταβλητούς συντελεστές.

Στην παραπάνω διαφορική εξίσωση κάνουμε αλλαγή της μεταβλητής και αντικαθιστούμε το x με τη μεταβλητή:

$$\omega = 2m\sqrt{bx} \quad (3.8)$$

Από τη σχέση αυτή φαίνεται ότι το x είναι ίσο με:

$$x = \frac{\omega^2}{4m^2b} \quad (3.9)$$

Πρέπει να αντικατασταθούν όλες οι παράγωγοι ως προς x με παραγώγους ως προς ω όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\omega = 2m\sqrt{bx} \Rightarrow \frac{d\omega}{dx} = \frac{2m\sqrt{b}}{2\sqrt{x}} = \frac{m\sqrt{b}}{\sqrt{x}} = \frac{2m^2b}{\omega} \quad (3.10)$$

Οι παράγωγοι ως προς x αντικαθίστανται ως εξής:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d\theta}{d\omega} \frac{d\omega}{dx} = \frac{d\theta}{d\omega} \frac{2m^2b}{\omega} \quad (3.11)$$

και

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{d\theta}{d\omega} \frac{2m^2b}{\omega} \right) \frac{d\omega}{dx} = \left(\frac{d^2\theta}{d\omega^2} \frac{2m^2b}{\omega} - \frac{d\theta}{d\omega} \frac{2m^2b}{\omega^2} \right) \frac{2m^2b}{\omega} \quad (3.12)$$

Αντικαθιστώντας το x και τις παραγώγους της θ ως προς x μέσω των σχέσεων (3.9), (3.11) και (3.12) στην εξίσωση (3.7) καταλήγουμε στην διαφορική εξίσωση:

$$\frac{\omega^2}{4m^2b} \left(\frac{d^2\theta}{d\omega^2} \frac{2m^2b}{\omega} - \frac{d\theta}{d\omega} \frac{2m^2b}{\omega^2} \right) \frac{2m^2b}{\omega} + \frac{d\theta}{d\omega} \frac{2m^2b}{\omega} - m^2b\theta = 0 \quad (3.13)$$

Αφού κάνουμε τις πράξεις καταλήγουμε στην διαφορική εξίσωση που περιγράφει την μεταφορά θερμότητας στο τριγωνικό περυσίο:

$$\omega \frac{d^2\theta(\omega)}{d\omega^2} + \frac{d\theta(\omega)}{d\omega} - \omega\theta(\omega) = 0 \quad (3.14)$$

3.3 ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

Η εξίσωση (3.7) που περιγράφει την μεταφορά θερμότητας στο τριγωνικό περυσίο είναι η τροποποιημένη διαφορική εξίσωση Bessel μηδενικής τάξης. Η γενική λύση της είναι γνωστή γιατί είναι μια εξίσωση που συναντάμε σε πάρα πολλά προβλήματα και είναι η παρακάτω:

$$\theta(x) = C_1 I_0(2m\sqrt{bx}) + C_2 K_0(2m\sqrt{bx}) \quad (3.8)$$

Στην παραπάνω λύση έχουμε ήδη αντικαταστήσει το ω από την σχέση (3.8) ώστε η λύση να εκφράζεται ως προς x .

I_0 είναι η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel (modified Bessel function) μηδενικής τάξης πρώτου είδους.

K_0 είναι η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel μηδενικής τάξης δευτέρου είδους.

Οι σταθερές C_1 και C_2 θα υπολογιστούν από τις συνοριακές συνθήκες και θα καθορίσουν την ειδική λύση που είναι κατάλληλη για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

Η συνάρτηση K_0 δεν είναι φραγμένη (τείνει στο άπειρο) για $x=0$.

Συνεπώς είναι απαραίτητο η σταθερά C_2 να είναι ίση με μηδέν.

Αντικαθιστώντας $C_2=0$, μένει μόνο ο πρώτος όρος:

$$\theta(x) = C I_0(2m\sqrt{bx}) \quad (3.9)$$

Στο άκρο $x=b$, δηλαδή στη βάση του περυσίου, όπως και στο ορθογωνικό περυσίο πρέπει η θερμοκρασία είναι σταθερή και ίση με T_b και αντίστοιχα η διαφορά $\theta(x=b)=\theta_b$, όπου $\theta_b=T_b-T_s$.

Από την εφαρμογή αυτής της συνοριακής συνθήκης μπορούμε να βρούμε τη σταθερά C_1 :

$$\theta_b = C_1 I_0(2m\sqrt{b^2}) \quad (3.10)$$

Και άρα η σταθερά είναι ίση με:

$$C_1 = \frac{\theta_b}{I_0(2mb)} \quad (3.11)$$

Αντικαθιστώντας στην λύση (3.8) παίρνουμε την ειδική λύση για τις δεδομένες συνθήκες:

$$\theta(x) = \frac{\theta_b}{I_0(2mb)} I_0(2m\sqrt{bx}) \quad (3.12)$$

3.4 ΡΥΘΜΟΣ ΡΟΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΑΠΟΔΟΣΗ

Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε τον ρυθμό μεταφοράς θερμότητας μέσα από το τριγωνικό περυγίο:

$$q_b = kA \frac{dT}{dx} \Big|_{x=b} = kA \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=b} \quad (3.13)$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι το εμβαδόν στη βάση του περυγίου είναι:

$$A = L\delta_b \quad (3.14)$$

Η παράγωγος της $\theta(x)$ υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την ανάλυση σε σειρά της συνάρτησης Bessel Και παραγωγίζοντας κάθε όρο της σειράς. Τελικά παίρνουμε το αποτέλεσμα:

$$q_b = \frac{2hL\theta_b I_1(2mb)}{mI_0(2mb)} \quad (3.15)$$

Στην ιδανική περίπτωση ο ρυθμός μετάδοσης θερμότητας θα ήταν το γινόμενο του συντελεστή συναγωγής επί την διαφορά θερμοκρασίας θ_b επί το συνολικό εμβαδόν $2bL$:

$$q_{ideal} = 2hbL\theta_b \quad (3.16)$$

Η απόδοση του πτερυγίου θα είναι ο λόγος του πραγματικού προς τον ιδανικό ρυθμό ροής της θερμότητας:

$$\eta = \frac{2hL\theta_b \cdot \frac{I_1(2mb)}{mI_0(2mb)}}{2hbL\theta_b} = \frac{I_1(2mb)}{mbI_0(2mb)} \quad (3.17)$$

Οι συναρτήσεις Bessel I_0 και I_1 δίνονται από την σχέση (8) του Παραρτήματος 1. Οι πρώτοι 7 όροι της σειράς που δίνει κάθε συνάρτηση είναι:

$$I_0(2mb) = \frac{1}{0!\Gamma(1)} + 0 \cdot 2mb + \frac{\left(\frac{2mb}{2}\right)^2}{1!\Gamma(2)} + 0 \cdot (2mb)^3 + \frac{\left(\frac{2mb}{2}\right)^4}{2!\Gamma(3)} + 0(2mb)^5 + \frac{\left(\frac{2mb}{2}\right)^6}{3!\Gamma(4)} + 0 \cdot (2mb)^7 \quad (3.18)$$

$$I_1(2mb) = 0 + \frac{2mb}{0!\Gamma(2)} + 0 \cdot (2mb)^2 + \frac{\left(\frac{2mb}{2}\right)^3}{1!\Gamma(3)} + 0 \cdot (2mb)^4 + \frac{\left(\frac{2mb}{2}\right)^5}{2!\Gamma(4)} + 0(2mb)^6 + \frac{\left(\frac{2mb}{2}\right)^7}{3!\Gamma(5)} \quad (3.19)$$

Χρησιμοποιώντας για την συνάρτηση Γάμα τον τύπο:

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (3.20)$$

βρίσκουμε τις τιμές: $\Gamma(1) = 0! = 1$, $\Gamma(2) = 1! = 1$, $\Gamma(3) = 2! = 2$, $\Gamma(4) = 3! = 6$, $\Gamma(5) = 4! = 24$.

Οπότε οι παραπάνω σχέσεις γίνονται:

$$I_0(mb) = 1 + 0 \cdot mb + 1 \cdot (mb)^2 + 0 \cdot (mb)^3 + \frac{1}{4} \cdot (mb)^4 + 0 \cdot (mb)^5 + \frac{1}{36} (mb)^6 + 0 \cdot (mb)^7 \quad (3.21)$$

$$I_1(mb) = 0 + 1 \cdot mb + 0 \cdot (mb)^2 + \frac{1}{2} \cdot (mb)^3 + 0 \cdot (mb)^4 + \frac{1}{12} (mb)^5 + 0 \cdot (mb)^6 + \frac{1}{144} \cdot (mb)^7 \quad (3.22)$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε και τους τύπους (6) του Παραρτήματος 2 και υπολογίζουμε τους πρώτους όρους του πηλίκου που δίνει την απόδοση (σχέση 3.17).

$$c_0=0, c_1=1, c_2=0, c_3=-1/2, c_4=0, c_5=1/3, c_6=0 \quad (3.23)$$

Τελικά η απόδοση (σχέση 3.17) γίνεται πιο απλά:

$$\eta = \frac{1}{mb} \left(mb - \frac{1}{2} (mb)^3 + \frac{1}{3} (mb)^5 \right) = 1 - \frac{1}{2} (mb)^2 + \frac{1}{3} (mb)^4 \quad (3.24)$$

Αν προχωρήσουμε σε περισσότερους όρους βρίσκουμε:

$$\eta(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{11x^6}{48} + \frac{19x^8}{120} - \frac{473x^{10}}{4320} + \frac{229x^{12}}{3024} - \frac{101369x^{14}}{1935360}$$

όπου $x=mb$.

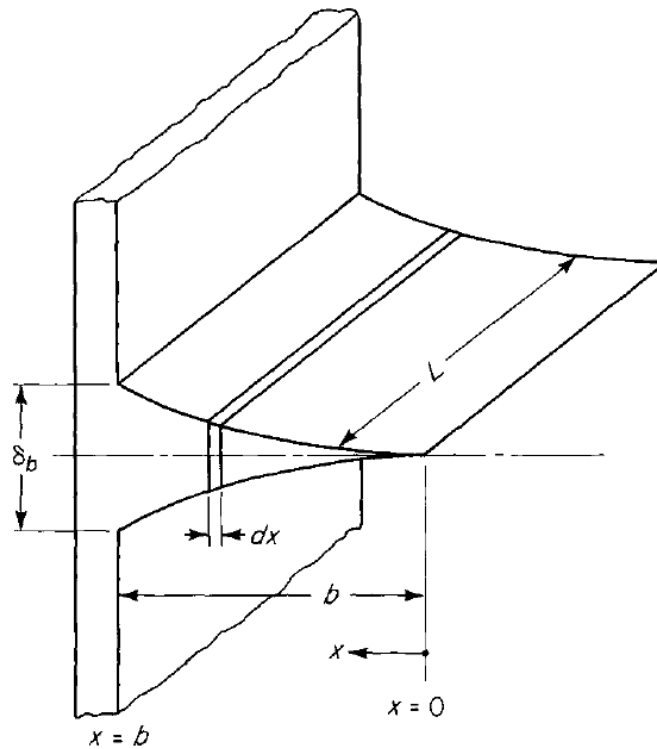
4. ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΑ ΠΤΕΡΥΓΙΑ

4.1 ΚΟΙΛΟ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟ ΠΤΕΡΥΓΙΟ

4.1.1 Η Διαφορική Εξίσωση

Το επίμηκες κοίλο παραβολικό πτερύγιο (longitudinal fin of concave parabolic profile) που φαίνεται στο σχήμα 4.1 περιγράφεται από την συνάρτηση:

$$f_2(x) = \frac{\delta_b}{2} \cdot \left(\frac{x}{b}\right)^2 \quad (4.1)$$



Σχήμα 4.1 Κοίλο παραβολικό πτερύγιο [2].

Αντικαθιστώντας την $f_2(x)$ και την παράγωγό της:

$$\frac{df_2(x)}{dx} = \frac{\delta_b}{b^2} x \quad (4.2)$$

στην γενική διαφορική εξίσωση (3.5) που αποδείξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο παίρνουμε την διαφορική εξίσωση που περιγράφει την μεταφορά θερμότητας στο κοίλο παραβολικό πτερύγιο:

$$\frac{\delta_b}{2} \left(\frac{x}{b} \right)^2 \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{\delta_b}{b^2} x \frac{d\theta}{dx} - \frac{h}{k} \theta = 0 \quad (4.3)$$

καταλήγουμε στην διαφορική εξίσωση:

$$x^2 \frac{d^2\theta(x)}{dx^2} + 2x \frac{d\theta(x)}{dx} - m^2 b^2 \theta(x) = 0 \quad (4.4)$$

όπου πάλι θέσαμε $m = \sqrt{\frac{2h}{k\delta_b}}$

4.1.2 Λύση της Εξίσωσης

Η παραπάνω εξίσωση ονομάζεται διαφορική εξίσωση του Euler και είναι μια διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως. Για την επίλυσή της, κάνουμε τον μετασχηματισμό: $x = e^v$ ή $v = \ln x$.

Αρχικά εκφράζουμε την συνάρτηση θ και τις παραγώγους της ως προς την νέα μεταβλητή v σύμφωνα με τις παρακάτω σχέσεις.

Πρώτη παράγωγος:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d\theta}{dv} \frac{dv}{dx} = \frac{1}{x} \frac{d\theta}{dv} \quad (4.5)$$

Δεύτερη παράγωγος:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \frac{d\theta}{dv} \right) = -\frac{1}{x^2} \frac{d\theta}{dv} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \frac{d\theta}{dv} = -\frac{1}{x^2} \frac{d\theta}{dv} + \frac{1}{x} \frac{d^2\theta}{dv^2} \frac{dv}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dx^2} = -\frac{1}{x^2} \frac{d\theta}{dv} + \frac{1}{x^2} \frac{d^2\theta}{dv^2} \quad (4.6)$$

Στους παραπάνω υπολογισμούς χρησιμοποιήσαμε την σχέση: $\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}$
 Αντικαθιστούμε τις παραγώγους της συνάρτησης θ με τις παραπάνω σχέσεις και η διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$\frac{d^2\theta}{dv^2} + \frac{d\theta}{dv} - m^2 b^2 \theta = 0 \quad (4.7)$$

όπου τώρα η θ είναι συνάρτηση του v . Η εξίσωση αυτή είναι μία διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές και έχει λύση:

$$\theta(v) = C_1 e^{av} + C_2 e^{\beta v} \quad (4.8)$$

Κάνουμε την αντικατάσταση $x = e^v$ και έτσι η λύση εκφράζεται συναρτήσει του x :

$$\theta(x) = C_1 x^a + C_2 x^\beta \quad (4.9)$$

όπου

$$a, \beta = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4m^2 b^2} \quad (4.10)$$

Επειδή $\beta < 0$, είναι φανερό ότι η λύση για τη διαφορά θερμοκρασίας δεν θα είναι φραγμένη στο $x=0$ εκτός εάν $C_2=0$.

Επίσης για $x=b$ (στη βάση του πτερυγίου) θα πρέπει $\theta=\theta_b$. Άρα $C_1=\theta_b/b^a$. Τελικά η συνάρτηση που δίνει την θερμοκρασία μέσα στο πτερύγιο είναι:

$$\theta(x) = \theta_b \left(\frac{x}{b} \right)^a \quad (4.11)$$

4.1.3 Ρυθμός Ροής Θερμότητας και Απόδοση

Ο ρυθμός με τον οποίο μεταφέρεται η θερμότητα υπολογίζεται από την σχέση:

$$q_b = kA \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=b} = \frac{k\delta_b L \theta_b a}{b} = \frac{k\delta_b L \theta_b}{2b} \left(-1 + \sqrt{1 + (2mb)^2} \right) \quad (4.12)$$

όπου αντικαταστήσαμε το εμβαδόν, A , στη βάση του πτερυγίου με: $A = L\delta_b$ και το a από την σχέση (4.10).

Ο ιδανικός ρυθμός μετάδοσης θερμότητας, υπολογίζεται αν θεωρήσουμε ότι η διαφορά θερμοκρασίας με το περιβάλλον είναι σε όλη την επιφάνεια του πτερυγίου ίση με θ_b :

$$q_{ideal} = 2hbL\theta_b \quad (4.13)$$

Η απόδοση του κοίλου παραβολικού πτερυγίου θα είναι, όπως έχουμε ήδη αναφέρει ο λόγος του πραγματικού προς τον ιδανικό ρυθμό μεταφοράς θερμότητας:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{q}{q_{ideal}} = \frac{kL\delta_b\theta_b}{4hb^2L\theta_b} \left(-1 + \sqrt{1 + (2mb)^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2m^2b^2} \left(-1 + \sqrt{1 + (2mb)^2} \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την σχέση: $m = \sqrt{\frac{2h}{k\delta_b}}$

Μπορούμε να απλοποιήσουμε την σχέση που δίνει την απόδοση αν πολλαπλασιάσουμε αριθμητή και παρονομαστή με την συζυγή παράσταση του αριθμητή:

$$\eta = \frac{1}{2m^2b^2} \left(-1 + \sqrt{1 + (2mb)^2} \right) \cdot \frac{\left(-1 - \sqrt{1 + (2mb)^2} \right)}{\left(-1 - \sqrt{1 + (2mb)^2} \right)} \quad (4.15)$$

Θα πάρουμε:

$$\eta = \frac{(-1)^2 - (1 + 4m^2b^2)}{2m^2b^2 \left(-1 - \sqrt{1 + (2mb)^2} \right)} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + (2mb)^2}} \quad (4.16)$$

Η μορφή αυτή είναι αυτή που χρησιμοποιείται συνήθως για την απόδοση του κοίλου παραβολικού πτερυγίου.

4.2 ΚΥΡΤΟ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟ ΠΤΕΡΥΓΙΟ

4.2.1 Η Διαφορική Εξίσωση

Το επίμηκες κυρτό παραβολικό πτερύγιο (longitudinal fin of convex parabolic profile) που φαίνεται στο σχήμα 4.2 περιγράφεται από την συνάρτηση:

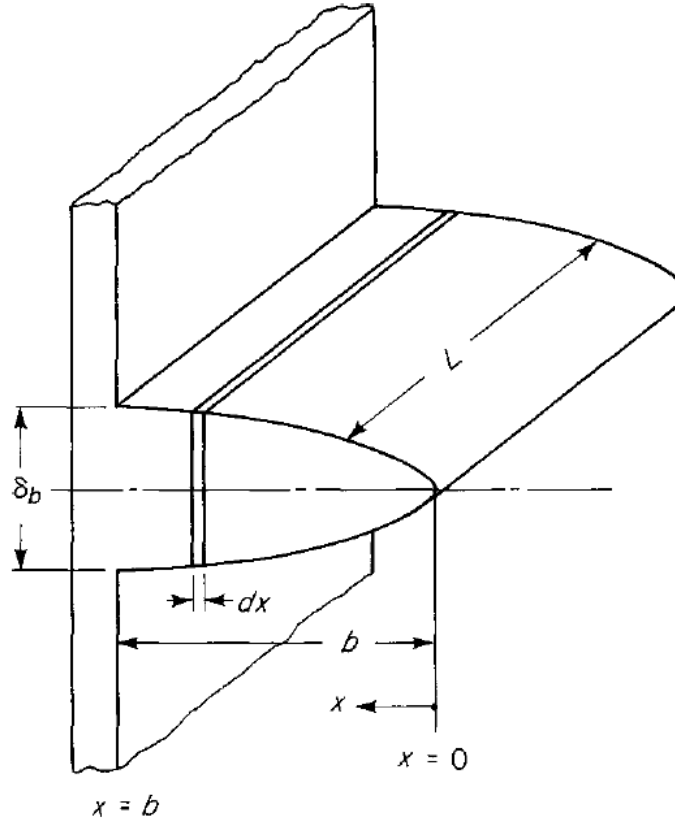
$$f_2(x) = \frac{\delta_b}{2} \cdot \sqrt{\frac{x}{b}} \quad (4.17)$$

Αντικαθιστώντας την $f_2(x)$ και την παράγωγό της:

$$\frac{df_2(x)}{dx} = \frac{\delta_b}{4\sqrt{bx}} \quad (4.18)$$

στην γενική διαφορική εξίσωση (3.5) που αποδείξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο παίρνουμε την διαφορική εξίσωση που περιγράφει την μεταφορά θερμότητας στο κυρτό παραβολικό πτερύγιο:

$$\sqrt{x} \frac{d^2\theta(x)}{dx^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{d\theta(x)}{dx} - m^2 \sqrt{b}\theta(x) = 0 \quad (4.19)$$



Σχήμα 4.2 Κυρτό παραβολικό πτερύγιο [2].

4.1.2 Λύση της Εξίσωσης

Αρχικά πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης με $x^{3/2}$. Η εξίσωση γίνεται:

$$x^2 \frac{d^2\theta(x)}{dx^2} + \frac{x}{2} \frac{d\theta(x)}{dx} - m^2 x^{3/2} \sqrt{b}\theta(x) = 0 \quad (4.20)$$

Για να υπολογίσουμε την λύση της την συγκρίνουμε με την γενικευμένη εξίσωση Bessel:

$$x^2 \frac{d^2y(x)}{dx^2} + (1-2a)x \frac{dy}{dx} + [\beta^2 \gamma^2 x^{2\gamma} + (a^2 - n^2 \gamma^2)]y(x) = 0 \quad (4.21)$$

της οποίας η λύση είναι:

$$y(x) = x^a [C_1 J_n(\beta x^\gamma) + C_2 Y_n(\beta x^\gamma)] \quad (4.22)$$

Η εξίσωση (4.20) ταυτίζεται με την (4.21) αν θέσουμε: $a = \frac{1}{4}$,

$$\beta = \frac{4}{3} mb^{1/4}, \quad \gamma = \frac{3}{4} \quad \text{και} \quad n = \frac{1}{3}.$$

Τότε η γενική λύση της (4.20) είναι:

$$\theta(x) = x^{1/4} [C_1 I_{1/3} \left(\frac{4}{3} mb^{1/4} x^{3/4} \right) + C_2 I_{-1/3} \left(\frac{4}{3} mb^{1/4} x^{3/4} \right)] \quad (4.23)$$

Οι συναρτήσεις $I_{1/3}$ και $I_{-1/3}$ είναι οι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους και η τάξη τους είναι κλασματική ($1/3$ και $-1/3$).

Από την μορφή της λύσης βλέπουμε ότι συμφέρει να κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής:

$$u = \frac{4}{3} mb^{1/4} x^{3/4} \quad (4.24)$$

και επίσης να θέσουμε:

$$\Omega = \left(\frac{3}{4mb^{1/4}} \right)^{1/3} \quad (4.25)$$

Με αυτές τις αντικαταστάσεις η λύση παίρνει την πιο απλή μορφή:

$$\theta(u) = \Omega u^{1/3} [C_1 I_{1/3}(u) + C_2 I_{-1/3}(u)] \quad (4.26)$$

Η παράγωγος της λύσης πρέπει να είναι ίση με μηδέν στο $x=0$ και συνεπώς στο $u=0$. Η παράγωγος όμως της συνάρτησης $u^{1/3} I_{1/3}(u)$ δεν είναι φραγμένη στο $u=0$. Συμπεραίνουμε ότι πρέπει $C_1=0$.

Έτσι η λύση (4.26) απλοποιείται σημαντικά:

$$\theta(u) = \Omega C_2 u^{1/3} I_{-1/3}(u) \quad (4.27)$$

Η άλλη συνοριακή συνθήκη είναι ότι για $x=b$ και συνεπώς για:

$$u = u_b = \frac{4}{3} mb^{1/4} b^{3/4} = \frac{4}{3} mb \text{ πρέπει η συνάρτηση } \theta \text{ να παίρνει την τιμή}$$

θ_b . Δηλαδή:

$$\theta_b = \Omega C_2 b^{1/3} I_{-1/3}(b) \Rightarrow C_2 = \frac{\theta_b}{\Omega b^{1/3} I_{-1/3}(b)} \quad (4.28)$$

Αν αντικαταστήσουμε το C_2 από την (4.28) στην (4.27) παίρνουμε τη λύση:

$$\theta(u) = \left(\frac{u}{u_b} \right)^{1/3} \frac{\theta_b I_{-1/3}(u)}{I_{-1/3}(u_b)} \quad (4.29)$$

όπου $u = \frac{4}{3} mb^{1/4} x^{3/4}$

4.2.3 Ρυθμός Ροής Θερμότητας και Απόδοση

Όπως και προηγουμένως, ο ρυθμός ροής θερμότητας υπολογίζεται από την παράγωγο της $\theta(x)$ και υπολογίζοντας την τιμή της παραγώγου στο $x=0$. Χρησιμοποιώντας την παρακάτω ιδιότητα των συναρτήσεων Bessel:

$$\frac{d}{du} \left(u^{1/3} \cdot I_{-1/3}(u) \right) = -u^{1/3} I_{2/3}(u) \quad (4.30)$$

υπολογίζουμε την παράγωγο και τελικά βρίσκουμε:

$$q_b = k\delta_b L m \theta_b \frac{I_{2/3}\left(\frac{4}{3}mb\right)}{I_{-1/3}\left(\frac{4}{3}mb\right)} \quad (4.31)$$

Ο ιδανικός ρυθμός μετάδοσης θερμότητας, όπως και προηγουμένως είναι:

$$q_{ideal} = 2hbL\theta_b \quad (4.32)$$

Η απόδοση του πτερυγίου θα είναι ο λόγος του πραγματικού προς τον ιδανικό ρυθμό ροής:

$$\eta = \frac{1}{mb} \frac{I_{2/3}\left(\frac{4}{3}mb\right)}{I_{-1/3}\left(\frac{4}{3}mb\right)} \quad (4.33)$$

Αν κάνουμε την ίδια διαδικασία που εφαρμόσαμε στο τριγωνικό πτερύγιο για το πηλίκο των σειρών που δίνουν τις συναρτήσεις τροποποιημένες Bessel βρίσκουμε το αποτέλεσμα:

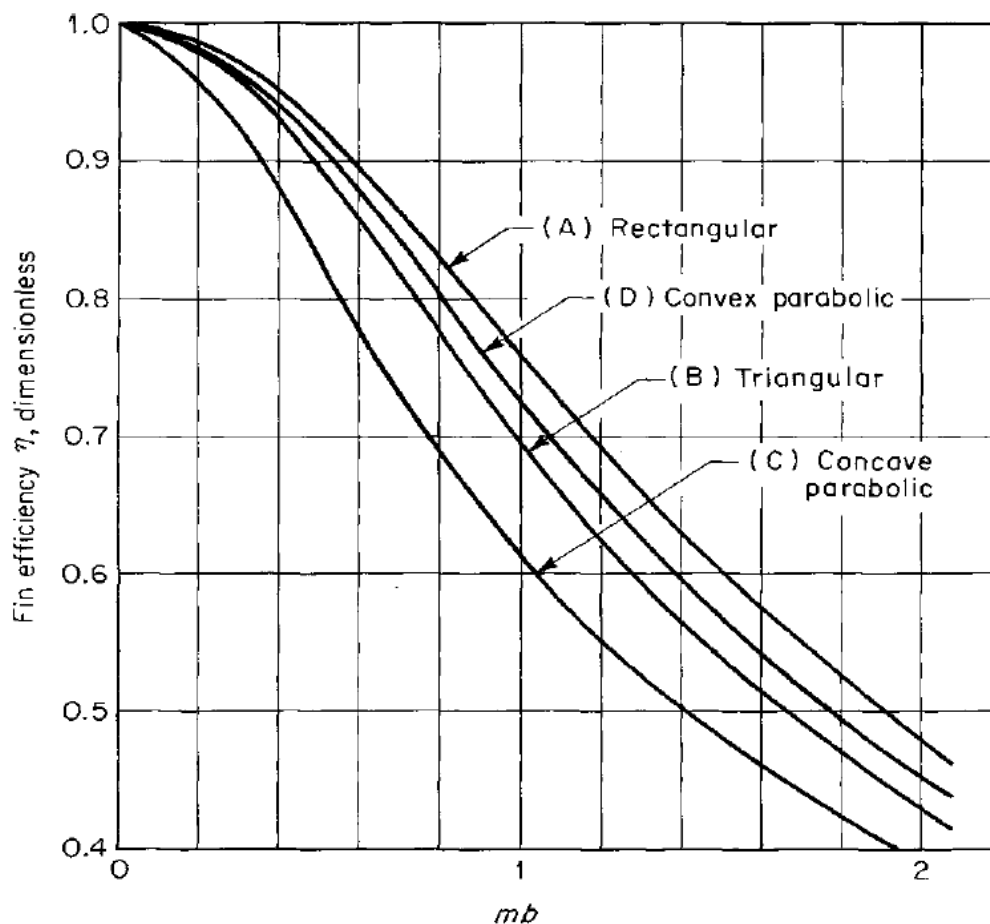
$$\eta(x) = 1 - \frac{2x^2}{5} + \frac{x^4}{5} - \frac{28x^6}{275} + \frac{4x^8}{77} - \frac{4338x^{10}}{163625} + \frac{2214x^{12}}{163625} \quad (4.34)$$

όπου $x=mb$

4.3 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΕΠΙΜΗΚΩΝ ΠΤΕΡΥΓΙΩΝ

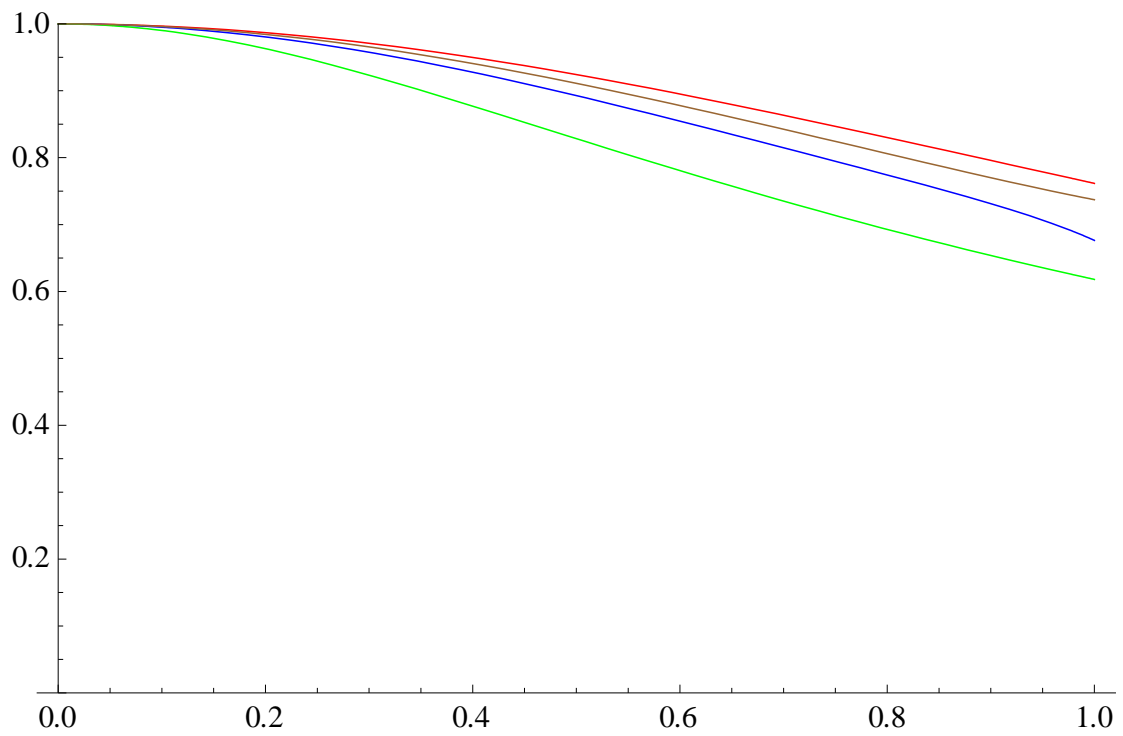
Η απόδοση όλων των επιμήκων πτερυγίων (ορθογωνικού, τριγωνικού και παραβολικών) εξαρτάται από την ποσότητα mb που καθορίζεται από τις διαστάσεις και τις θερμικές ιδιότητες του υλικού του πτερυγίου και του περιβάλλοντος. Στο σχήμα 4.3 φαίνεται η απόδοση και των τεσσάρων πτερυγίων συναρτήσει της ποσότητας mb . Είναι φανερό

ότι η απόδοση του ορθογωνικού πτερυγίου είναι μεγαλύτερη για κάθε τιμή του mb .



Σχήμα 4.3 Σύγκριση της απόδοσης των επιμήκων πτερυγίων [2].

Στο παρακάτω σχήμα γίνεται πάλι σύγκριση της απόδοσης των επιμήκων πτερυγίων αλλά αυτή φορά με μεγαλύτερη λεπτομέρεια στην περιοχή τιμών της ποσότητας mb από 0 έως 1. Το παρακάτω σχήμα είναι σε πλήρη συμφωνία με το παραπάνω διάγραμμα που προέρχεται από τη βιβλιογραφία.



Σχήμα 4.4 Σύγκριση της απόδοσης των επιμήκων πτερυγίων για τιμές της ποσότητας mb από 0 έως 1. Από πάνω προς τα κάτω είναι: ορθογωνικό, κυρτό παραβολικό, τριγωνικό, κοίλο παραβολικό.

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα πτερύγια χρησιμοποιούνται για την αύξηση του ρυθμού μεταφοράς θερμότητας από επιφάνειες που ψύχονται από αέρια μέσω φυσικής ή εξαναγκασμένης συναγωγής. Τα πτερύγια είναι μεταλλικά, έχουν μια ποικιλία σχημάτων, το μήκος τους είναι πολύ μεγαλύτερο από το πάχος ή τη διάμετρό τους και η κατανομή θερμοκρασίας στο εσωτερικό τους είναι μονοδιάστατη.

Μελετήθηκαν διάφορες γεωμετρίες πτερυγίων. Κατασκευάστηκε η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κατανομή της θερμοκρασίας και επιλύθηκε. Υπολογίστηκε ο ρυθμός μεταφοράς θερμότητας και η απόδοση των πτερυγίων.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ BESSEL

1. ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ BESSEL

Η διαφορική εξίσωση Bessel είναι μία συνήθης διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως. Η γενικευμένη διαφορική εξίσωση Bessel είναι η παρακάτω:

$$x^2 \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + (1 - 2a)x \frac{dy}{dx} + [\beta^2 \gamma^2 x^{2\gamma} + (a^2 - n^2 \gamma^2)]y(x) = 0 \quad (1)$$

Η γενική της λύση είναι:

$$y(x) = x^a [C_1 J_n(\beta x^\gamma) + C_2 Y_n(\beta x^\gamma)] \quad (2)$$

όπου οι συναρτήσεις $J_n(x)$ και $Y_n(x)$ ονομάζονται συναρτήσεις Bessel τάξης n , 1^{ου} και 2^{ου} είδους αντίστοιχα.

Για διάφορες τιμές των παραμέτρων a , β , γ , n προκύπτουν διάφορες ειδικές μορφές οι οποίες είναι χρήσιμες σε ένα μεγάλο εύρος εφαρμογών.

Μία από αυτές είναι η τροποποιημένη εξίσωση Bessel που εμφανίζεται σε πάρα πολλές εφαρμογές:

$$x^2 y''(x) + xy'(x) - (x^2 + n^2)y(x) = 0 \quad (3)$$

Η γενική λύση της δίνεται από τη σχέση:

$$y(x) = C_1 I_n(x) + C_2 K_n(x) \quad (4)$$

όπου οι συναρτήσεις $I_n(x)$ και $K_n(x)$ ονομάζονται τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel τάξης n , 1^{ov} και 2^{ov} είδους αντίστοιχα. Η τροποποιημένη εξίσωση προκύπτει από την γενική μορφή για $\alpha=0$, $\beta^2=-1$ και $\gamma=1$.

2. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ BESSEL ΣΕ ΜΟΡΦΗ ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΑΣ

Οι συναρτήσεις Bessel ανήκουν στην κατηγορία των λεγόμενων ειδικών συναρτήσεων. Οι τύποι από τους οποίους ορίζονται δεν είναι απλοί όπως στις συνηθισμένες συναρτήσεις.

Στη συνέχεια δίνονται οι τύποι των συναρτήσεων Bessel:

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}}{k! \Gamma(k+n+1)} \quad (5)$$

όπου η συνάρτηση Γ είναι μια άλλη ειδική συνάρτηση που αποτελεί γενίκευση του παραγοντικού και ορίζεται από την σχέση:

$$\Gamma(x) = \int_0^1 (-\ln t)^{x-1} dt \quad \text{για } x > 0 \quad (6)$$

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \quad \text{για } x < 0$$

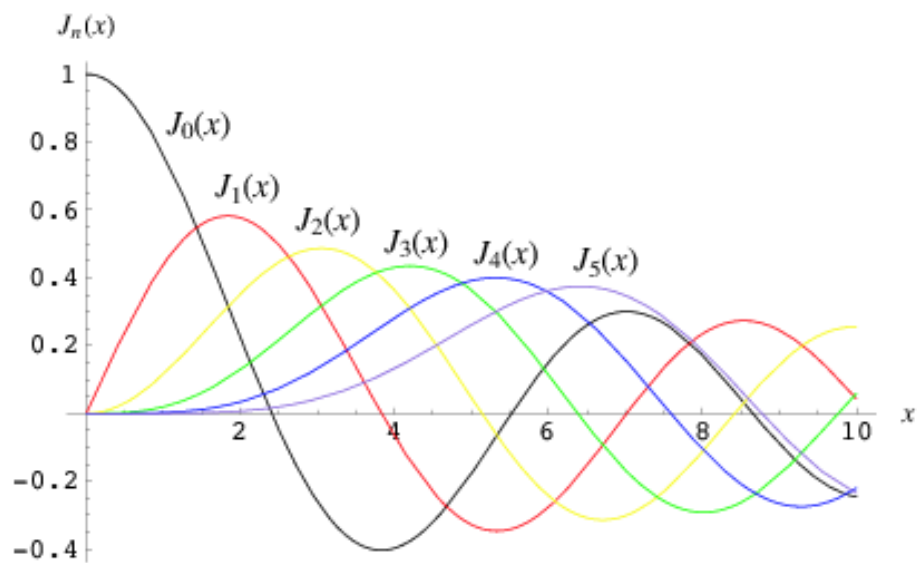
$$Y_n(x) = \frac{\cos(n\pi)J_n(x) - J_{-n}(x)}{\sin(n\pi)} \quad (7)$$

$$I_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k! \Gamma(n+k+1)} \quad (8)$$

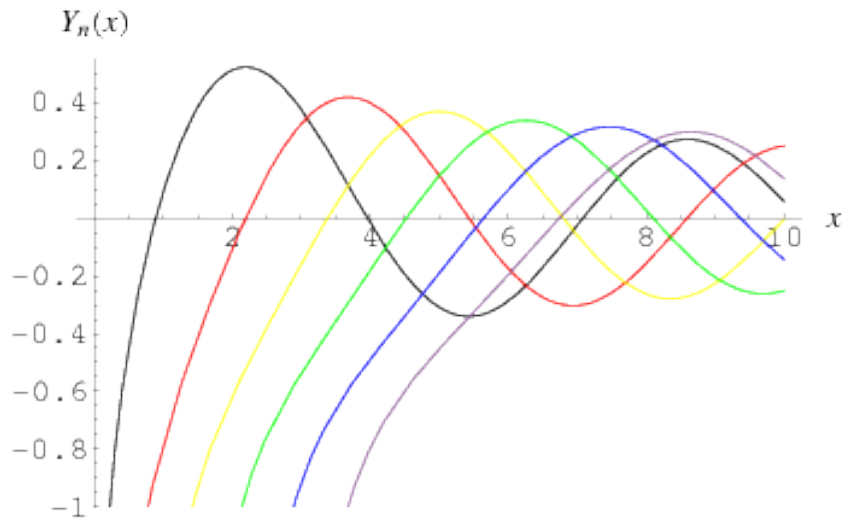
$$K_n(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2 \sin(n\pi)} \{I_{-n}(x) - I_n(x)\}, & n \neq 0, 1, 2, \dots \\ \lim_{p \rightarrow n} \frac{\pi}{2 \sin(p\pi)} \{I_{-p}(x) - I_p(x)\}, & n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (9)$$

3. ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ

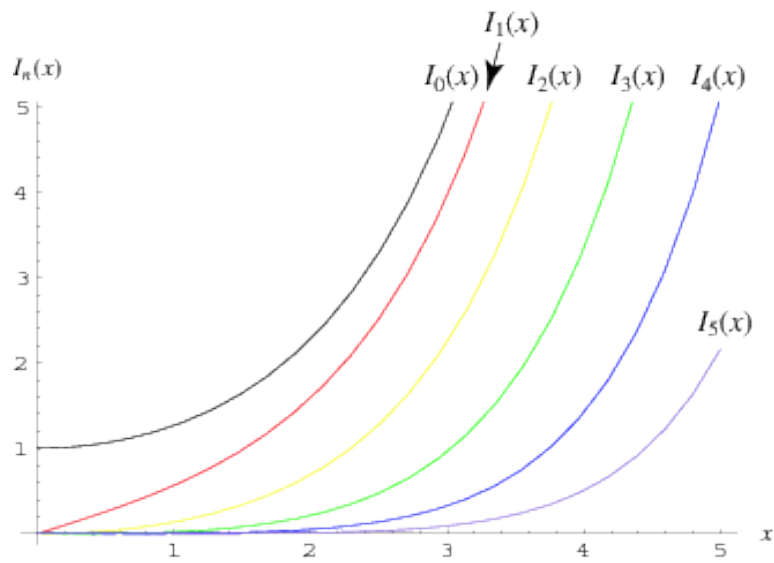
Στη συνέχεια δίνονται τα διαγράμματα των συναρτήσεων Bessel.



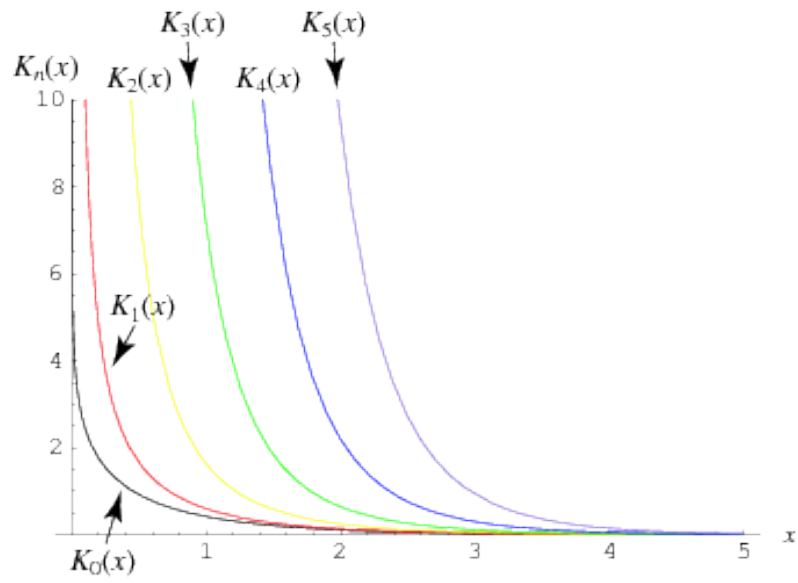
Σχήμα Π1 Συναρτήσεις Bessel 1^{ου} είδους [7].



Σχήμα Π2 Συναρτήσεις Bessel 2^{ου} είδους [7].



Σχήμα Π3 Τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel 1^{ου} είδους [7].



Σχήμα Π4 Τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel 2^{ου} είδους [7].

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2: ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΚΑΙ ΠΗΛΙΚΟ ΣΕΙΡΩΝ

Όπως είδαμε παραπάνω οι συναρτήσεις Bessel δίνονται ως δυναμοσειρές. Στον υπολογισμό της απόδοσης του τριγωνικού και του κυρτού παραβολικού περυγίου εμπλέκονται πηλικά συναρτήσεων Bessel. Για να υπολογίσουμε αυτά τα πηλικά πρέπει να μπορούμε να χειριστούμε αθροίσματα απείρων όρων.

Πολλαπλασιασμός Σειρών

Ο πολλαπλασιασμός σειρών που ονομάζεται και γινόμενο Cauchy ορίζεται από τον τύπο:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n \quad (1)$$

Πηλίκo Σειρών

Για να υπολογίσουμε το πηλίκo δύο σειρών χρησιμοποιούμε τους παραπάνω τύπους που ισχύουν για το γινόμενο. Έστω:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n / \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (2)$$

Τότε θα ισχύει:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (3)$$

Και άρα:

$$a_n = \sum_{k=0}^n b_k c_{n-k} \quad (4)$$

Για τους πρώτους 7 όρους έχουμε:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= b_0 c_0 \\
 a_1 &= b_0 c_1 + b_1 c_0 \\
 a_2 &= b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 \\
 a_3 &= b_0 c_3 + b_1 c_2 + b_2 c_1 + b_3 c_0 \\
 a_4 &= b_0 c_4 + b_1 c_3 + b_2 c_2 + b_3 c_1 + b_4 c_0 \\
 a_5 &= b_0 c_5 + b_1 c_4 + b_2 c_3 + b_3 c_2 + b_4 c_1 + b_5 c_0 \\
 a_6 &= b_0 c_6 + b_1 c_5 + b_2 c_4 + b_3 c_3 + b_4 c_2 + b_5 c_1 + b_6 c_0
 \end{aligned} \tag{5}$$

Αν από τις παραπάνω σχέσεις υπολογίσουμε τους συντελεστές c_i , $i=0, \dots, 6$, τότε ουσιαστικά θα έχουμε υπολογίσει και το πηλίκο των σειρών που φαίνεται στην σχέση (2). Αν κάνουμε τις πράξεις βρίσκουμε (αν $b_0 \neq 0$):

$$\begin{aligned}
 c_0 &= \frac{a_0}{b_0} \\
 c_1 &= \frac{a_1}{b_0} - \frac{b_1}{b_0} c_0 \\
 c_2 &= \frac{a_2}{b_0} - \frac{b_1}{b_0} c_1 - \frac{b_2}{b_0} c_0 \\
 c_3 &= \frac{a_3}{b_0} - \frac{b_1}{b_0} c_2 - \frac{b_2}{b_0} c_1 - \frac{b_3}{b_0} c_0 \\
 c_4 &= \frac{a_4}{b_0} - \frac{b_1}{b_0} c_3 - \frac{b_2}{b_0} c_2 - \frac{b_3}{b_0} c_1 - \frac{b_4}{b_0} c_0 \\
 c_5 &= \frac{a_5}{b_0} - \frac{b_1}{b_0} c_4 - \frac{b_2}{b_0} c_3 - \frac{b_3}{b_0} c_2 - \frac{b_4}{b_0} c_1 - \frac{b_5}{b_0} c_0 \\
 c_6 &= \frac{a_6}{b_0} - \frac{b_1}{b_0} c_5 - \frac{b_2}{b_0} c_4 - \frac{b_3}{b_0} c_3 - \frac{b_4}{b_0} c_2 - \frac{b_5}{b_0} c_1 - \frac{b_6}{b_0} c_0
 \end{aligned} \tag{6}$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- 1) Pandya Bhavik J. & Megha C. Karia, A BRIEF OVERVIEW OF APPLICATION OF EXTENDED SURFACES (FINS) FOR ENHANCEMENT OF HEAT TRANSFER, Global Journal of Engineering Science and Researches, February 2019.
- 2) Craus A.D., Aziz A. and Welty J., Extended surface heat transfer, John Wiley & Sons, Inc. 2001.
- 3) Ali Hameed Abd, NUMERICAL AND EXPERIMENTAL STUDY OF INTERRUPTED RECTANGULAR FINS UNDER NATURAL CONVECTION, University of Wasit, 2018.
- 4) Baricz A., Generalized Bessel Functions of the First Kind, Springer 2010.
- 5) Περσίδης Σ., Μαθηματικό Τυπολόγιο, εκδότης: ΕΣΠΙ Εκδοτική .
- 6) Κασιουλής Ν., Συναρτήσεις Bessel, Διπλωματική Εργασία, Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, ΕΜΠ 2014.
- 7) <https://mathworld.wolfram.com/>